ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Thomas ROBLIN

Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative

Tome 52, n° 1 (2002), p. 145-151.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_1_145_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 1 (2002), 145–151

SUR LA FONCTION ORBITALE DES GROUPES DISCRETS EN COURBURE NÉGATIVE

par Thomas ROBLIN

Nous considérerons un espace métrique CAT(-1) propre X. Nous renvoyons par exemple à [GH] et à [B] pour les définitions et propriétés de base de cette catégorie d'espaces généraux, dont il suffira au lecteur de savoir qu'elle comprend les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbures sectionnelles $\leqslant -1$, et également les arbres et les immeubles hyperboliques. Nous noterons ∂X le bord visuel de X, et $\overline{X} = X \cup \partial X$. Pour $x, y \in X$, nous désignerons par (x, y) la distance de x à y.

Nous considérerons un groupe discret Γ d'isométries de X, dont l'ensemble limite sera noté $\Lambda(\Gamma)$. Nous supposerons que Γ n'est pas élémentaire ($\Lambda(\Gamma)$ est alors infini).

Fixons dorénavant un point o de X. Notons $\mathcal{N}_\Gamma(R)$ le nombre de points de l'orbite de o sous Γ dans une boule de centre o et de rayon R. La quantité $\mathcal{N}_\Gamma(R)$ est connue sous le nom de fonction orbitale de Γ. Par définition, l'exposant critique de Γ est le nombre (éventuellement infini) défini par $\delta(\Gamma) = \limsup_{R\to\infty} \frac{\log \mathcal{N}_\Gamma(R)}{R}$. Il est clair que cet exposant ne dépend pas du choix du point o. Le nombre $\delta(\Gamma)$ est aussi l'exposant critique de la série de type Dirichlet dite série de Poincaré de Γ, c'est-à-dire $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-s(o,\gamma o)}$ où $s \in \mathbb{R}$; en d'autres termes, cette série converge pour $s > \delta(\Gamma)$, diverge pour $s < \delta(\Gamma)$ (pour $s = \delta(\Gamma)$, le comportement est variable). Enfin, puisque Γ n'est pas élémentaire, on a $\delta(\Gamma) > 0$ (voir [Su1], [N]).

Mots-clés : Groupes discrets – Géométrie hyperbolique – Densités conformes.
Classification math. : 20H10 – 37F35.

L'objet de la présente note est de prouver que dans la définition de $\delta(\Gamma)$ donnée ci-dessus, la limite supérieure est en fait une limite; nous y joindrons des corollaires de même nature, notamment à propos du dénombrement des géodésiques fermées primitives.

Bien entendu, dans divers cas particuliers mais d'importance, des estimations asymptotiques de la fonction orbitale beaucoup plus fines ont déjà été établies, en ayant recours à des méthodes à la mesure de ces résultats, et par conséquent plus élaborées que celle employée ici. On trouvera par exemple dans [R], outre des références sur ce sujet (parmi lesquelles il convient de citer [Mar]), des énoncés généraux concernant la fonction orbitale des groupes admettant une mesure de Bowen-Margulis finie, classe qui comprend entre autres les groupes géométriquement finis : en particulier, on y montre que $\mathcal{N}_\Gamma(R) \sim Ce^{\delta R}$ pour ces groupes, et $\mathcal{N}_\Gamma(R) = o(e^{\delta R})$ pour les autres; signalons que certains groupes parmi ces derniers ont été pour leur part étudiés de près dans [PoSh] entre autres. L'intérêt du présent article réside donc davantage dans la généralité de l'énoncé.

D'autre part, le problème envisagé ici est voisin de celui du calcul de l'entropie volumique et topologique (du flot géodésique sur une variété compacte), proposé notamment dans [Man]; l'existence de limites y est d'ordinaire obtenue par des arguments de sous-additivité, comme l'on en aurait pu employer ici - mais nous avons préféré une méthode nouvelle reposant sur les mesures conformes de Patterson-Sullivan. Pour le lien entre entropie et exposant critique $\delta(\Gamma)$, nous nous contentons de renvoyer le lecteur à [Su2] (l'égalité est certaine pour les groupes convexe-cocompacts).

Dans les démonstrations qui suivent, nous n'utiliserons rien que la théorie des mesures conformes (de Patterson-Sullivan) élaborée dans [Su1]. Rappelons donc ce qui nous sera utile à ce sujet.

La fonction de Buseman de X sera notée β; rappelons (*cf.* [B], [GH]) que pour $\xi \in \partial X$, $x, y \in X$, on a par définition $\beta_\xi(x,y) = \lim_{t \to +\infty}[(x, r(t)) - (y, r(t))]$ pour tout rayon géodésique r finissant en ξ. La fonction de Buseman vérifie une relation de cocycle $\beta_\xi(x,y) + \beta_\xi(y,z) = \beta_\xi(x,z)$, et est invariante par toute isométrie ϕ, i.e. $\beta_{\phi\xi}(\phi x, \phi y) = \beta_\xi(x,y)$.

Nous sommes à présent en mesure de définir les densités conformes comme dans [Su1]. Sera appelée densité conforme de dimension $\delta \in [0, +\infty[$ une application $\mu : x \mapsto \mu_x$ de X dans l'espace des mesures positives finies sur ∂X telle que pour tous $x, x' \in X$ on a

$$\mu_{x'} \ll \mu_x \quad \text{et} \quad \frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta\beta_\xi(x',x)}.$$

Une mesure μ_o induit une unique densité μ conforme de dimension donnée δ, avec concordance des notations.

Une densité μ sera dite Γ-invariante si pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma_*\mu_x = \mu_{\gamma x}$ $(x \in X)$, où $\gamma_*\mu_x$ est la mesure définie par $\gamma_*\mu_x(B) = \mu_x(\gamma^{-1}B)$ pour tout borélien B.

Lorsque $\delta(\Gamma)$ est fini, la construction de Patterson-Sullivan (introduite par ces auteurs en courbure constante dans [Pa] puis [Su1], mais que l'on peut généraliser sans difficulté, comme on peut le voir par exemple dans [K], [B]) nous assure l'existence d'une densité conforme de dimension $\delta(\Gamma)$ et Γ-invariante. La preuve du résultat qui fait l'objet de cette note repose sur une variation autour de cette construction.

Extrayons de [Su1] (moyennant une généralisation naturelle aux espaces CAT(-1), voir [B]) un résultat fondamental dont nous ferons usage. Nous nous contenterons d'indiquer qu'il s'agit là de conséquences du lemme dit de l'ombre, qui est la pierre angulaire du travail de Sullivan (voir [Su1]). Les assertions de cette proposition sont intimement liées, comme on le voit dans [Su1], ce qui sera à nouveau le ressort de la preuve du théorème ci-dessous.

PROPOSITION ([Su1]). — *Toute densité conforme Γ-invariante est de dimension supérieure ou égale à $\delta(\Gamma)$.*

De plus, quand $\delta(\Gamma) < \infty$, il existe au moins une densité conforme Γ-invariante de dimension égale à $\delta(\Gamma)$, et $\mathcal{N}_\Gamma(R) = O(e^{\delta(\Gamma)R})$.

Venons-en à notre énoncé principal.

THÉORÈME. — $\frac{1}{R}\log \mathcal{N}_\Gamma(R) \to \delta(\Gamma)$ *quand* $R \to +\infty$.

Preuve. — Supposons par l'absurde que $\liminf \frac{1}{R}\log \mathcal{N}_\Gamma(R) < \delta(\Gamma)$. On peut alors trouver $0 < \alpha < \delta(\Gamma)$ (alors $\alpha < +\infty$) et une suite de réels R_k tendant vers $+\infty$ tels que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathcal{N}_\Gamma(R_k) \leqslant e^{\alpha R_k}$. Nous allons obtenir une contradiction en construisant une densité μ conforme Γ-invariante de dimension α (ce qui entraîne que $\alpha \geqslant \delta(\Gamma)$, d'après la proposition ci-dessus).

Considérons les densités ν^R $(R > 0)$ sur $\overline{X}$ définies par

$$\nu_x^R = \frac{\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ (x,\gamma o)\leqslant R}} e^{-\alpha(x,\gamma o)}\mathcal{D}_{\gamma o}}{\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ (o,\gamma o)\leqslant R}} e^{-\alpha(o,\gamma o)}} \quad (x \in X)$$

où $\mathcal{D}_{\gamma o}$ désigne la masse de Dirac au point γo.

D'après le théorème de Banach-Alaoglu, vu que $\|\nu_o^R\| = 1$, il existe, pour tout $r > 0$, une suite d'entiers $k_n(r)$ tendant vers $+\infty$ avec n, telle que $\nu_o^{R_{k_n(r)}-r}$ converge vaguement vers une probabilité μ_o^r. (Le support de μ_o^r est $\Lambda(\Gamma)$ en raison de la divergence de la série au dénominateur ci-dessus quand $R \to \infty$, vu que $\alpha < \delta(\Gamma)$). Notons μ^r la densité conforme de dimension α induite par μ_o^r, et étudions le comportement de $\nu_x^{R_{k_n(r)}-r}$ rapporté à celui de $\nu_o^{R_{k_n(r)}-r}$, ce qui ne sera possible que sous la condition $(o,x) \leqslant r$.

Pour cela, fixons $r > 0$ et $x \in X$ tel que $(o,x) \leqslant r$. On a, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{(x,\gamma o)\leqslant R} e^{-\alpha(x,\gamma o)} - \sum_{(o,\gamma o)\leqslant R} e^{-\alpha(x,\gamma o)}\Big| &\leqslant \sum_{|(o,\gamma o)-R|\leqslant(x,o)} e^{-\alpha(x,\gamma o)} \\ &\leqslant e^{2\alpha(x,o)-\alpha R}\mathcal{N}_\Gamma\big(R+(x,o)\big) \\ &\leqslant e^{2\alpha r-\alpha R}\mathcal{N}_\Gamma(R+r).\end{aligned}$$

D'où, pour tout n,

$$\Big| \sum_{(x,\gamma o)\leqslant R_{k_n(r)}-r} e^{-\alpha(x,\gamma o)} - \sum_{(o,\gamma o)\leqslant R_{k_n(r)}-r} e^{-\alpha(x,\gamma o)}\Big| \leqslant e^{3\alpha r-\alpha R_{k_n(r)}}\mathcal{N}_\Gamma(R_{k_n(r)}) \leqslant e^{3\alpha r}.$$

On peut maintenant terminer par un argument bien connu (cf [Pa], [Su1]) : puisque $|(x,\gamma o) - (o,\gamma o) - \beta_\xi(x,o)|$ est arbitrairement petit pourvu que γo soit proche de $\xi \in \partial X$, et que $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\alpha(o,\gamma o)}$ diverge du fait que $\alpha < \delta(\Gamma)$, on obtient que $\nu_x^{R_{k_n(r)}-r}$ converge vaguement vers μ_x^r.

On vérifie aisément que les ν^R sont Γ-invariantes, c'est-à-dire que pour $x \in X$ et $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma_*\nu_x^R = \nu_{\gamma x}^R$. On déduit de ce qui précède que pour $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$ et $r > \max\big((o,x),(o,\gamma x)\big)$, on a $\gamma_*\mu_x^r = \mu_{\gamma x}^r$.

Considérons pour finir une suite r_j tendant vers $+\infty$ et une probabilité μ_o (portée par $\Lambda(\Gamma)$) telles que $\mu_o^{r_j}$ converge vaguement vers μ_o (grâce au théorème de Banach-Alaoglu). Soit μ la densité conforme de dimension α induite par μ_o. On a évidemment que $\mu_x^{r_j}$ converge vaguement vers μ_x pour tout $x \in X$. Par ce qui précède, on voit que μ est Γ-invariante. D'où la contradiction annoncée.

Donnons du théorème précédent quelques développements du même type. Le corollaire 1 a essentiellement pour objet de préparer au suivant.

COROLLAIRE 1. — *Si U est un ouvert de ∂X rencontrant $\Lambda(\Gamma)$, et si $\mathcal{N}_\Gamma(R, U)$ est le nombre de points γo tels que $(o, \gamma o) \leqslant R$ et que γo appartienne à l'enveloppe convexe de o et de U, alors $\frac{1}{R} \log \mathcal{N}_\Gamma(R, U) \to \delta(\Gamma)$ quand $R \to +\infty$.*

Preuve. — Prenons un ouvert A rencontrant $\Lambda(\Gamma)$ tel que $\overline{A} \subset U$. Comme Γ est non-élémentaire, on peut trouver $\phi_i \in \Gamma$ $(i = 1, \ldots, n)$ tels que $\partial X = \phi_1 A \cup \ldots \cup \phi_n A$ (il suffit de prendre deux isométries hyperboliques distinctes dans Γ et ayant leurs points fixes répulsifs dans A; les images de A par les itérées de ces isométries recouvrent le compact ∂X). Or si l'on fait agir ϕ_i^{-1} sur les points comptés dans $\mathcal{N}_\Gamma(R, \phi_i A)$, les points obtenus sont, à un nombre fini près, comptés parmi ceux de $\mathcal{N}_\Gamma(R + (o, \phi_i^{-1} o), U)$; ainsi $\mathcal{N}_\Gamma(R, \phi_i A) \leqslant \mathcal{N}_\Gamma(R + r, U) + c$ pour deux constantes r et c indépendantes de i. Puis $\mathcal{N}_\Gamma(R - r) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_\Gamma(R - r, \phi_i A) \leqslant n\mathcal{N}_\Gamma(R, U) + nc$, d'où la conclusion.

Pour le corollaire suivant, nous noterons SX l'espace des géodésiques paramétrées de X, c'est-à-dire l'espace des isométries de $\mathbb{R}$ dans X (si X est une variété, SX s'identifie à son fibré unitaire tangent), et $\mathcal{C}(\Gamma)$ le sous-espace fermé de SX formé par les éléments de SX à extrémités dans $\Lambda(\Gamma)$. Une géodésique fermée primitive g dans le quotient SX/Γ est une géodésique périodique (à torsion près lorsqu'il en existe, voir [GH] chapitre 11) dont la période est minimale - cette dernière est appelée la longueur l de g; vue dans X, c'est l'axe (unique à orientation près) d'une isométrie hyperbolique primitive de Γ de longueur de translation l.

COROLLAIRE 2. — *Si V est un ouvert borné de SX rencontrant $\mathcal{C}(\Gamma)$, et si $\mathcal{G}_\Gamma(L, V)$ est le nombre de géodésiques fermées primitives dans SX/Γ de longueur au plus L et rencontrant le projeté de V dans SX/Γ, alors $\frac{1}{L} \log \mathcal{G}_\Gamma(L, V) \to \delta(\Gamma)$ quand $L \to +\infty$.*

Preuve. — Soit $\phi \in \Gamma$ une isométrie hyperbolique primitive d'axe g rencontrant V et de longueur de translation $l \leqslant L$. Prenons $x \in X$ dans le projeté sur X de $g \cap V$, dont nous noterons r le diamètre; on obtient, par l'inégalité triangulaire, que $(o, \phi o) \leqslant (x, \phi x) + 2(o, x) = l + 2(o, x) \leqslant L + 2r$. D'où l'inégalité (très grossière) $\mathcal{G}_\Gamma(L, V) \leqslant \mathcal{N}_\Gamma(L + 2r)$, puis $\limsup \frac{1}{L} \log \mathcal{G}_\Gamma(L, V) \leqslant \delta(\Gamma)$.

Pour montrer l'autre inégalité, à savoir $\liminf \frac{1}{L} \log \mathcal{G}_\Gamma(L, V) \geqslant \delta(\Gamma)$, nous prenons deux ouverts A et B de ∂X d'adhérences disjointes tels que toute géodésique joignant $\overline{B}$ à $\overline{A}$ passe par V, et nous allons comparer $\mathcal{G}_\Gamma(L,V)$ au nombre $\mathcal{N}_\Gamma(R,A,B)$ de $\gamma \in \Gamma$ tels que $(o,\gamma o) \leqslant R$, que γo soit dans l'enveloppe convexe de o et de A, et que $\gamma^{-1}o$ soit dans l'enveloppe convexe de o et de B. On détermine asymptotiquement le logarithme de ce nombre par la même méthode que celle employée dans le corollaire 1. Nous nous contenterons d'observer qu'étant donné $\phi \in \Gamma$, si γo est proche de A et $\gamma^{-1}o$ proche de B, alors $\phi\gamma^{-1}o = (\gamma\phi^{-1})^{-1}o$ est proche de ϕB, tandis que $\gamma\phi^{-1}o$ reste à distance fixe de γo; ainsi l'on peut comparer $\mathcal{N}_\Gamma(R,A,B)$ à $\mathcal{N}_\Gamma(R,A,\phi B)$, puis (par réunion finie) à $\mathcal{N}_\Gamma(R,A)$. On conclut, comme dans le précédent corollaire, que $\frac{1}{R}\log \mathcal{N}_\Gamma(R,A,B) \to \delta(\Gamma)$ quand $R \to +\infty$.

Établissons maintenant un lien avec les géodésiques fermées primitives, ou, ce qui revient au même, avec les éléments hyperboliques primitifs de Γ.

Considérons une isométrie $\gamma \in \Gamma$ recensée dans le nombre $\mathcal{N}_\Gamma(R,A,B)$. La géodésique passant par $\gamma^{-1}o$ et γo étant contrainte de passer par l'ensemble borné qu'est le projeté de V sur X, l'isométrie γ est nécessairement hyperbolique, pourvu que la distance $(o,\gamma o)$ soit assez grande (ce que l'on peut vérifier avec le type d'arguments exposés dans [GH] p. 150-151). Notre isométrie γ est donc de la forme $\gamma = \phi^n$ où n est un entier naturel non nul, et ϕ une isométrie hyperbolique primitive dans Γ, d'axe rencontrant le projeté de V sur X en au moins un point noté x, et de longueur de translation l. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $nl = (x,\gamma x) \leqslant (o,\gamma o) + 2(o,x)$. Observons maintenant que les longueurs de translation des isométries hyperboliques de Γ d'axe passant par V sont minorées par un $l_0 > 0$, puisque Γ est discret et V borné. En notant par ailleurs r le diamètre du projeté de V sur X réuni à $\{o\}$, et en posant $L = R + 2r$, nous aboutissons à $l \leqslant R + 2r = L$ et que $n \leqslant \frac{R+2r}{l_0} \leqslant 2L/l_o$.

On obtient de ce qui précède que $\mathcal{N}_\Gamma(L-2r,A,B) \leqslant \frac{2L}{l_o}\mathcal{G}_\Gamma(L,V) + c$ où la constante c prend en compte le nombre fini de γ que nous avons écarté. On conclut que $\liminf \frac{1}{L}\log \mathcal{G}_\Gamma(L,V) \geqslant \delta(\Gamma)$, ce qui achève la preuve.

Nous tenons à remercier F. Dal'Bo, Y. Guivarc'h et F. Paulin pour avoir lu ce travail et en avoir amélioré la rédaction, ainsi que le rapporteur pour ses corrections et suggestions, et notamment pour son apport en références.

BIBLIOGRAPHIE

[B] M. BOURDON, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace, L'Ens. Math., 41 (1995), 63-102.

[GH] E. GHYS & P. de la HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après Gromov, Prog. in Math., 83, Birkhauser, 1990.

[K] V. KAIMANOVICH, Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theor., 53, no 4 (1990), 361-393.

[Man] A. MANNING, Topological entropy for geodesic flows, Ann. Math., 110 (1979), 567-573.

[Mar] G.A. MARGULIS, Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, Funct. Anal. Appl., 3 (1969), 335-336.

[N] P.J. NICHOLLS, The ergodic theory of discrete groups, Cambridge University Press, 1989.

[Pa] S.J. PATTERSON, The limit set of a Fuchsian group, Acta Math., 136 (1976), 241-273.

[PoSh] M. POLLICOTT & R. SHARP, Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature, Invent. Math., 117 (1994), 275-302.

[R] T. ROBLIN, Sur la théorie ergodique des groupes discrets en géométrie hyperbolique, Thèse de doctorat de l'Université de Paris-Sud (1999).

[Su1] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. I.H.E.S., 50 (1979), 171-202.

[Su2] D. SULLIVAN, Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups, Acta Math., 153 (1984), 259-277.

Manuscrit reçu le 30 avril 2001,
accepté le 13 juillet 2001.

Thomas ROBLIN,
Université de Rennes I
Institut de Mathématiques de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).
roblin@maths.univ-rennes1.fr