



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Ivan PAN & Marcos SEBASTIANI

Sur les équations différentielles algébriques admettant des solutions avec une singularité essentielle

Tome 51, n° 6 (2001), p. 1621-1633.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_6_1621_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÈBRIQUES ADMETTANT DES SOLUTIONS AVEC UNE SINGULARITÉ ESSENTIELLE

par I. PAN et M. SEBASTIANI

1. Introduction.

Un théorème classique dû à Malmquist dit que si une équation différentielle de la forme

$$(1) \quad y' = R(x, y),$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle sur \mathbb{C}^2 , possède une solution méromorphe avec une singularité essentielle à l'infini, alors il s'agit d'une équation de Riccati, c'est-à-dire,

$$R(x, y) = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x),$$

où $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ sont des fonctions rationnelles ; la preuve originale de Malmquist (voir [10]) est difficile à comprendre. En 1933, Yosida démontre une généralisation de ce résultat comme une application de la théorie de Nevanlinna ([16]) ; dans le cas où la solution *transcendante* possède une infinité de pôles, par exemple, l'idée de la démonstration est d'analyser la distribution de ces pôles lorsqu'on s'approche de la singularité essentielle : la théorie de Nevanlinna fournit certains invariants qui obligent la fonction

rationnelle $R(x, y)$ d'être comme ci-dessus (voir aussi [7, §4.6]). En 1954, Wittich généralise le théorème de Yosida ([15]).

Un autre résultat classique montre que si l'équation (1) n'a pas de ramification *mobile*, alors elle est de Riccati ([7, thm. 3.3.3]). Puisqu'une équation de Riccati n'a jamais ce type de singularité, cette propriété d'absence de ramification mobile, caractérise les équations de Riccati. Donc, le théorème de Malmquist nous dit en fait qu'une équation du type (1) qui possède une solution méromorphe avec une singularité essentielle à l'infini n'a pas de ramifications mobiles.

Finalement, la théorie des équations sans ramifications mobiles a été étendue par Fuchs et Poincaré ([4], [14]) au cas plus général des équations algébriques (voir aussi [13])

$$F(x, y, y') = 0, \quad F \in \mathbb{C}[x, y, z] \quad (\deg_z F > 0);$$

on dira qu'une équation de ce type est dans la *classe de Fuchs* si elle n'a pas de ramification mobile.

Il est donc naturel d'énoncer l'assertion suivante :

Si l'équation $F(x, y, y') = 0$ possède une solution locale avec une singularité essentielle, alors elle est dans la classe de Fuchs.

Dans le cas d'existence d'une solution méromorphe sur \mathbb{C} avec singularité essentielle à l'infini, ce résultat a été énoncé par Malmquist dans [11] (voir aussi [12]) et démontré par Eremenko dans [3], à l'aide de la théorie de Nevanlinna.

Le but de ce travail est de donner une démonstration géométrique de cette assertion, ce qui étend le théorème de Malmquist et, comme on verra plus tard, ses généralisations données par Yosida dans [16] et Wittich dans [15] (voir théorème 3.3).

Le travail est divisé en deux parties. Dans la première partie on montre qu'une feuille transcendante d'un feuilletage sur une surface fibrée doit intersecter toute courbe algébrique non invariante et non contenue dans une fibre de la fibration : c'est le théorème 2.1.

Dans la deuxième partie on démontre le résultat principal comme application du théorème 2.1. Pour ce faire, on observe d'abord que l'étude de l'équation $F(x, y, y') = 0$ est équivalente à celle de l'équation de Pfaff $zdx - dy = 0$ sur la surface $F(x, y, z) = 0$, qui est naturellement fibrée par la projection sur \mathbb{C} ; quitte à compactifier et désingulariser on est dans

le contexte de la première partie : les ramifications mobiles correspondent à l'existence de composantes non-verticales dans le diviseur de tangence entre le feuilletage et la fibration.

Cet article est la continuation naturelle d'un plan de travail qui nous a été proposé par Étienne Ghys à qui nous exprimons notre reconnaissance.

Nous aimerions remercier L.G. Mendes qui nous a indiqué la référence [3].

2. Feuilles transcendentes des feuilletages.

Soient $h : X \rightarrow B$ une surface fibrée, avec X projective et B une surface de Riemann, c'est-à-dire, une application analytique surjective à fibres connexes. Supposons qu'il existe une application analytique surjective $\theta : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Si $b \in B$ et $\Delta = \Delta(b)$ est un voisinage de b isomorphe à un disque, on pose $\Delta^* := \Delta - \{b\}$ et $X_b := h^{-1}(b)$.

Soit $s : \Delta^* \rightarrow X$ analytique tel que $h \circ s = \text{Id}_{\Delta^*}$: c'est une section (locale) de h sur Δ^* ; on pose $Y := h^{-1}(\Delta)$ et $Y^* := h^{-1}(\Delta^*)$.

LEMME 2.1. — Si b est une singularité essentielle de $\theta \circ s : \Delta^* \rightarrow \mathbb{P}^1$, alors

$$\overline{s(\Delta^*)} \cap X_b$$

est un ensemble analytique de dimension pure 1.

Preuve. — Comme $s : \Delta^* \rightarrow Y^*$ est analytique et propre, $Z = s(\Delta^*)$ est un sous-ensemble analytique fermé irréductible de Y^* de dimension 1.

Voyons, d'abord, qu'il n'y a pas de point isolé dans l'ensemble $\overline{Z} \cap X_b$. En effet, pour un tel point p , il existe un voisinage ouvert U_p de p tel que $S := \overline{Z} \cap U_p$ est un sous-ensemble analytique de U_p ([5, K, thm. 7]). Par définition de Z , la restriction $h|_S : S \rightarrow \Delta$ de h à S est injective et $h(p) = b$. Alors l'application locale $h : (S, p) \rightarrow (\Delta, b)$ est un isomorphisme (local).

Tout $x \in S$, avec $x \neq p$ est dans l'image de s . Comme s est une section, $x = s(h(x))$. Donc

$$s : \Delta^* \rightarrow S - \{p\}$$

est l'inverse de $h|_{S - \{p\}}$ et s se prolonge analytiquement à Δ , ce qui contredit l'hypothèse.

Soit maintenant $p \in \overline{Z} \cap X_b$ un point régulier de X_b ; observons que \overline{Z} n'est pas analytique au voisinage de p , car autrement il serait de dimension 1 et p serait isolé dans $\overline{Z} \cap X_b$. Donc p est un point intérieur à $\overline{Z} \cap X_b$ dans X_b ([5, K, thm. 7]). On en déduit que $\overline{Z} \cap X'_b$ est ouvert et fermé dans X'_b , où X'_b désigne l'ensemble des points réguliers de X_b . Il en résulte que $\overline{Z} \cap X_b$ est la réunion de certaines composantes irréductibles de X_b . \square

LEMME 2.2. — *Soit $C \subset X$ une courbe irréductible qui n'est pas contenue dans une fibre de h . Soient A_1, \dots, A_q les composantes irréductibles des fibres de h qui ne rencontrent pas C . Soit F une fibre régulière de h . Alors, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ et des entiers négatifs a_1, \dots, a_n tels que le diviseur*

$$D = nF + mC + \sum_{j=1}^q a_j A_j$$

est ample.

Preuve. — Puisque C rencontre toutes les fibres de h , le lemme de Zariski (voir [1, chap. II, lem. 8.2]) nous dit que la forme d'intersection définit une forme quadratique définie négative sur $\bigoplus_{j=1}^q \mathbb{Q}A_j$. C'est-à-dire, la matrice symétrique

$$M = (c_{ij}), \quad c_{ij} := A_i \cdot A_j \quad (1 \leq i, j \leq q)$$

est définie négative. Il en résulte qu'il existe des entiers négatifs a_1, \dots, a_q tels que toutes les coordonnées du vecteur

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}$$

sont positives; ceci signifie

$$\left(\sum_{j=1}^q a_j A_j \right) \cdot A_i > 0, \quad i = 1, \dots, q;$$

posons $D := nF + mC + \sum_{j=1}^q a_j A_j$. Pour démontrer qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que D est ample, on utilise le critère de Nakai-Moishezon (voir [6, chap. V, thm. 1.10]).

Tout d'abord

$$D \cdot F = mC \cdot F > 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Ensuite,

$$D \cdot A_i = \left(\sum_{j=1}^q a_j A_j \right) \cdot A_i > 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Soit A une composante irréductible d'une fibre singulière de h telle que $A \cap C$ est non vide. Alors,

$$D \cdot A = mC \cdot A + \sum_{j=1}^q a_j A_j \cdot A.$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles courbes A et $C \cdot A \geq 1$, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$D \cdot A > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

fixons un tel m . Soit S une courbe irréductible qui n'est pas contenue dans une fibre de h . Alors, comme $a_j < 0$ pour tout j et $A_j \cdot S \leq F \cdot S$, on a

$$\begin{aligned} D \cdot S &= nF \cdot S + mC \cdot S + \sum_{j=1}^q a_j A_j \cdot S \\ &\geq nF \cdot S + mC \cdot S + \left(\sum_{j=1}^q a_j \right) F \cdot S \\ &= \left(n + \sum_{j=1}^q a_j \right) F \cdot S + mC \cdot S. \end{aligned}$$

Comme $F \cdot S > 0$ et $C \cdot S \geq 0$ si $C \neq S$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $D \cdot S > 0$ pour toute courbe irréductible qui n'est pas contenue dans une fibre de h et tout $n > n_0$. Finalement,

$$D^2 = m^2 C^2 + \left(\sum_{j=1}^q a_j A_j \right)^2 + 2mn C \cdot F.$$

Puisque $C \cdot F > 0$ on a que $D^2 > 0$, si $n \in \mathbb{N}$ est assez grand. □

On désigne par $\mathbb{C}(X)$ le corps de fonctions méromorphes sur X ; si D est un diviseur sur X , on note $\text{Supp}(D)$ le support de D . Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, on a

LEMME 2.3. — Il existe $f \in \mathbb{C}(X)$ telle que

- (1) $C \subset \text{Supp}(\text{div}_\infty f) \subset C \cup F$;
- (2) pour chaque $j = 1, \dots, q$, la fonction f est holomorphe au voisinage de chaque point de A_j et $f|_{A_j} = 0$.

Preuve. — Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $a_j < 0$ ($j = 1, \dots, q$) des entiers tels que

$$D = nF + mC + \sum_{j=1}^q a_j A_j$$

est ample (lemme 2.2). Considérons le diviseur

$$D' := nF + \sum_{j=1}^q a_j A_j.$$

Alors

$$(D')^2 = \left(\sum_{j=1}^q a_j A_j \right)^2 \leq 0$$

par le lemme de Zariski; en particulier, D' n'est pas ample, par le critère de Nakai-Moishezon.

Prenons $k \in \mathbb{N}$ de sorte que kD soit très ample. Comme $kD' \leq kD$ et kD' n'est pas très ample, on doit avoir une inclusion stricte

$$H^0(X, \mathcal{O}_{kD'}) \subset H^0(X, \mathcal{O}_{kD}).$$

Alors, il existe $f \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$\text{div } f + kD \geq 0 \text{ mais } \text{div } f + kD' \not\geq 0.$$

On en déduit, respectivement,

$$\text{Supp}(\text{div}_\infty f) \subset F \cup C \text{ et } C \subset \text{Supp}(\text{div}_\infty f).$$

De la première inclusion il résulte que f est holomorphe au voisinage de chaque point de A_j ($j = 1, \dots, q$). Comme $a_j < 0$ et $\text{div } f + kD \geq 0$ on obtient que $f|_{A_j} = 0$ d'où l'assertion. \square

LEMME 2.4. — Soit $C \subset X$ une courbe irréductible non contenue dans une fibre de h . Si $b \in B$ est une singularité essentielle de $\theta \circ s : \Delta^* \rightarrow \mathbb{P}^1$, il existe une composante irréductible A de X_b telle que

- (1) $A \cap C \neq \emptyset$;
- (2) $\overline{s(\Delta^*)} \supset A$.

Preuve. — Notons B_1, \dots, B_r les composantes irréductibles de X_b qui ne rencontrent pas C . Si $r = 0$, le lemme découle immédiatement du lemme 2.1 et du fait que $X_b \cap C$ n'est pas vide.

Si $r > 0$, supposons, par l'absurde, que le lemme est faux. D'après le lemme 2.1 on doit avoir

$$(2) \quad \overline{s(\Delta^*)} \cap X_b \subset \bigcup_{j=1}^r B_j.$$

Soit $f \in \mathbb{C}(X)$ comme dans le lemme 2.3. Il existe une composante irréductible A de X_b telle que $A \cap C$ n'est pas vide. Alors $f|_A$ n'est pas constante, donc $f \notin \mathbb{C}(B)$ (on considère $\mathbb{C}(B) \subset \mathbb{C}(X)$ par composition avec h)

D'autre part, f est holomorphe au voisinage de chaque point de B_j et $f|_{B_j} = 0$. Alors, $f \circ s : \Delta^* \rightarrow \mathbb{P}^1$ se prolonge, puisque d'après (2)

$$\lim_{y \rightarrow b} f(s(y)) = 0.$$

Quitte à rétrécir Δ , on peut supposer

$$f \circ s(\Delta) \subset \mathbb{C}.$$

Le fait que b soit une singularité essentielle de $\theta \circ s$ entraîne aussi que $\theta \notin \mathbb{C}(B)$. Puisque le degré de transcendance de $\mathbb{C}(X)$ sur $\mathbb{C}(B)$ est 1, il existe

$$P(T, Z) \in \mathbb{C}(B)[T, Z],$$

non-nul tel que $P(f, \theta) = 0$. Posons

$$P(T, Z) = \sum_{j=0}^N a_j(T)Z^j, \quad a_j(T) \in \mathbb{C}(B)[T], \quad a_N(T) \neq 0.$$

Comme $\mathbb{C}(B) \subset \mathbb{C}(X)$ est une extension transcendante pure, alors $a_j(f) = 0$ implique $a_j(T) = 0$.

Par ailleurs, $\overline{s(\Delta^*)}$ n'est pas contenu dans un ensemble analytique de codimension 1 d'après le lemme 2.1. Donc, $a_j(f) \circ s = 0$ implique $a_j(f) = 0$. On en déduit que $a_N(f) \circ s = a_N(f \circ s) \neq 0$.

De l'équation $P(f, \theta) = 0$ on déduit $P(f \circ s, \theta \circ s) = 0$. Donc

$$\sum_{j=1}^N a_j(f \circ s)(\theta \circ s)^j = 0.$$

Comme $f \circ s$ est holomorphe sur Δ , la fonction $a_j(f \circ s)$ est méromorphe sur Δ . Puisque $a_N(f \circ s) \neq 0$, on obtient que $\theta \circ s$ est une fonction algébrique sur Δ . Alors, elle n'a pas de singularité essentielle : contradiction. \square

THÉORÈME 2.1. — *Soient \mathcal{F} un feuilletage analytique à singularités isolées sur une surface fibrée $h : X \rightarrow B$, et $b \in B$. Soient $s : \Delta^* \rightarrow X$ une section de h définie sur un voisinage épointé de b , $\theta : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ une application holomorphe surjective et $C \subset X$ une courbe irréductible non contenue dans une fibre de h . Supposons que*

- (1) C n'est pas invariante par \mathcal{F} ;
- (2) s est tangente à \mathcal{F} ;
- (3) b est une singularité essentielle de $\theta \circ s$.

Alors, $s(\Delta^*) \cap C$ n'est pas vide.

Preuve. — Tout d'abord on peut supposer que C ne contient pas de point singulier de \mathcal{F} . En effet, si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est une suite convenable d'éclatements, on peut supposer que la transformée stricte \tilde{C} de C dans \tilde{X} ne contient pas de point singulier du relèvement $\tilde{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} à \tilde{X} (voir [2, lem. 2]). En prenant Δ suffisamment petit, on peut aussi supposer qu'on n'éclate aucun point de $h^{-1}(\Delta^*)$ et la section s se relève en $\tilde{s} : \Delta^* \rightarrow \tilde{X}$; notons $\tilde{\theta} := \theta \circ \pi$.

Maintenant $\tilde{\theta} \circ \tilde{s} = \theta \circ \pi \circ \tilde{s}$ et b est une singularité essentielle de $\tilde{\theta} \circ \tilde{s}$. Il suffit, donc, de substituer h , s , θ et C par $\tilde{h} := h \circ \pi$, \tilde{s} , $\tilde{\theta}$ et \tilde{C} respectivement.

On traite maintenant le cas où C ne contient pas de singularité de \mathcal{F} .

Soit A la composante irréductible de X_b donnée par le lemme 2.4. Pour tout voisinage connexe $V_b \subset \Delta$ de b , on sait que $s(V_b^*)$ est une feuille de la restriction de \mathcal{F} à $h^{-1}(V_b^*)$; ici on a posé $V_b^* := V_b - \{b\}$. On en déduit que A est invariante par \mathcal{F} . Prenons $p \in C \cap A$. Puisque p n'est pas

singulier pour \mathcal{F} , la structure produit de \mathcal{F} au voisinage de p et le fait que $p \in \overline{s(\Delta^*)}$ nous montre tout de suite que $s(\Delta^*) \cap C$ n'est pas vide, d'où le théorème. \square

3. Classe de Fuchs et solutions transcendentes.

On dénote $\mathbb{P}_1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe et \mathbb{P}_1^k le produit de k de ces droites.

Considérons l'équation différentielle implicite

$$(3) \quad F(x, y, y') = 0$$

où $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ est irréductible de degré $m \geq 1$ en z . Une solution locale de (3) en $a \in \mathbb{P}_1$ (à reparamétrisation holomorphe près) est une application holomorphe $(\alpha, \beta) : U^* \rightarrow \mathbb{P}_1^2$ définie dans un voisinage épointé U^* de $0 \in \mathbb{C}$, avec α non-constante, holomorphe en 0 et $\alpha(0) = a$ et telle que

$$F(\alpha(t), \beta(t), \beta'(t)/\alpha'(t)) = 0, \forall t \in U^*.$$

Donc, on peut supposer

$$\alpha(t) = a + t^m, \quad \beta(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i t^i,$$

pour un $m \geq 1$; on dira que la solution est *uniforme* si $\beta_i \neq 0$ implique que m divise i et qu'elle est *ramifiée* en a autrement; si la solution est uniforme et β possède une singularité essentielle en a , on dira que a est une *singularité essentielle* de cette solution.

S'il existe une solution locale en $a \in \mathbb{C}$ qui soit ramifiée (resp. avec singularité essentielle) en ce point, on dira que a est un *point de ramification* (resp. une *singularité essentielle*) de l'équation (3).

DÉFINITION 3.1. — *L'équation (3) est dans la classe de Fuchs s'il n'existe qu'un nombre fini de points de ramification.*

Notons $S_0 := \{F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ et $f_0, \theta_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $g_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ les restrictions à S_0 des projections canoniques, où f_0 est la projection sur le premier facteur, θ_0 sur le deuxième et g_0 sur les deux premiers. On considère l'adhérence de Zariski $S \subset \mathbb{P}_1^3$ de S_0 dans \mathbb{P}_1^3 avec les extensions $f_1, \theta_1 : S \rightarrow \mathbb{P}_1$, $g_1 : S \rightarrow \mathbb{P}_1^2$ de f_0, θ_0 et g_0 correspondantes. Finalement,

si $\pi : X \rightarrow S$ est une désingularisation de S , on pose $f := f_1 \circ \pi$, $\theta := \theta_1 \circ \pi$ et $g := g_1 \circ \pi$; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{C}^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}_1^2 & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_1 & & \\
 g_0 \uparrow & & g_1 \uparrow & \swarrow g & \uparrow \theta & & \\
 S_0 & \hookrightarrow & S & \xleftarrow{\pi} & X & & \\
 f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & \swarrow f & \downarrow h & & \\
 \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_1 & \xleftarrow{\varphi} & B & &
 \end{array}$$

où $p : \mathbb{P}_1^2 \rightarrow \mathbb{P}_1$ est la projection sur le deuxième facteur et φ est un revêtement ramifié tel que f se factorise comme $\varphi \circ h$ avec h à fibres connexes ([6, chap. III, cor. 11.5]). Par ailleurs, on considère la 1-forme méromorphe sur \mathbb{P}_1^3 définie par

$$\omega := zdx - dy.$$

On note \mathcal{F} le feuilletage analytique à singularités isolées sur X défini par l'équation de Pfaff

$$\pi^*(\omega).$$

On dira que \mathcal{F} est de *Riccati par rapport à la fibration* $h : X \rightarrow B$ s'il est transverse à une (et donc à toutes sauf un nombre fini) fibre régulière de h .

On a le résultat suivant dont la preuve se trouve dans [13, chap. II, thm. 3.15].

THÉORÈME 3.1. — *L'équation (3) est dans la classe de Fuchs si et seulement si \mathcal{F} est de Riccati par rapport à h .*

Maintenant on est prêt pour démontrer notre résultat principal.

THÉORÈME 3.2. — *Supposons que (3) possède une solution ayant une singularité essentielle en un point $a \in \mathbb{C}$. Alors, (3) est dans la classe de Fuchs.*

Preuve. — Supposons que \mathcal{F} n'est pas de Riccati par rapport à h . En particulier, il existe une composante irréductible C du support du diviseur de tangence entre \mathcal{F} et le feuilletage défini par $dh = 0$, qui n'est pas contenue dans une fibre de h .

Soient U^* un voisinage épointé de a et $u : U^* \rightarrow \mathbb{P}_1$ une solution locale de l'équation (3) ayant une singularité essentielle en a ; la fonction u définit une application analytique $v : U^* \rightarrow S$ telle que $f_1 \circ v = \text{Id}$ et $p \circ g_1 \circ v = u$, où $v(x) = (x, u(x), u'(x))$.

Par ailleurs, notons $V \subset S_0 \subset S$ l'ensemble ouvert où g devient un isomorphisme local : il est constitué de points réguliers de S ; $v(U^*)$ n'est pas contenu dans $S - V$, car autrement le graphe de u dans $U^* \times \mathbb{P}_1$ serait contenu dans le sous-ensemble analytique $g_1(S - V)$ de \mathbb{P}_1^2 contredisant l'existence de singularité essentielle. Donc $L := U^* - v^{-1}(V)$ est discret et $\pi^{-1} \circ (v|_{U^* - L})$ se prolonge en une application analytique $w : U^* \rightarrow X$ telle que l'on ait :

- (i) $w(U^*)$ est invariante par \mathcal{F} ;
- (ii) $f \circ w = f_1 \circ v = \text{Id}$;
- (iii) $\theta \circ w = u$;

en particulier w est une section locale de la *fibration* f .

Comme on sait $\overline{w(U^*)} \cap f^{-1}(a)$ est connexe; prenons $b \in B$ avec $\varphi(b) = a$ de sorte que $h^{-1}(b)$ soit la composante connexe de $f^{-1}(a)$ qui contient $\overline{w(U^*)} \cap f^{-1}(a)$. L'application $s : \Delta^* \rightarrow X$ définie sur un voisinage épointé Δ^* de b par

$$s := w \circ (\varphi|_{\Delta^*})$$

est, par construction, une section (locale) de h , invariante par \mathcal{F} , telle que $\theta \circ s$ a une singularité essentielle en $b \in B$.

Par le théorème 2.1, $s(\Delta^*)$ intersecte C , ce qui est impossible. □

L'équation (3) est dite de *genre* g si la fibre générique de h est de genre g . On sait qu'une équation différentielle de genre > 1 qui est dans la classe de Fuchs possède une intégrale première méromorphe (voir [14], [8] ou [13, chap. III, thm. 6.4]). On en déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.1. — *Supposons que l'équation (3) est de genre > 1 . Alors, elle ne possède pas de solution avec singularité essentielle.*

Pour finir on montre que le théorème 3.2 fournit, comme cas particulier, les théorèmes de Yosida ([16]) et Wittich ([15]) qui généralisent, à leur tour, le théorème de Malmquist ([10]). Pour ce faire on a besoin de

rappeler que si on écrit

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^m c_i(x, y)z^{m-i},$$

et si l'équation (3) est dans la classe de Fuchs, alors (voir [14] ou [13, chap. I, pro. 4.9])

$$\deg_y c_k \leq 2k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Il en résulte le corollaire suivant qui généralise l'énoncé de Yosida (théorème 3.3).

COROLLAIRE 3.2. — *Si l'équation (3) possède une singularité essentielle, alors*

$$\deg_y c_k \leq 2k, \quad k = 0, \dots, m.$$

THÉORÈME 3.3 (K. Yosida). — *Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle. Supposons que l'équation différentielle*

$$(y')^m = R(x, y)$$

admet une solution méromorphe sur \mathbb{C} qui n'est pas rationnelle. Alors $R(x, y)$ est polynomiale en y et $\deg_y R(x, y) \leq 2m$.

Preuve. — Il suffit d'écrire $R(x, y) = A(x, y)/B(x, y)$ avec $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$ et d'appliquer le corollaire 3.2 à $F(x, y, z) := B(x, y)z^m - A(x, y)$; le cas où F est réductible se réduit au cas où il est irréductible (voir [9, chap. VIII, § 9, thm. 16]). \square

Remarque 3.1. — Le théorème de Malmquist est le théorème 3.3 pour $m = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN, *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, 1984.
- [2] M. BRUNELLA, Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes, *Ann. Norm. Sup.*, 4^e sér., t. 30 (1997), 553–567.
- [3] A. E. EREMENKO, Meromorphic solutions of algebraic differential equations, *Russian Math. Surveys*, 37–4 (1982), 61–95.

- [4] M. FUCHS, Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, *Math. Werke* 2, 355.
- [5] R. C. GUNNING, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, Wadsworth and Brooks/Cole, vol. II, (1990).
- [6] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.
- [7] E. HILLE, *Ordinary differential Equations in the Complex Domain*, John Wiley and Sons, 1976.
- [8] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover, 1926.
- [9] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
- [10] J. MALMQUIST, Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du première ordre, *Acta Math.*, 36 (1913), 297–343.
- [11] J. MALMQUIST, Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre, *Acta Math.*, 42 (1920), 59–79.
- [12] J. MALMQUIST, Sur les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre, *Acta Math.*, 74 (1941), 175–196.
- [13] I. PAN, M. SEBASTIANI, Les équations algébriques et les singularités mobiles, à paraître dans *Monog. de Mat. IMPA*.
- [14] H. POINCARÉ, Sur un théorème de M. Fuchs, *Oeuvres complètes* 3, 1–31.
- [15] H. WITTICH, Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung, *Math. Ann.*, 127 (1954), 433–450.
- [16] K. YOSIDA, A generalisation of a Malmquist's theorem, *Japan. J. Math.*, 9 (1933), 253–256.

Manuscrit reçu le 6 novembre 2000,
accepté le 26 février 2001.

Ivan PAN, Marcos SEBASTIANI,
UFRGS
Instituto de Matemática
Av. Bento Gonçalves 9500
91501-970 Porto Alegre, RS (Brasil).
pan@mat.ufrgs.br