



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Anne PICHON

Fibrations sur le cercle et surfaces complexes

Tome 51, n° 2 (2001), p. 337-374.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_2_337_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

FIBRATIONS SUR LE CERCLE ET SURFACES COMPLEXES

par Anne PICHON

Introduction.

On s'intéresse à deux situations classiques en géométrie complexe :

1) Σ est une surface complexe lisse et $f : \Sigma \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ une famille dégénérée de courbes complexes, c'est-à-dire une fonction holomorphe propre dont la seule valeur critique éventuelle est 0. Considérons la 3-variété $M_f := f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^1)$, où \mathbb{S}_η^1 désigne un petit cercle de rayon $\eta \ll 1$ centré en l'origine de \mathbb{C} . La classe d'homéomorphisme de M_f , indépendante de η , s'appelle le bord de f .

2) Z est une surface complexe normale et $g : (Z, p) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de fonction analytique à singularité isolée en $p \in Z$. Notons M_Z le bord de Z , i.e. la 3-variété, définie à homéomorphisme près, obtenue en plongeant Z dans \mathbb{C}^N et en l'intersectant avec une petite sphère de rayon ϵ centrée en p . D'autre part, notons L_g l'entrelacs dans M_Z obtenu en intersectant $g^{-1}(0)$ avec cette même sphère. La classe d'homéomorphisme du couple (M_Z, L_g) , indépendante de ϵ , s'appelle le bord de g .

Dans [Wi], G. Winters donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 3-variété orientée donnée se réalise comme bord d'une famille

Mots-clés : Surfaces complexes normales – Germes de courbes complexes – Familles dégénérées de courbes complexes – Variétés de Seifert – Variétés de Waldhausen – Fibrations sur le cercle.

Classification math. : 14J17 – 32S25 – 32S50 – 32S55 – 57M99 – 57R35.

dégénérée de courbes complexes. Dans [G], Grauert donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 3-variété orientée se réalise comme bord d'une surface complexe normale. Dans le présent article, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couple (M, L) , où M désigne une 3-variété orientée et L un entrelacs dans M , se réalise comme bord d'un germe de fonction analytique à singularité isolée en un point d'une surface complexe normale (Théorème 5.4 et Corollaire 5.5). Ce résultat repose sur l'étude préliminaire d'une situation topologique plus générale qui fait l'objet des 4 premiers paragraphes.

Une variété de Waldhausen est une variété de dimension 3 tel qu'il existe une famille finie \mathcal{T} de tores plongée dans M , dite famille séparatrice, dont le complémentaire est la réunion disjointe de variétés munies de fibrations de de Seifert, *i.e.* de feuilletages en cercles tel que toute feuille (ou fibre de Seifert) possède un voisinage saturé.

Le bord d'une famille dégénérée de courbes complexes f est une variété de Waldhausen. De plus, l'application $\Phi_f : M_f \rightarrow \mathbb{S}_\eta^1$, restriction de f à M_f est une fibration localement triviale dont les fibres sont transverses aux tores de la famille séparatrice et aux fibres de Seifert. De la même manière, le bord M_Z d'un germe de surface complexe normale (Z, p) est une variété de Waldhausen, et l'entrelacs L_g associé à un germe analytique $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée est la réunion d'un nombre fini de fibres de Seifert. De plus la fibration de Milnor $\Phi_g : M_Z \setminus L_g \rightarrow \mathbb{S}^1$, définie par $\Phi_g(z) = g(z)/|g(z)|$, est une fibration en livre ouvert de reliure L_g transverse sur $M_Z \setminus L_g$ aux tores de séparation et aux fibres de Seifert.

Dans cet esprit, nous appelons entrelacs de Waldhausen un couple (M, L) où M est une variété de Waldhausen et où L est la réunion d'un nombre fini de fibres de Seifert dans le complémentaire d'une famille séparatrice de M (éventuellement $L = \emptyset$). Nous disons que (M, L) est fibré horizontalement s'il existe une fibration localement triviale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ en livre ouvert de reliure L , dont les surfaces fibres sont connexes et transverses à la famille séparatrice et aux fibres de Seifert.

Nous donnons une classification topologique des fibrations horizontales $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ d'un entrelacs de Waldhausen donné (M, L) sous la forme d'un algorithme (4.8) qui permet de dresser la liste explicite de ces fibrations à équivalence topologique près, c'est-à-dire à conjugaison près de Φ par des homéomorphismes $H : (M, L) \rightarrow (M, L)$ et $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ préservant les orientations.

Ce résultat s'appuie sur une étude de la monodromie de ces fibrations. Plus précisément, soit \mathcal{F} une fibre d'une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \longrightarrow \mathbb{S}^1$, soit \mathcal{T} la famille séparatrice de M , et soient V_1, \dots, V_m les variétés de Seifert, composantes connexes du complémentaire dans M d'un petit voisinage régulier de \mathcal{T} . La monodromie de Φ possède des représentants quasi-périodiques $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui coïncident sur les intersections $\mathcal{F} \cap V_\nu$ avec le premier retour des fibres de Seifert.

Les difféomorphismes quasi-périodiques de surface sont classés à isotopie et conjugaison près par leur graphe de Nielsen, introduit par [Ni1] et complété par [C], dont nous rappelons la définition au paragraphe 3. Le résultat technique essentiel de cet article est le lemme 4.4, qui décrit les relations entre la topologie de la paire (M, L) , caractérisée par son graphe de Waldhausen $G(M, L)$ (paragraphe 1), et le graphe de Nielsen de la monodromie d'une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \longrightarrow \mathbb{S}^1$. De plus, nous remarquons (Lemme 4.5), que la classe d'équivalence topologique de Φ est caractérisée par le graphe de Nielsen de sa monodromie. Par suite, l'algorithme 4.8 permet de décrire les classes d'équivalence topologique des fibrations horizontales $\Phi : M \setminus L \longrightarrow \mathbb{S}^1$ en dressant la liste des graphes de Nielsen de leurs monodromies.

L'étape cruciale de cet algorithme consiste à trouver le multi-ordre d'un représentant quasi-périodique $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ de la monodromie, *i.e.* la suite finie des ordres des restrictions de h aux intersections $V_\nu \cap \mathcal{F}$. En utilisant le lemme 4.4, nous démontrons que ces multi-ordres sont solutions d'un système linéaire, que nous appelons système monodromique, dont les coefficients dépendent uniquement de la topologie de la paire (M, L) et d'un choix d'orientation de ses fibres de Seifert (Théorème 4.3.1).

Dans les deux situations complexes décrites ci-dessus, la monodromie de la fibration horizontale Φ_f (resp. Φ_g) est à torsades (*i.e.* twists de Dehn) négatives (Théorèmes 5.2.1 et 5.4.1). En utilisant la classification précédente et la caractérisation des familles dégénérées de courbes complexes de G. Winters, nous obtenons :

THÉORÈME 5.2. — 2) *Soit M une variété de Waldhausen. Il existe une famille dégénérée de courbes complexes dont M est le bord si et seulement si il existe une fibration horizontale $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives.*

La liste complète des fibrations horizontales $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives peut être explicitement obtenue

par l'algorithme 4.8. Le théorème 5.2 affirme que si cette liste est non vide, au moins une des fibrations horizontales qu'elle contient se réalise à équivalence topologique près comme fibration associée à une famille dégénérée de courbes complexes. Un résultat annoncé dans [ES] (Théorème 3 et remarque 1 page 91), et indépendamment dans [MM1] (Corollaire 1.2) (voir aussi [I], Théorème 4.4) a pour conséquence qu'elles se réalisent en fait toutes. La démonstration de ce résultat est disponible sous la forme d'un preprint ([MM2]).

THÉOREME 5.4. — 2) *Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen tel que $L \neq \emptyset$. Il existe une surface complexe normale Z et un germe analytique $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée en $p \in Z$ dont (M, L) est le bord si et seulement si il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives.*

Le corollaire 5.5 exprime cette condition en termes de graphes de plombages.

Comme précédemment, la liste complète de ces fibrations horizontales Φ peut être explicitement obtenue par l'algorithme 4.8, et le théorème 5.4 affirme que si cette liste est non vide, au moins une des fibrations horizontales qu'elle contient se réalise à équivalence topologique près comme fibration de Milnor d'un germe de fonction analytique. Le résultat annoncé dans [ES] et [MM1] et la démonstration du théorème 5.4 ont pour conséquence qu'elles se réalisent en fait toutes.

1. Entrelacs de Waldhausen.

Une 3-variété V compacte connexe orientée est dite seifertique s'il existe sur V un feuilletage en cercles tel que toute feuille possède un voisinage tubulaire saturé en feuilles. V est une variété de Seifert si l'on s'est fixé un tel feuilletage. Dans cet article, toutes les variétés de Seifert considérées sont à base (*i.e.* espace des feuilles) orientable.

Dans l'esprit de [LMW], nous appelons variété de Waldhausen une variété M de dimension 3 différentiable compacte connexe orientée telle qu'il existe une famille finie de tores \mathcal{T} plongée dans M vérifiant la condition suivante : si $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ désigne un petit voisinage régulier ouvert de \mathcal{T} dans M , $M \setminus \mathcal{U}(\mathcal{T})$ est la réunion disjointe de variétés seifertiques. Une telle famille de tores s'appelle une *famille séparatrice* de M . Une décomposition

de Waldhausen de M est la donnée d'une famille séparatrice \mathcal{T} et d'une fibration de Seifert sur chaque composante connexe de $M \setminus \mathcal{U}(\mathcal{T})$.

DÉFINITION 1.1. — *Un entrelacs de Waldhausen est un couple (M, L) où M est une variété de Waldhausen orientée sans bord et où L est une union finie, éventuellement vide, de fibres de Seifert d'une décomposition de Waldhausen de M . Une telle décomposition de Waldhausen de M s'appelle une décomposition de Waldhausen de (M, L) .*

Conventions. — Dans cet article, nous avons pris le parti de ne considérer que des variétés de Seifert à base orientable. Cette restriction est motivée par le fait que l'existence d'une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ pour un entrelacs de Waldhausen (M, L) impose que les composantes de Seifert de M soient toutes à base orientable, puisque M est orientée.

De plus, dans toute la suite, nous écartons les cas dégénérés suivants :

1) M est un espace lenticulaire et $L \subset (b_1 \cup b_2)$, où b_1 et b_2 désignent les deux âmes d'une décomposition de M comme union de deux tores pleins.

2) M est un fibré en tores sur le cercle et $L = \emptyset$.

Dans ces deux situations, les éventuelles fibrations $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ ont des fibres de caractéristiques d'Euler positives, alors que les méthodes développées plus loin concernent des fibres de caractéristiques d'Euler strictement négatives. D'autre part, dans le cas 1), il n'y a pas unicité à isotopie près de la fibration de Seifert de M dont L est réunion de fibres. Ces deux situations peuvent être traitées spécifiquement.

Ces conventions impliquent le résultat suivant par des arguments analogues à ceux de [LMW] :

PROPOSITION 1.2. — *Un entrelacs de Waldhausen (M, L) admet à isotopie près une unique décomposition de Waldhausen minimale, c'est-à-dire vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Soit \mathcal{T} la famille séparatrice; les fibres de Seifert de part et d'autre d'un tore T de \mathcal{T} ne sont pas homologues sur T .*

(ii) *Soit $\mathcal{U}(L)$ un petit voisinage tubulaire ouvert de L dans $M \setminus \mathcal{U}(\mathcal{T})$. Aucune composante connexe de $M \setminus [\mathcal{U}(\mathcal{T}) \cup \mathcal{U}(L)]$ n'est un tore plein (i.e. un produit disque \times cercle) ni un tore épaissi (i.e. un produit tore \times intervalle).*

Exemple. — Le bord d'un germe analytique de courbe plane $g : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ à singularité isolée en l'origine est un entrelacs de Waldhausen (\mathbb{S}_e^3, L_g) dont la décomposition minimale est décrite dans [LMW]

en fonction de l'arbre de la résolution minimale du germe g , et dans [EN] sous la forme d'un entrelacs torique itéré.

Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen muni de sa décomposition minimale $M \setminus \mathcal{U}(T) = \coprod_{\nu=1}^m V_\nu$. Fixons sur chaque variété de Seifert V_ν une orientation des fibres de Seifert. Par analogie avec le graphe construit dans [Wa] pour les variétés graphées réduites, on définit le *graphe de Waldhausen* $G(M, L)$ de (M, L) associé à la décomposition minimale et à ce choix d'orientation de la façon suivante :

1) Les sommets (resp. les arêtes) de $G(M, L)$ sont en bijection avec les variétés de Seifert V_ν (resp. les tores de T) de telle façon que pour $T \in \mathcal{T}$ et pour $\nu, \nu' \in \{1, \dots, m\}$, l'arête associée à T joint les sommets ν et ν' de $G(M, L)$ si et seulement si $\partial \overline{\mathcal{U}(T)} = \overline{\mathcal{U}(T)} \cap (V_\nu \cup V_{\nu'})$, où $\mathcal{U}(T)$ désigne la composante connexe de $\mathcal{U}(T)$ qui contient T .

2) Chaque arête est orientée arbitrairement puis pondérée par le triplet normalisé $(\alpha, \beta, \epsilon)$ défini comme dans [Wa] (voir aussi [N] page 322) de la façon suivante : soit T un tore de séparation entre les composantes de Seifert V_ν et $V_{\nu'}$, soient $T_i \subset V_\nu$ et $T'_i \subset V_{\nu'}$ les deux tores, composantes de bord de $\mathcal{U}(T)$, munis des orientations induites respectivement par V_ν et $V_{\nu'}$. Soit b_i (resp. b'_i) une fibre de Seifert de V_ν sur T_i (resp. de $V_{\nu'}$ sur T'_i) et soit a_i (resp. a'_i) une courbe orientée sur T_i (resp. T'_i) telle que $a_i \cdot b_i = +1$ dans $H_1(T_i, \mathbb{Z})$ (resp. $a'_i \cdot b'_i = +1$ dans $H_1(T'_i, \mathbb{Z})$). Soit $h : T_i \rightarrow T'_i$ un homéomorphisme renversant l'orientation, induit par la structure produit de $\overline{\mathcal{U}(T)}$. Il existe d'uniques entiers $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, $\alpha_i > 0$ et $\beta_i, \beta'_i \in \mathbb{Z}$ tels que $\epsilon_i h^{-1}(b'_i) = \alpha_i a_i + \beta_i b_i$ dans $H_1(T_i, \mathbb{Z})$ et $\epsilon_i h(b_i) = \alpha_i a'_i + \beta'_i b'_i$ dans $H_1(T'_i, \mathbb{Z})$.

De plus, il existe à homologie près un unique choix des courbes a_i et a'_i pour lequel ces entiers sont normalisés, ie $0 \leq \beta_i < \alpha_i$ et $0 \leq \beta'_i < \alpha_i$. Si $\alpha_i > 1$, les entiers β_i et β'_i se déduisent l'un de l'autre par la relation $\beta_i \beta'_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$.

Alors si l'arête de $G(M, L)$ est orientée de ν_i vers ν , on la pondère par le triplet normalisé $(\alpha_i, \beta_i, \epsilon_i)$, comme sur la figure 1. Sinon, on la pondère par le triplet normalisé $(\alpha_i, \beta'_i, \epsilon_i)$.

3) Pour chaque fibre de Seifert de $L \cap V_\nu$ (resp. pour chaque fibre exceptionnelle de V_ν qui n'est pas composante de L) on attache au sommet ν une flèche (resp. une tige), dont on pondère l'extrémité, comme sur la figure 1, par le couple d'invariants de Seifert normalisé (α_i, β_i) dont nous rappelons la définition : soit N_i un petit voisinage tubulaire saturé de la

fibre de Seifert de V_ν indexée par i ($i \in \{1, \dots, d'\}$), et soit b_i une fibre de Seifert sur le tore ∂N_i . On munit le tore ∂N_i de l'orientation induite par celle de $V_\nu \setminus N_i$, et on choisit sur ∂N_i une courbe orientée a_i telle que $a_i \cdot b_i = +1$ dans $H_1(\partial N_i, \mathbb{Z})$. Il existe alors un unique couple d'entiers (α_i, β_i) tel que $\alpha_i a_i + \beta_i b_i = 0$ dans $H_1(N_i, \mathbb{Z})$. De plus, il existe à homologie près un unique choix de la courbe a_i pour lequel ces entiers sont normalisés, i.e. $0 \leq \beta_i < \alpha_i$.

4) Enfin, chaque sommet ν est pondéré par le genre g_ν de la base de V_ν et par la classe d'Euler rationnelle $e_0(\nu)$ définie comme suit : soit V un tore plein saturé dans $V_\nu \setminus \coprod_{i=1}^{d'} N_i$ et soit b une fibre de Seifert sur V . Soit F une surface dans $V_\nu \setminus \coprod_{i=1}^{d'} N_i$ transverse à toutes les fibres de Seifert et dont le bord est la réunion des d courbes a_i définies précédemment et de la courbe $a = F \cap T$. Munissons F de l'orientation compatible avec celle des a_i , puis orientons a comme composante du bord de F . Considérons l'entier e_ν défini par $a - e_\nu b = 0$ dans $H_1(V, \mathbb{Z})$. On pose

$$e_0(\nu) = e_\nu - \sum_{i=1}^d \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

En fait, $e_0(\nu)$ est la classe d'Euler rationnelle (voir [Ga]) de la variété de Seifert sans bord obtenue à partir de V_ν par chirurgie de Dehn le long des fibres de Seifert b'_i des variétés adjacentes V_{ν_i} .

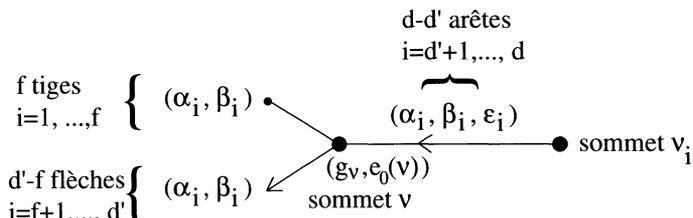


Figure 1

Remarque. — De la même façon, on peut définir un graphe de Waldhausen pour toute décomposition de Waldhausen de (M, L) , même non minimale. Cette généralisation sera utilisée au paragraphe 5.

Deux graphes de Waldhausen G et G' sont dits *isomorphes* s'il existe une application de G sur G' qui envoie bijectivement les sommets (resp. les arêtes, resp. les tiges, resp. les flèches) de G sur les sommets (resp. les arêtes, resp. les tiges, resp. les flèches) de G' , qui respecte les pondérations

des sommets, des flèches et des tiges, et telle que si σ est une arête de G pondérée par $(\alpha, \beta, \epsilon)$, l'arête $H(\sigma)$ de G' est pondérée par $(\alpha, \beta, \epsilon)$ si H respecte les orientations des arêtes σ et $H(\sigma)$, et par $(\alpha, \beta', \epsilon)$ sinon. Un entrelacs de Waldhausen (M, L) à fibres de Seifert orientées admet à isomorphisme près un unique graphe de Waldhausen.

Les conventions adoptées précédemment permettent de déduire de ([Wa], 9.4) le résultat suivant.

PROPOSITION 1.3. — *Soient (M, L) et (M', L') deux entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées. Il existe un homéomorphisme $H : (M, L) \rightarrow (M', L')$ préservant l'orientation des variétés M et M' et de chaque fibre de Seifert si et seulement si les graphes de Waldhausen de (M, L) et de (M', L') sont isomorphes.*

Un changement d'orientation des fibres de Seifert de V_ν entraîne un changement de signe des entiers ϵ des arêtes qui relient le sommet ν de $G(M, L)$ à un sommet distinct de ν . Nous appelons ϵ -opération une telle modification du graphe $G(M, L)$.

COROLLAIRE 1.4. — *Soient (M, L) et (M', L') deux entrelacs de Waldhausen. Il existe un homéomorphisme $H : (M, L) \rightarrow (M', L')$ préservant l'orientation des variétés M et M' si et seulement si on peut passer d'un graphe de Waldhausen de (M, L) à un graphe de Waldhausen de (M', L') par un isomorphisme suivi d'un nombre fini de ϵ -opérations.*

2. Entrelacs de Waldhausen fibrés horizontalement.

DÉFINITION 2.1. — *Soit M une variété de dimension 3 compacte connexe et orientée, et soit L une union finie disjointe de cercles plongée dans M . On dit qu'une fibration localement triviale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ munit M d'une décomposition en livre ouvert de reliure L si pour toute composante connexe K de L , il existe un voisinage tubulaire $\mathcal{U}(K)$ de K dans $M \setminus (L \setminus K)$ et une trivialisatoin $\delta : \overline{\mathcal{U}(K)} \rightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathcal{U}(K)} \setminus K & \xrightarrow{\delta} & (\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^1 \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow g \\
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{id_{\mathbb{S}^1}} & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

où $g : (\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est défini par $g(z, t) = \frac{z}{|z|}$.

DÉFINITION 2.2. — Un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement est un triplet (M, L, Φ) où (M, L) est un entrelacs de Waldhausen et où $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une fibration localement triviale de fibre connexe qui munit M d'une décomposition en livre ouvert de reliure L de telle façon que les conditions suivantes soient respectées :

1) Soit \mathcal{T} la famille séparatrice minimale de (M, L) . Les fibres de Φ sont transverses aux tores de \mathcal{T} et aux fibres de Seifert de $M \setminus \mathcal{U}(\mathcal{T})$.

2) Orientons les fibres de Seifert par le flot qui provient d'un relevé par la fibration Φ du champ de vecteurs tangents canonique sur \mathbb{S}^1 . D'autre part, orientons les fibres de Φ de telle sorte que l'orientation de M soit obtenue en prenant l'orientation des fibres de Φ suivie de l'orientation des fibres de Seifert. L'orientation de L comme bord d'une fibre de Φ coïncide avec l'orientation de L comme union de fibres de Seifert.

Remarques. — Avec les conventions adoptées au paragraphe 1, la condition 1) implique que la caractéristique d'Euler de la fibre \mathcal{F} de Φ est strictement négative, i.e. que \mathcal{F} n'est ni un tore, ni un disque, ni un anneau. Réciproquement, si on impose $\chi(\mathcal{F}) < 0$, alors cette condition de transversalité est automatiquement réalisée à isotopie près, excepté dans les morceaux de Seifert homéomorphes à des variétés Q de Waldhausen.

En fait, la condition 1) est réalisée si et seulement si une fibre de ϕ est transverse à la décomposition de Waldhausen.

Dans la suite, les orientations des fibres de Φ seront toujours celles décrites dans la condition 2). Un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement est donc en particulier un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées.

La définition suivante s'inspire de la notion d'équivalence topologique pour les familles dégénérées de courbes complexes définie dans [MM1].

DÉFINITION 2.3. — Deux entrelacs de Waldhausen fibrés horizontalement (M, L, Φ) et (M', L', Φ') sont dits topologiquement équivalents s'il existe deux homéomorphismes $H : (M, L) \rightarrow (M', L')$ et $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ respectant les orientations et tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 M \setminus L & \xrightarrow{H|_{M \setminus L}} & M' \setminus L' \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi' \\
 \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

3. Difféomorphismes quasi-périodiques.

Soit \mathcal{F} une surface compacte connexe orientée de caractéristique d'Euler strictement négative. Un difféomorphisme $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ préservant l'orientation de \mathcal{F} est dit *quasi-périodique* s'il existe une famille \mathcal{C} de courbes fermées simples et disjointes sur \mathcal{F} telle que la restriction de h au complémentaire d'un petit voisinage régulier $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} dans \mathcal{F} soit périodique. Une telle famille \mathcal{C} s'appelle un *système de courbes de réduction* de h . On dit aussi qu'une classe de difféotopie de \mathcal{F} admet \mathcal{C} pour système de courbes de réduction si elle contient un tel difféomorphisme quasi-périodique h .

Soit maintenant (M, L, Φ) un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement et soit \mathcal{F} une fibre de Φ . On appelle *monodromie* de Φ la classe de conjugaison dans le groupe des difféotopies de \mathcal{F} d'un difféomorphisme $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, premier retour d'un flot transverse aux fibres de Φ . Cette classe est indépendante du choix du flot transverse. Un tel difféomorphisme h s'appelle un *représentant de la monodromie*.

La monodromie d'un entrelacs de Waldhausen (M, L, Φ) possède des représentants quasi-périodiques. En effet, considérons une décomposition de Waldhausen de (M, L) transverse aux fibres de Φ . Soit \mathcal{T} sa famille séparatrice. Le difféomorphisme de premier retour des fibres de Seifert de $M \setminus \mathcal{U}(\mathcal{T})$ sur une fibre \mathcal{F} de Φ s'étend en un représentant quasi-périodique de la monodromie de Φ dont un système de courbes de réduction est $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$. Nous dirons que h et cette décomposition de Waldhausen sont *associés*.

Exemple. — La fibration de Milnor $\Phi_g : \mathbb{S}_\epsilon^3 \setminus L_g \rightarrow \mathbb{S}^1$ d'un germe analytique $g : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ à singularité isolée en l'origine est une fibration horizontale du bord $(\mathbb{S}_\epsilon^3, L_g)$ de g dont un représentant quasi-périodique de la monodromie est décrit dans [DBM] en fonction de l'arbre de la résolution minimale du germe g .

Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique. Une courbe c d'un système de courbes de réduction \mathcal{C} de h est dite *amphidrome* s'il existe un entier v tel que $h^v(\vec{c}) = -\vec{c}$, où \vec{c} désigne la courbe c munie d'une orientation. Le système de courbes de réduction $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ de la monodromie de (M, L, Φ) décrit ci-dessus est sans axe amphidrome. Pour le problème qui nous intéresse, il est commode de ne considérer que des systèmes de courbes de réduction dont aucune courbe n'est amphidrome, quitte à effectuer la transformation suivante : on modifie h par une isotopie

au voisinage de chaque courbe amphidrome c de \mathcal{C} de telle façon que la restriction de h^v à un petit voisinage régulier $\mathcal{U}(c)$ de c soit conjuguée au difféomorphisme de l'anneau $[-1, +1] \times \mathbb{S}^1$ défini par $(s, z) \mapsto (-s, \bar{z})$. Cette opération remplace dans le système de courbes de réduction la courbe c par les deux composantes de bord de l'anneau $\mathcal{U}(c)$. Le nouveau système de courbes de réduction ne contient pas de courbe amphidrome.

Soit \mathcal{C} un système de courbes de réduction de h avec éventuellement des courbes amphidromes. Notons N le plus petit entier positif tel que $h^N|_{\mathcal{F} \setminus \mathcal{U}(c)} = id|_{\mathcal{F} \setminus \mathcal{U}(c)}$. Soit c une courbe de \mathcal{C} . La restriction de h^N à l'adhérence $\overline{\mathcal{U}(c)}$ de $\mathcal{U}(c)$ est un twist de Dehn que l'on caractérise par un nombre rationnel t : soit $\mu : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \overline{\mathcal{U}(c)}$ une trivialisatation de l'anneau $\overline{\mathcal{U}(c)}$ telle que $\mu(\mathbb{S}^1 \times \{\frac{1}{2}\}) = c$. Considérons le chemin orienté δ de $\overline{\mathcal{U}(c)}$ défini par $\delta(s) := \mu(x, s)$, où x est fixé sur \mathbb{S}^1 et où s parcourt $[0, 1]$, et orientons c de telle sorte que $\delta.c = +1$ dans $\overline{\mathcal{U}(c)}$. Alors il existe un unique nombre rationnel t , appelé *torsade* de h au voisinage de la courbe c , tel que les cycles Ntc et $h^N \delta - \delta$ soient homologues dans $\overline{\mathcal{U}(c)}$.

Un système de courbes de réduction \mathcal{C} de h est dit *minimal au sens de Wu* si aucune courbe de \mathcal{C} n'est homotope à 0, à une composante de bord de \mathcal{F} , ou à une autre courbe de \mathcal{C} , et si les torsades au voisinage des courbes de \mathcal{C} sont toutes non nulles. Une classe de difféotopie H de \mathcal{F} possède à isotopie près un unique système minimal de courbes de réduction ([Wu], Théorème 1). Mais il se peut que ce système admette des courbes amphidromes. C'est pourquoi nous adoptons la définition suivante : nous appelons système *minimal* de courbes de réduction de H le système sans courbe amphidrome obtenu à partir du système de courbes de réduction minimal au sens de Wu en éliminant les courbes amphidromes par le procédé décrit ci-dessus.

En particulier, le système minimal de courbes de réduction de la monodromie d'une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ est l'intersection de la famille séparatrice minimale de (M, L) avec une fibre de Φ .

Nous allons définir à partir des travaux de J. Nielsen un invariant à conjugaison et isotopie près des difféomorphismes quasi-périodiques de surface : le graphe de Nielsen. Nous reprenons les définitions et certains résultats de [Ni1] et [Ni2].

Soit F une surface compacte connexe orientée et soit $\tau : F \rightarrow F$ un difféomorphisme périodique d'ordre n qui préserve l'orientation de F . La projection naturelle $\pi : F \rightarrow O$ sur l'espace des orbites de τ est un revêtement à n feuilletts ramifié au-dessus d'un nombre fini d'orbites dites *exceptionnelles*. Soient D_1, \dots, D_f des disques ouverts deux à deux disjoints

voisins des orbites exceptionnelles et soit $\check{O} = O \setminus \coprod_{i=1}^f D_i$. À chaque courbe fermée simple orientée Γ sur O on associe un triplet (m, λ, σ) appelé *valence* de Γ défini comme suit : m est le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(\Gamma)$ et $\lambda = \frac{n}{m}$. Considérons l'homomorphisme $\rho : H_1(\check{O}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associé au revêtement π au-dessus de \check{O} . σ est l'entier défini modulo λ , premier à λ , tel que $\rho([\Gamma]) = m\sigma$.

Orientons O comme F via π . Pour $i \in \{1, \dots, f\}$, la valence de l'orbite exceptionnelle indexée par i est par définition la valence de la courbe ∂D_i orientée comme composante de bord de \check{O} .

Nous appelons *graphe de Nielsen* de τ le graphe noté $\mathcal{G}(\tau)$ représenté sur la figure 2. Ce graphe, constitué d'un unique sommet auquel sont attachées des "tiges" et des "tiges-bord" qui représentent respectivement les orbites exceptionnelles et les composantes de bord de O , est pondéré par les informations numériques suivantes :

n , l'ordre de τ

g , le genre de O

$(m_i, \lambda_i, \sigma_i)$, $i = 1, \dots, f$, les valences des f orbites exceptionnelles de O

$(m_i, \lambda_i, \sigma_i)$, $i = f + 1, \dots, d$, les valences des $f - d$ composantes de bord de O orientées comme bord de O .

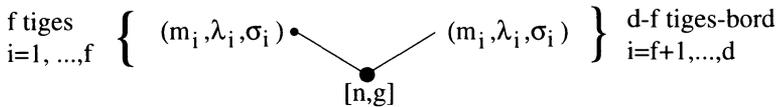


Figure 2

Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique et soit \mathcal{C} un système de courbes de réduction de h . Quitte à modifier h par une isotopie, on peut supposer que \mathcal{C} est minimal. Soit \mathcal{G}_h le graphe défini comme suit : les sommets (resp. les arêtes) de \mathcal{G}_h sont en bijection avec les composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}$ (resp. avec les courbes de \mathcal{C}) de telle façon que si F et F' désignent des composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}$ et c une courbe de \mathcal{C} , l'arête $A(c)$ de \mathcal{G}_h joint les sommets $S(F)$ et $S(F')$ si et seulement si $c \subset \overline{F} \cap \overline{F}'$.

Soit $\overline{\mathcal{G}}_h$ le graphe quotient de l'action induite par h sur le graphe \mathcal{G}_h . Le graphe de Nielsen $\mathcal{G}(h)$ du difféomorphisme h est alors construit à partir de $\overline{\mathcal{G}}_h$ de la façon suivante.

Soit ν un sommet de $\overline{\mathcal{G}}_h$ et soit r_ν le nombre de composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{U}(\mathcal{C})$ représentées par ν . Le difféomorphisme h permute cycliquement ces r_ν composantes connexes, et si F_ν désigne l'une d'elles, le difféomorphisme $h_\nu = h|_{F_\nu}^{r_\nu}$ est un difféomorphisme périodique de F_ν . Pour chaque sommet ν de $\overline{\mathcal{G}}_h$, on construit le graphe de Nielsen $\mathcal{G}(h_\nu)$, et on complète la pondération de son sommet par l'entier r_ν .

Pour chaque arête A de $\overline{\mathcal{G}}_h$ d'extrémités ν et ν' (éventuellement $\nu = \nu'$), on effectue l'opération suivante : soit c une courbe de \mathcal{C} représentée par A , soit t la torsade de h au voisinage de c , et soit $\mathcal{U}(c)$ la composante connexe de $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ voisinage de c . Les composantes de bord de l'anneau $\mathcal{U}(c)$ sont représentées par deux tiges-bord distinctes, T et T' , appartenant respectivement aux graphes $\mathcal{G}(h_\nu)$ et $\mathcal{G}(h_{\nu'})$. On construit une arête joignant les sommets de $\mathcal{G}(h_\nu)$ et $\mathcal{G}(h_{\nu'})$ en attachant les tiges-bord T et T' par leurs extrémités, puis on pondère le milieu de cette arête par la torsade t (figure 3).

Ce qui achève la construction du graphe $\mathcal{G}(h)$.

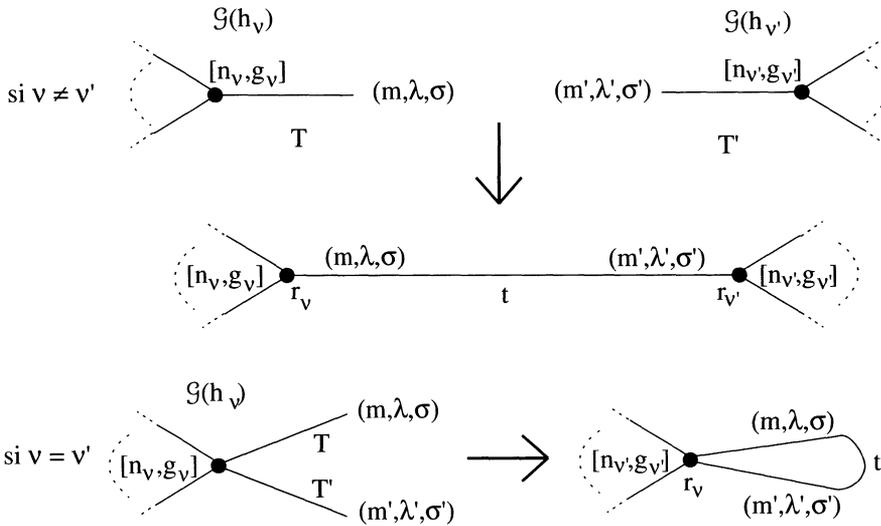


Figure 3

PROPOSITION 3.1. — a) Un graphe \mathcal{G} pondéré par des entiers comme sur la figure 2 est graphe de Nielsen d'un difféomorphisme quasi-périodique de surface connexe si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$$(P1) \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad m_i \lambda_i = n \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(\lambda_i, \sigma_i) = 1$$

(P2) Notons \check{O} une surface de genre g admettant d composantes de bord $C_i, i = 1, \dots, d$. Il existe un homomorphisme surjectif $\rho : H_1(\check{O}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que

$$i) \forall i \in \{1, \dots, d\}, \rho([C_i]) = m_i \sigma_i$$

$$ii) \sum_{i=1}^d \sigma_i m_i \equiv 0[n].$$

b) Un graphe \mathcal{G} pondéré comme ci-dessus est graphe de Nielsen d'un difféomorphisme quasi-périodique de surface connexe si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

(QP1) Soit ν un sommet de \mathcal{G} comme sur la figure 4. Alors le graphe représenté sur la figure 5 est graphe de Nielsen d'un difféomorphisme périodique.

Considérons une arête de \mathcal{G} comme sur la figure 3. Alors

$$(QP2) \frac{nr}{\lambda} = \frac{n'r'}{\lambda'}, \text{ppcm}(nr, n'r')t \in \mathbb{Z}$$

$$(QP3) \text{pgcd}(r_\nu, \nu \text{ sommet de } \mathcal{G}) = 1.$$

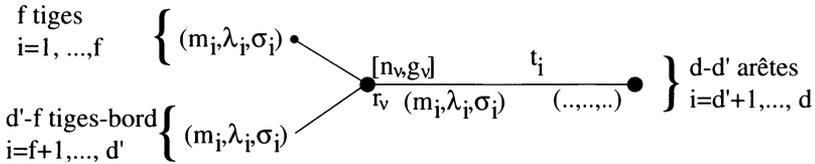


Figure 4

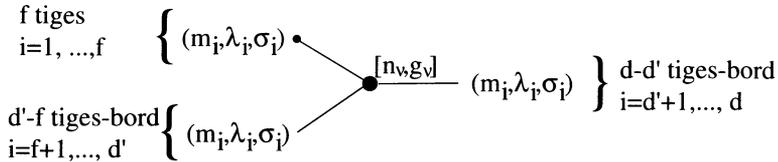


Figure 5

Preuve. — a) Les conditions (P1) et (P2) sont nécessaires d'après ce qui précède. Supposons ces conditions réalisées. Soit $\tilde{\pi} : \check{F} \rightarrow \check{O}$ un revêtement vérifiant la condition (P2), et soit $\tilde{\tau} : \check{F} \rightarrow \check{F}$ le générateur canonique du groupe de Galois de $\tilde{\pi}$. Notons F la surface obtenue en collant des disques le long des composantes de bord $\tilde{\pi}^{-1}(C_i), i = 1, \dots, f$, et étendons le difféomorphisme périodique $\tilde{\tau}$ en un difféomorphisme périodique $\tau : F \rightarrow F$. Alors τ admet \mathcal{G} pour graphe de Nielsen.

b) Supposons que \mathcal{G} soit le graphe de Nielsen d'un difféomorphisme quasi-périodique $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. La condition (QP1) est immédiatement nécessaire. L'entier $\frac{nr}{\lambda} = \frac{n'r'}{\lambda'}$ est le nombre de courbes de réduction de h représentées par l'arête. Soit c l'une de ces courbes et soit δ un petit arc orienté dans l'anneau $\overline{\mathcal{U}(c)}$ transverse à c comme dans la définition de t . $\xi = \text{ppmc}(nr, n'r')$ est le plus petit entier tel que le difféomorphisme h^ξ soit l'identité sur le bord de $\overline{\mathcal{U}(c)}$; en particulier, $h^\xi \delta - \delta$ est un cycle dans $\overline{\mathcal{U}(c)}$ homologue à $\xi t c$, et donc ξt est un entier. Enfin, la condition (QP3) traduit la connexité de la surface \mathcal{F} .

Un argument analogue à celui de a) permet de montrer que les conditions (QP1), (QP2) et (QP3) sont suffisantes.

Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique. D'après [Ni2], le graphe $\mathcal{G}(h)$ est un invariant de la classe de conjugaison de h dans le groupe des difféotopies de \mathcal{F} . En fait, cet invariant est incomplet ([MM1]), mais dans [C], N. Chavez définit un invariant $\omega(h)$ qui complète $\mathcal{G}(h)$. Il s'agit d'une caractérisation des rotations induites par h sur certains cycles du graphe \mathcal{G}_h inspirée par la notion de valence définie précédemment pour les courbes de \mathcal{F} .

Plus précisément, notons encore h l'automorphisme induit par h sur le graphe \mathcal{G}_h , et soit p la projection canonique de \mathcal{G}_h sur le graphe-quotient $\overline{\mathcal{G}_h}$.

On appelle *circuit de longueur n* ($n \geq 2$) d'un graphe G tout sous-graphe de G isomorphe à un graphe dont l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$ et l'ensemble des arêtes, $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n), (n, 1)\}$.

Soit \bar{c} un circuit de $\overline{\mathcal{G}_h}$. Pour chaque sommet ν de \bar{c} , soit r_ν le nombre de sommets de $p^{-1}(\nu)$. Soit m le nombre de circuits de \mathcal{G}_h dont l'image par p est \bar{c} et soit c l'un d'eux. Orientons \bar{c} , puis c comme \bar{c} via p , et choisissons un sommet s sur c . Soit $\sigma(\bar{c})$ l'entier défini modulo $r_{p(s)}/m$ tel que les $r_{p(s)}/m$ sommets de $c \cap p^{-1}(p(s))$ apparaissent dans l'ordre suivant conformément à l'orientation de c :

$$s, h^{\sigma(\bar{c})m}(s), h^{2\sigma(\bar{c})m}(s), \dots, h^{(r_{p(s)}/m - 1)\sigma(\bar{c})m}(s).$$

La classe $\omega_{\bar{c}}$ de $\sigma(\bar{c})$ modulo $\text{pgcd}(r_\nu, \nu \text{ sommet de } \bar{c})$ ne dépend que du circuit orienté \bar{c} , et non des choix de c et s ([C], 4.5). Appelons *graphe de Nielsen complet* de h et notons $\mathcal{G}_c(h)$, le graphe de Nielsen $\mathcal{G}(h)$ complété en pondérant chacun de ses circuits par \bar{c} par la classe $\omega_{\bar{c}}$.

THÉORÈME 3.2 ([C]). — Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique. Le graphe de Nielsen complet $\mathcal{G}_c(h)$ est un invariant complet de la classe de conjugaison de h dans le groupe des difféotopies de \mathcal{F} .

COROLLAIRE 3.3. — Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique de surface. Il existe à conjugaison et isotopie près un nombre fini de difféomorphismes admettant $\mathcal{G}(h)$ pour graphe de Nielsen.

4. Système monodromique d'un entrelacs de Waldhausen.

DÉFINITION 4.1. — Soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un difféomorphisme quasi-périodique, soit \mathcal{C} son système minimal de réduction, et soit ν un sommet de son graphe de Nielsen $\mathcal{G}(h)$. Notons N_ν l'ordre de la restriction de h à la réunion des composantes connexes de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{U}(\mathcal{C})$ représentées par ν . La suite d'entiers (N_ν) indexée par les sommets de $\mathcal{G}(h)$ s'appelle le multi-ordre de h ($N_\nu = n_\nu r_\nu$ dans les notations de la figure 3).

DÉFINITION 4.2. — Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées et soit $G(M, L)$ son graphe de Waldhausen. On appelle système monodromique du graphe $G(M, L)$ le système linéaire (\mathcal{S}) défini comme suit : les inconnues (resp. les équations) de (\mathcal{S}) sont en bijection avec les sommets du graphe $G(M, L)$ de telle façon que si ν désigne un sommet du graphe $G(M, L)$ comme sur la figure 6, l'équation de (\mathcal{S}) qui lui correspond relie l'inconnue X_ν aux inconnues X_{ν_i} associées à ses sommets voisins de la façon suivante :

$$e_0(\nu)X_\nu + \sum_{i=d'+1}^d \frac{1}{\epsilon_i \alpha_i} X_{\nu_i} = - \sum_{i=f+1}^{d'} \frac{1}{\alpha_i} X_{\nu_i}.$$

Soit (M, L, Φ) un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement. Il existe une bijection naturelle entre les sommets du graphe de Nielsen \mathcal{G}_Φ de sa monodromie et ceux de son graphe de Waldhausen $G(M, L)$. En particulier, le multi-ordre de la monodromie peut être indexé indifféremment par les sommets de \mathcal{G}_Φ ou de $G(M, L)$.

THÉORÈME 4.3. — 1) Soit (M, L, Φ) un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement. Le multi-ordre de sa monodromie est solution du système monodromique de son graphe de Waldhausen.

2) Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées et soit (N_ν) une solution du système monodromique de son graphe de Waldhausen à composantes entières strictement positives. Il existe à équivalence topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de fibrations horizontales $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est de multi-ordre (N_ν) .

La démonstration du théorème 4.3 repose sur le résultat technique suivant.

LEMME 4.4. — Soit (M, L, Φ) une variété de Waldhausen reliée, soit \mathcal{G}_Φ le graphe de Nielsen de sa monodromie, et soit (N_ν) son multi-ordre. Il existe un isomorphisme du graphe de Waldhausen $G(M, L)$ sur \mathcal{G}_Φ qui envoie :

- les sommets de $G(M, L)$ sur les sommets de \mathcal{G}_Φ
- les arêtes de $G(M, L)$ sur les arêtes de \mathcal{G}_Φ
- les tiges de $G(M, L)$ sur les tiges de \mathcal{G}_Φ
- les flèches de $G(M, L)$ sur les tiges-bord de \mathcal{G}_Φ .

De plus, soit ν un sommet de $G(M, L)$ comme sur la figure 6. Le sommet ν de \mathcal{G}_Φ qui lui correspond est représenté sur la figure 7. Pour chaque valence (m, λ, σ) , il existe un représentant σ dans sa classe modulo λ de telle sorte que les égalités suivantes soient réalisées :

$$(1) \quad \forall i \in \{1, \dots, f\}, \quad (\alpha_i, \beta_i) = (\lambda_i, \sigma_i)$$

$$(2) \quad \forall i \in \{f + 1, \dots, d'\}, \quad m_i = 1, \quad \lambda_i = N_\nu, \quad \text{et} \quad \alpha_i \sigma_i - N_\nu \beta_i = -1$$

$$(3) \quad \forall i \in \{d' + 1, \dots, d\},$$

$$\epsilon_i = \frac{-N_{\nu_i} t_i \lambda_i}{|-N_{\nu_i} t_i \lambda_i|}, \quad \alpha_i = |-N_{\nu_i} t_i \lambda_i|, \quad \text{et} \quad \beta_i = \epsilon_i \frac{N_{\nu_i} - N_\nu N_{\nu_i} t_i \sigma_i}{N_\nu}$$

$$(4) \quad e_0(\nu) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\sigma_i}{\lambda_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right).$$

Preuve du lemme 4.4. — Soit $M \setminus \mathcal{U}(T)$ la décomposition minimale de Waldhausen de (M, L) et soit $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un représentant quasi-périodique de la monodromie de (M, L, Φ) associé à cette décomposition. Le système minimal de réduction de h est $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cap \mathcal{T}$.

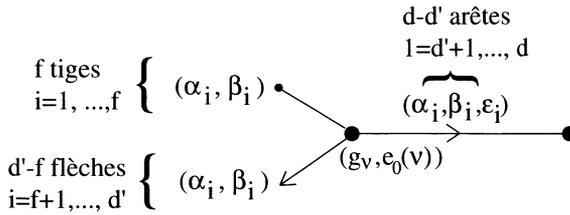


Figure 6

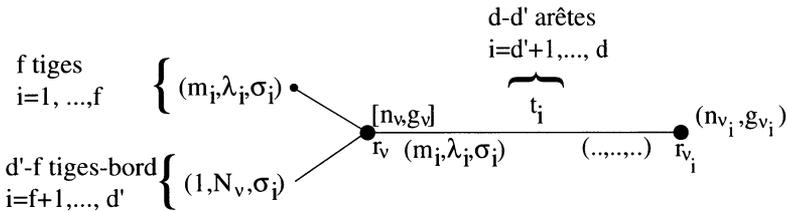


Figure 7

V_ν désignant la composante de Seifert de $M \setminus \mathcal{U}(T)$ représentée par le sommet ν de $G(M, L)$, notons $h_\nu : F_\nu \rightarrow F_\nu$ la restriction de h^{r_ν} à l'une des r_ν composantes connexes de $\mathcal{F} \cap V_\nu$, $\pi : F_\nu \rightarrow O$ la projection sur l'espace des orbites de h_ν , et $\text{inj} : F_\nu \rightarrow V_\nu$ l'inclusion naturelle de F_ν dans V_ν . La fibration de Seifert de V_ν admet O pour base, et sa projection $p : V_\nu \rightarrow O$ vérifie $\pi = p \circ \text{inj}$.

Soit Γ une courbe orientée de O de valence (m, λ, σ) et soit γ l'une des m composantes connexes de $\pi^{-1}(\Gamma)$, orientée comme Γ via π . Soit b une fibre de Seifert sur le tore $p^{-1}(\Gamma)$, et soit $s : \Gamma \rightarrow p^{-1}(\Gamma)$ une section de la fibration de Seifert p au-dessus de Γ . Orientons la courbe $a = s(\Gamma)$ comme Γ via s , puis $p^{-1}(\Gamma)$ de telle façon que $a \cdot b = +1$ dans $H_1(p^{-1}(\Gamma), \mathbb{Z})$. Par définition, le difféomorphisme h_ν est l'application de premier retour des fibres de Seifert de V_ν sur F_ν , donc la courbe γ intersecte b en λ points et, compte tenu des orientations, $\gamma \cdot b \geq 0$ dans $H_1(p^{-1}(\Gamma), \mathbb{Z})$. De plus, $\gamma \cdot a \equiv \sigma \pmod{\lambda}$. Pour un certain choix de l'entier σ dans sa classe modulo λ , nous obtenons donc

$$\textcircled{*} \quad \gamma = \lambda a + \sigma b \text{ dans } H_1(p^{-1}(\Gamma), \mathbb{Z}).$$

Soit x un point de O , et soit D un voisinage de x dans O homéomorphe à un disque ouvert, et ne contenant pas d'orbite exceptionnelle sauf

éventuellement x . Appliquons ce qui précède à la courbe $\Gamma = \partial D$ orientée comme bord de $O \setminus D$. Puisque la courbe γ est homologue à 0 dans le tore plein $p^{-1}(D)$, on déduit de $\textcircled{*}$ que la multiplicité de la fibre de Seifert $p^{-1}(x)$ est égale à λ , ce qui démontre la bijection entre les fibres exceptionnelles de V_ν et les orbites exceptionnelles de O . De plus, si x est l'orbite exceptionnelle indexée par $i \in \{1, \dots, f\}$ sur la figure 6, l'égalité $\textcircled{*}$ obtenue en choisissant la section $s_i : \Gamma_i \rightarrow p^{-1}(\Gamma_i)$ associée au couple normalisé (α_i, β_i) équivaut à (1).

Pour $i \in \{f + 1, \dots, d'\}$, appliquons maintenant l'égalité $\textcircled{*}$ à chaque courbe $\Gamma = \Gamma_i$ de ∂O de valence $(m_i, \lambda_i, \sigma_i)$ dans les notations de la figure 6 en choisissant des sections $s_i : \Gamma_i \rightarrow p^{-1}(\Gamma_i)$ associées aux couples d'invariants de Seifert normalisés (α_i, β_i) . Notons L_i la composante de L indexée par i et $\mathcal{U}(L_i)$ le voisinage tubulaire de L_i dont le bord est le tore $p^{-1}(\Gamma_i)$. Soit m_i une courbe fermée simple sur $p^{-1}(\Gamma_i)$ homologue à $\alpha_i a_i + \beta_i b_i$. Alors $m_i \cdot b_i = \alpha_i > 0$ dans $H_1(p^{-1}(\Gamma_i), \mathbb{Z})$. Or L_i , orienté comme fibre de Seifert, est homologue à γ_i dans le tore $\overline{\mathcal{U}(L_i)}$, et d'autre part, Γ_i étant orientée comme bord de O , $p^{-1}(\Gamma_i)$ est muni de l'orientation inverse de celle induite par $\overline{\mathcal{U}(L_i)}$. Donc $m_i \cdot \gamma_i < 0$ dans $H_1(p^{-1}(\Gamma_i), \mathbb{Z})$. De plus, la structure de livre ouvert impose que m_i intersecte γ_i en un unique point sur $p^{-1}(\Gamma_i)$. Nous obtenons donc $m_i \cdot \gamma_i = -1$ dans $H_1(p^{-1}(\Gamma_i), \mathbb{Z})$, qui entraîne l'égalité (2).

Pour $i \in \{d' + 1, \dots, d\}$, notons T le tore de \mathcal{T} associé à l'arête indexée par i , $\mathcal{U}(T)$ la composante connexe de $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ qui contient T , et $T_i \in V_\nu$ et $T'_i \in V_{\nu_i}$, les deux tores composantes de bord de $\mathcal{U}(T)$, orientés comme composantes de bord de V_ν et V_{ν_i} respectivement. Soit c une courbe de $\mathcal{F} \cap T$, et soit $\overline{\mathcal{U}(c)}$ la composante connexe de $\overline{\mathcal{U}(T)} \cap \mathcal{F}$ qui contient c . Orientons la courbe $\gamma_i = \overline{\mathcal{U}(c)} \cap T_i$ comme bord de F_ν puis c de telle sorte que c soit homologue à γ_i dans l'anneau $\overline{\mathcal{U}(c)}$. Fixons-nous un petit arc δ dans $\overline{\mathcal{U}(c)}$ transverse à c comme dans la définition des torsades. Alors $h^{N_\nu N_{\nu_i}} \delta - \delta$ est homologue à $N_\nu N_{\nu_i} t_i \gamma_i$ dans $\overline{\mathcal{U}(c)}$. D'autre part, soit b_i (resp. b'_i) une fibre de Seifert sur T_i (resp. T'_i), et soit $a_i = s_i(p(T_i))$ où $s_i : \Gamma_i \rightarrow T_i$ désigne une section de p associée au couple normalisé (α_i, β_i) au-dessus de la courbe $\Gamma_i = p(T_i)$. Le cycle $N_\nu b_i - N_\nu b'_i + \delta - h^{N_\nu N_{\nu_i}} \delta$ est le bord d'une 2-chaîne dans $\overline{\mathcal{U}(T)}$. Nous obtenons donc $N_\nu b'_i = N_\nu b_i - N_\nu N_{\nu_i} t_i \gamma_i$ dans $H_1(\overline{\mathcal{U}(T)}, \mathbb{Z})$, c'est-à-dire, en appliquant $\textcircled{*}$ à la courbe γ_i :

$$N_\nu b'_i = -N_\nu N_{\nu_i} t_i \lambda_i a_i + (N_{\nu_i} - N_\nu N_{\nu_i} t_i \sigma_i) b_i \text{ dans } H_1(\overline{\mathcal{U}(T)}, \mathbb{Z}),$$

qui équivaut à (3).

Dans O , soient D_1, \dots, D_f des disques ouverts deux à deux disjoints voisins des fibres exceptionnelles et soit $\tilde{O} = O \setminus \coprod_{i=1}^f D_i$. Par définition, $e_0(\nu) = e_\nu - \sum_{i=1}^d \frac{\beta_i}{\alpha_i}$ où e_ν est l'entier associé à la section $s : \tilde{O} \rightarrow V$ la section de p définie au-dessus de $\partial\tilde{O}$ par : $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, $s|_{C_i} = s_i$. Soit $\tilde{V} = V \setminus \coprod_{i=1}^f p^{-1}(D_i)$ et soit $\tilde{p} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{O}$ la restriction de p à \tilde{V} . Considérons le difféomorphisme périodique $\tau : F \rightarrow F$ dont le graphe de Nielsen est représenté sur la figure 8, avec $\lambda_i = N_\nu \forall i \in \{1, \dots, d'\}$.

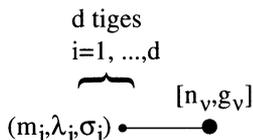


Figure 8

Sa suspension $\mathcal{M}(\tau) = F \times \mathbb{R} / (\tau(x), t) \sim (x, t + 1)$ est naturellement munie d'une fibration de Seifert dont la projection coïncide avec \tilde{p} en dehors de d fibres exceptionnelles. Les arguments précédents montrent que la classe d'Euler rationnelle $e_0(\mathcal{M}(\tau))$ est égale à $e_\nu - \sum_{i=1}^d \frac{\sigma_i}{\lambda_i}$, où e_ν est le nombre d'Euler associé à la section s . Or $e_0(\mathcal{M}(\tau)) = 0$ puisque $\mathcal{M}(\tau)$ fibre sur le cercle. D'où l'égalité (4).

Ce qui achève la démonstration du lemme 4.4.

Remarques. — a) Soit (m, λ, σ) la valence d'une courbe fermée simple c dans l'espace des orbites d'un difféomorphisme périodique τ . Selon la définition de Nielsen, σ est une classe d'entiers modulo λ , et le choix un représentant σ dans sa classe modulo λ n'a aucun sens topologique en dimension 2. Par contre, comme nous venons de le voir, un tel choix à un sens en dimension 3 : il correspond à un choix de section de la fibration de Seifert de la suspension $\mathcal{M}(\tau)$ au-dessus de la courbe c .

b) Les courbes amphidromes du système de réduction de h minimal au sens de Wu sont en bijection avec les composantes connexes de $M \setminus \mathcal{T}$ homéomorphes à des variétés Q de Waldhausen. Les sommets de $G(M, L)$ et de $\mathcal{G}(h)$ correspondants sont représentés sur la figure 9.

Preuve du théorème 4.3. — Désignons par ν un sommet de $G(M, L)$ et le sommet qui lui correspond dans \mathcal{G}_Φ . Les égalités (1), (2) et (3) conduisent à

$$(1') \quad \forall i \in \{1, \dots, f\}, \quad \frac{\sigma_i}{\lambda_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} = 0$$

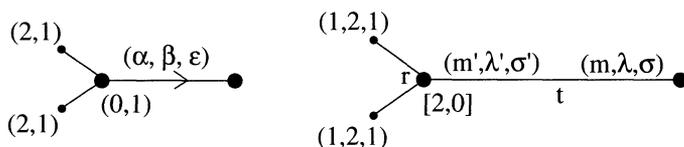


Figure 9

$$(2') \quad \forall i \in \{f + 1, \dots, d'\}, \quad \frac{\sigma_i}{\lambda_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} = -\frac{1}{N_\nu \alpha_i}$$

$$(3') \quad \forall i \in \{d' + 1, \dots, d\}, \quad \frac{\sigma_i}{\lambda_i} - \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{N_{\nu_i}}{N_\nu \epsilon_i \alpha_i}.$$

En reportant dans (4), on obtient 4.3.1).

La démonstration de 4.3.2) repose sur le résultat suivant :

LEMME 4.5. — Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen muni de deux fibrations horizontales $\Phi_1 : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ et $\Phi_2 : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$. Alors les entrelacs de Waldhausen fibrés horizontalement (M, L, Φ_1) et (M, L, Φ_2) sont topologiquement équivalents si et seulement si les monodromies de Φ_1 et de Φ_2 sont conjuguées.

En conséquence le graphe de Nielsen complet de la monodromie est un invariant complet de la classe d'équivalence topologique d'un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement.

Si $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ désigne une fibration horizontale dont la monodromie est de multi-ordre (N_ν) , alors les entiers n_ν et r_ν pondérant chaque sommet ν de son graphe de Nielsen vérifient $N_\nu = n_\nu r_\nu$. Nous appelons *décomposition* de (N_ν) toute suite de couples d'entiers strictement positifs $((n_\nu, r_\nu))$ indexée par les sommets de $G(M, L)$ telle que $\forall \nu, N_\nu = n_\nu r_\nu$.

LEMME 4.6. — Le graphe \mathcal{G}_Φ est entièrement déterminé par la donnée du graphe $G(M, L)$ et de la suite (n_ν, r_ν) .

Or une solution (N_ν) du système monodromique de $G(M, L)$ admet un nombre fini de décompositions (n_ν, r_ν) . On conclut en utilisant le corollaire 3.3.

Ce qui achève la démonstration du théorème 4.3.

Preuve du lemme 4.5. — Supposons que les monodromies de Φ_1 et de Φ_2 soient conjuguées. Soit $h_1 : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ (resp. $h_2 : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_2$) un représentant de la monodromie de Φ_1 (resp. Φ_2). Supposons qu'il existe un homéomorphisme $g : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ tel que $h_2 = g \circ h_1 \circ g^{-1}$. Pour $i = 1, 2$, considérons la suspension $\mathcal{M}(h_i) = \mathcal{F}_i \times \mathbb{R} / (h_i(x), t) \cong (x, t + 1)$ et la projection $p_i : \mathcal{M}(h_i) \rightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ définie par $p_i([(x, t)]) = [t]$. Il existe des homéomorphismes $H_i : M \setminus L \rightarrow \mathcal{M}(h_i)$ et $\rho_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tels que $p_i \circ H_i = \rho_i \circ \Phi$. L'application $\Theta : \mathcal{M}(h_1) \rightarrow \mathcal{M}(h_2)$ définie par $\Theta([(x, t)]) = [(g(x), t)]$ est un homéomorphisme tel que $p_1 \circ \Theta = p_2$. Soit $\check{H} : M \setminus L \rightarrow M \setminus L$ l'homéomorphisme défini par $\check{H} = H_2^{-1} \circ \Theta \circ H_1$ et $\rho = \rho_2^{-1} \circ \rho_1$. Alors $\Phi_2 \circ \check{H} = \rho \circ \Phi_1$, et \check{H} s'étend en un homéomorphisme $H : (M, L) \rightarrow (M, L)$.

Preuve du lemme 4.6. — Soit $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ le graphe construit à partir de $G(M, L)$ et de la suite (n_ν, r_ν) de la façon suivante : $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ est isomorphe au graphe de Waldhausen $G(M, L)$ par un isomorphisme qui envoie les sommets (resp. les arêtes, resp. les tiges, resp. les flèches) de $G(M, L)$ sur les sommets (resp. les arêtes, resp. les tiges, resp. les tiges-bord) de $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$.

De plus, soit ν un sommet de $G(M, L)$ comme sur la figure 6. Alors le sommet de $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ qui lui correspond est représenté sur la figure 7. Pour $i \in \{1, \dots, f\}$ (resp. $i \in \{f + 1, \dots, d'\}$, resp. $i \in \{d' + 1, \dots, d\}$), λ_i et σ_i sont les entiers > 0 premiers entre eux calculés par la formule (1') (resp. (2'), resp. (3')), et on pose $m_i = \frac{n_\nu}{\lambda_i}$. Enfin, pour $i \in \{d' + 1, \dots, d\}$, on pose $t_i = \frac{\epsilon_i \alpha_i}{N_\nu \lambda_i}$.

Alors d'après le lemme 4.4, $\mathcal{G}_\Phi = \mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$.

La réciproque est immédiate.

Remarque. — Soit (M, L, Φ) un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement. La caractéristique d'Euler de la fibre \mathcal{F} de Φ se calcule à partir du multi-ordre (N_ν) et du graphe $G(M, L)$ par la formule d'Hurwitz : pour tout sommet ν de $G(M, L)$, notons $d_\nu = d$ selon les notations de la figure 6. Alors

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{\nu, \text{ sommet de } G(M,L)} N_\nu(2 - 2g_\nu - d_\nu).$$

D'autre part, le nombre de composantes de bord de \mathcal{F} est égal au nombre de composantes connexes de L . De ce fait, deux fibrations horizontales d'un même entrelacs de Waldhausen admettant le même multi-ordre ont des fibres homéomorphes.

En fait, les résultats techniques obtenus précédemment permettent de dresser explicitement la liste complète (éventuellement vide) à équivalence topologique près des fibrations horizontales d'un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées donné (Algorithme 4.8). Auparavant, nous allons donner une condition nécessaire et suffisante explicite pour qu'une solution du système monodromique d'un graphe de Waldhausen soit le multi-ordre de la monodromie d'une fibration horizontale.

Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées, soit (N_ν) une solution du système monodromique de son graphe de Waldhausen, et soit $((n_\nu, r_\nu))$ une décomposition de (N_ν) . Alors les pondérations λ, σ et t de $G_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ ne dépendent pas de la suite $((n_\nu, r_\nu))$, mais seulement de la suite (N_ν) . Notons $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(N_\nu)}$ le graphe $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ incomplet, pondéré seulement par les poids λ, σ, t et g . Pour fixer les idées, le sommet ν du graphe $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(N_\nu)}$ est représenté sur la figure 10.

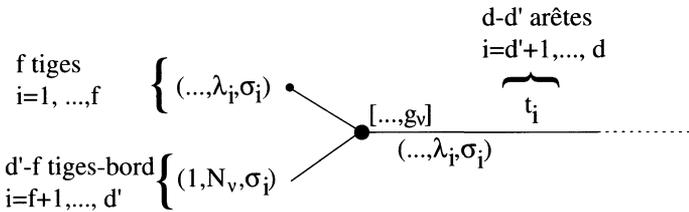


Figure 10

Lemme 4.7. — Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées et soit (N_ν) une solution du système monodromique de son graphe de Waldhausen à composantes entières strictement positives. Il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est de multi-ordre (N_ν) si et seulement si le graphe $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(N_\nu)}$ vérifie les conditions suivantes, selon les notations de la figure 10 :

(i) pour tout sommet ν de $G(M, L)$,

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \lambda_i \text{ divise } N_\nu,$$

$$\forall i \in \{d' + 1, \dots, d\}, \text{ppmc}(N_\nu, N_{\nu_i})t_i \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Si $L = \emptyset$ et si $g_\nu = 0$ pour tout sommet ν de $G(M, L)$, alors $\text{pgcd}(r_\nu, \nu \text{ sommet de } G(M, L)) = 1$, où $\forall \nu, r_\nu = \text{pgcd}(\frac{N_\nu}{\lambda_i}, i = 1, \dots, d)$.

Si ces conditions sont réalisées, les graphes de Nielsen de ces fibrations sont exactement les graphes $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ où $((n_\nu, r_\nu))$ décrit l'ensemble des décompositions de (N_ν) telles que

(iii) pour tout sommet ν de $G(M, L)$,

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, r_\nu \text{ divise } \frac{N_\nu}{\lambda_i},$$

si le sommet ν porte une flèche, $r_\nu = 1$,

si $g_\nu = 0$ et si le sommet ν ne porte pas de flèche, $r_\nu = \text{pgcd}(\frac{N_\nu}{\lambda_i}, i = 1, \dots, d)$.

(iv) si $L = \emptyset$ et s'il existe un sommet η de $G(M, L)$ tel que $g_\eta \neq 0$, $\text{pgcd}(r_\nu, \nu \text{ sommet de } G(M, L)) = 1$.

Preuve. — Supposons qu'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ de multi-ordre (N_ν) . Soit $((n_\nu, r_\nu))$ la décomposition de (N_ν) telle que $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ soit le graphe de Nielsen de la monodromie de Φ . Alors les propriétés (i), (ii) et (iii) sont des conséquences des conditions (QP1), (QP2) et (QP3) de la proposition 3.1. En particulier, si $g_\nu = 0$ et si le sommet ν ne porte pas flèche, la condition (iii) provient de la surjectivité de l'homomorphisme ρ (condition (QP1), (P2)). De plus, si $L = \emptyset$ et si $g_\nu = 0$ pour tout sommet ν de $G(M, L)$, la condition (ii) est équivalente à (QP3).

Réciproquement, supposons que (N_ν) vérifie les conditions (i) et (ii) et soit $((r_\nu, n_\nu))$ une décomposition de (N_ν) réalisant les conditions (iii) et (iv) (il en existe). Il nous suffit de montrer que le graphe $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(n_\nu, r_\nu)}$ est un graphe de Nielsen, c'est-à-dire vérifie les conditions (QP1), (QP2) et (QP3).

L'égalité $\text{ppcm}(nr, n'r')t \in \mathbb{Z}$ de (QP2) provient de la condition (i) et l'égalité $\frac{nr}{\lambda} = \frac{n'r'}{\lambda'}$ est automatiquement réalisée. En effet, considérons une arête de $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(N_\nu)}$ comme sur la figure 11.

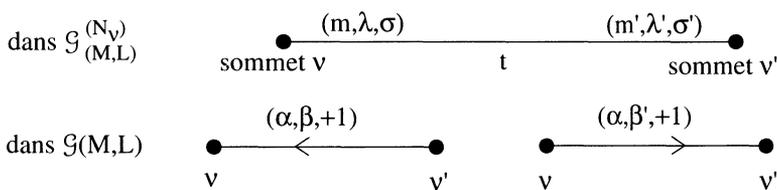


Figure 11

D'après l'égalité (3'), nous avons

$$\frac{\sigma}{\lambda} = \frac{\beta N_\nu + N_{\nu'}}{\alpha N_\nu} \text{ et } \text{pgcd}(\lambda, \sigma) = 1.$$

$$\frac{\sigma'}{\lambda'} = \frac{\beta' N_{\nu'} + N_{\nu}}{\alpha N_{\nu'}} \text{ et } \text{pgcd}(\lambda', \sigma') = 1.$$

Or l'égalité $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$ implique $\text{pgcd}(\alpha N_{\nu}, \beta N_{\nu} + N_{\nu'}) = \text{pgcd}(\alpha N_{\nu'}, \beta' N_{\nu'} + N_{\nu})$. D'où $N_{\nu}\lambda' = N_{\nu'}\lambda$.

Pour tout sommet ν de $G(M, L)$, la condition (iii) implique (QP1). En particulier, si $g_{\nu} \neq 0$ et si ν ne porte pas de flèche, la surjectivité de l'homomorphisme $\rho : H_1(\check{O}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/N_{\nu}\mathbb{Z}$ est obtenue en envoyant un générateur de $H_1(\check{O}; \mathbb{Z})$ provenant du genre de \check{O} sur un générateur de $\mathbb{Z}/n_{\nu}\mathbb{Z}$.

Si $L \neq \emptyset$, alors il existe un sommet ν tel que $r_{\nu} = 1$, donc la condition (QP3) est réalisée. Si $L = \emptyset$ et si $g_{\nu} = 0$ pour tout sommet de $G(M, L)$, la condition (iii) équivaut à (QP3). Dans tous les autres cas, la condition (QP3) est réalisée par (iv).

Algorithme 4.8. — Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées.

Première étape : on résout le système monodromique du graphe de Waldhausen $G(M, L)$ et on détermine l'ensemble E de ses solutions à composantes entières strictement positives.

Deuxième étape : pour chaque $(N_{\nu}) \in E$, on construit le graphe $\mathcal{G}_{(M, L)}^{(N_{\nu})}$, puis on écarte les suites (N_{ν}) qui ne sont pas multi-ordre d'une fibration horizontale en utilisant les critères (i) et (ii) du lemme 4.7.

Troisième étape : pour chaque (N_{ν}) restant, on dresse la liste des décompositions $((n_{\nu}, r_{\nu}))$ de (N_{ν}) qui vérifient les conditions (iii) et (iv) du lemme 4.7, puis pour chacune d'elle, on complète le graphe $\mathcal{G}_{(M, L)}^{(N_{\nu})}$ pour obtenir $\mathcal{G}_{(M, L)}^{(n_{\nu}, r_{\nu})}$.

Quatrième étape : pour chacun des graphes de Nielsen $\mathcal{G}_{(M, L)}^{(n_{\nu}, r_{\nu})}$ ainsi obtenus, on dresse la liste (finie) des graphes de Nielsen complets qui peuvent lui être associés.

On obtient ainsi la liste des graphes de Nielsen complets des monodromies des fibrations horizontales $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Exemple 1. — Considérons l'entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées (M, L) dont le graphe de Waldhausen est représenté sur la figure 12.

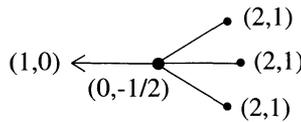


Figure 12

Le système monodromique de $G(M, L)$ est constitué de l'unique équation

$$-\frac{1}{2}N = -1$$

dont l'unique solution est $N = 2$. Ce multi-ordre éventuel admet pour seule décomposition possible $(n, r) = (2, 1)$. Le graphe $\mathcal{G}_{(M, L)}^{(2, 1)}$ correspondant est représenté sur la figure 13. D'après la proposition 3.1, il s'agit d'un graphe de Nielsen.

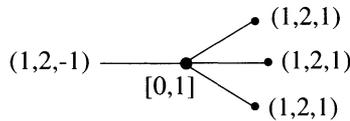


Figure 13

Exemple 2. — Le système monodromique du graphe $G(M, L)$ représenté sur la figure 14 est constitué de l'unique équation

$$-\frac{2}{3}N = -\frac{1}{3}$$

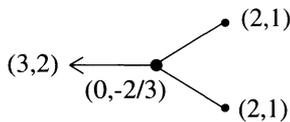


Figure 14

Son unique solution est $N = \frac{1}{2}$. Il ne s'agit pas d'un entier, donc l'entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées (M, L) n'admet pas de fibration horizontale.

Exemple 3. — Considérons l'entrelacs de Waldhausen à fibres de Seifert orientées (M, L) dont le graphe de Waldhausen est représenté sur la figure 15.

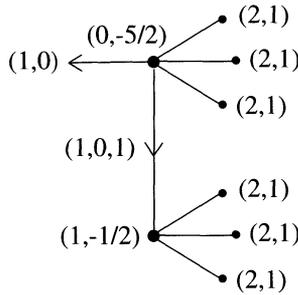


Figure 15

Le système monodromique de $G(M, L)$ est

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}N_1 + N_2 = 0 \\ N_1 - \frac{1}{2}N_2 = -2 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $(N_1, N_2) = (4, 10)$. Ce multi-ordre éventuel admet deux décompositions possibles :

$$(4, 10) = ((r_1, n_1), (n_2, r_2)) = ((2, 2), (10, 1)) \text{ et}$$

$$(4, 10) = ((r_1, n_1), (n_2, r_2)) = ((4, 1), (10, 1)),$$

qui conduisent toutes deux à des graphes de Nielsen, représentés sur la figure 16. (M, L) admet donc à équivalence topologique près deux fibrations horizontales.

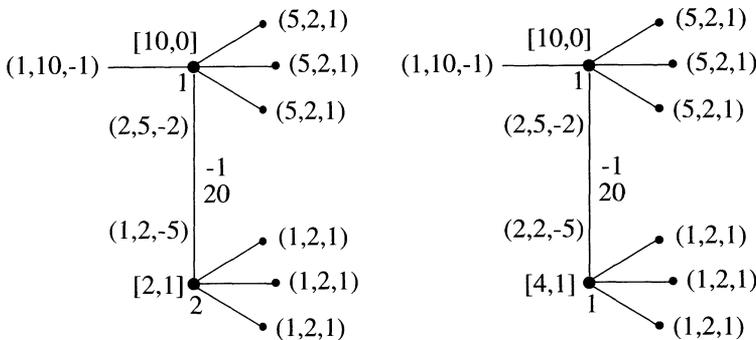


Figure 16

5. Application à la géométrie complexe.

I. familles dégénérées de courbes complexes.

Soit $f : \Sigma \longrightarrow D$ une fonction holomorphe propre surjective, où Σ est une surface complexe lisse, et où $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$. On suppose que la seule valeur critique éventuelle de f est 0 et que les fibres de f sont connexes. Une telle application $f : \Sigma \longrightarrow D$ s'appelle une *famille dégénérée de courbes complexes* (voir [N], page 301). Soit $M_f := f^{-1}(\mathbb{S}_\eta^1)$, où \mathbb{S}_η^1 est le bord d'un petit disque $D_\eta \subset D$ de rayon η centré en l'origine dans \mathbb{C} . La classe d'homéomorphisme de M_f , indépendante de η , s'appelle le *bord* de f . Le théorème de fibration d'Ehresmann implique que l'application $\Phi_f : M_f \longrightarrow \mathbb{S}_\eta^1$ définie par $\Phi_f(z) = f(z)$ est une fibration localement triviale. Les arguments de [D] montrent que (M_f, \emptyset, Φ_f) est un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement. La monodromie de Φ_f s'appelle la *monodromie* de f .

DÉFINITION 5.1. — Soit $h : F \longrightarrow F$ un difféomorphisme quasi-périodique et soit \mathcal{C} son système minimal de réduction. On dit que h est à torsades négatives si les torsades au voisinage des courbes de \mathcal{C} sont toutes négatives.

THÉORÈME 5.2. — 1) La monodromie d'une famille dégénérée de courbes complexes est à torsades négatives.

2) Soit M une variété de Waldhausen. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une famille dégénérée de courbes complexes dont M est le bord.
- (ii) Il existe une fibration horizontale $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives.
- (iii) M possède un graphe de Waldhausen $G(M)$ dont les pondérations ϵ des arêtes sont toutes égales à +1 et dont le système monodromique possède une solution à composantes toutes strictement positives.

3) Supposons que M réalise l'une de ces assertions.

Si les bases des composantes de Seifert de M sont toutes de genre zéro, alors il existe à équivalence topologique près un nombre fini de fibrations

horizontales $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives, et ces fibrations ont toutes le même multi-ordre.

Sinon, il existe à équivalence topologique près une infinité de fibrations horizontales $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives. Plus précisément, il existe une solution $(N_\nu^{(0)})$ du système monodromique de $G(M)$ telle que l'ensemble

$$\{(\xi N_\nu^{(0)}), \xi \in \mathbb{N}^*\}$$

soit exactement l'ensemble des multi-ordres de ces fibrations horizontales.

La liste complète de ces fibrations horizontales peut être explicitement obtenue par l'algorithme 4.8.

Remarques. — a) Le résultat 5.2.1 est annoncé dans [MM1], et démontré dans [ES] et [ST]. Les preuves données dans ces deux derniers articles reposent sur l'utilisation de l'espace de Teichmüller, alors que celle que nous allons présenter est de nature essentiellement topologique.

b) Appelons *graphe de Waldhausen distingué* un graphe de Waldhausen dont les pondérations ϵ des arêtes sont toutes égales à $+1$. Étant donné un entrelacs de Waldhausen (M, L) , on peut dire s'il admet ou non un graphe de Waldhausen distingué et, s'il existe, déterminer explicitement ce graphe, en modifiant un graphe de Waldhausen quelconque par une suite finie de ϵ -opérations. L'assertion (iii) fournit donc un critère explicite pour déterminer si une variété de Waldhausen donnée se réalise comme bord d'une famille dégénérée de courbes complexes.

c) Dans le cadre de 5.2.3), si M admet une composante de Seifert dont la base n'est pas de genre nul, soit \mathcal{F}_0 la fibre d'une fibration horizontale de multi-ordre $(N_\nu^{(0)})$ et soit g_0 son genre. Alors la fibre \mathcal{F} d'une fibration horizontale de M de multi-ordre $(\xi N_\nu^{(0)})$ est un revêtement cyclique d'ordre ξ de \mathcal{F}_0 , donc le genre de \mathcal{F} est égal à $\xi(g_0 - 1) + 1$. En particulier, il existe des fibrations horizontales de M dont le genre de la fibre est arbitrairement grand.

Preuve. — 1) Soit $f : \Sigma \rightarrow D$ une famille dégénérée de courbes complexes. Son bord M_f est naturellement orienté comme le bord de $f^{-1}(D)$. Notons M_f^{geom} la variété M_f munie de cette orientation.

Identifions M_f au bord d'un voisinage semi-algébrique W d'une résolution des singularités de la fibre spéciale $f^{-1}(0)$ (voir [D]). Une décomposition de Waldhausen de M_f (en général loin d'être minimale) est alors obtenue de la façon suivante : pour chaque composante irréductible C_j

du lieu exceptionnel, on considère le fibré \mathcal{N}_j en boules compactes associé au fibré normal à C_j . Si C_i rencontre C_j transversalement au point P_{ij} , on “plombe” \mathcal{N}_i et \mathcal{N}_j selon le procédé décrit dans [HNK]. Les fibres de Seifert régulières sont obtenues (à isotopie près) comme l’intersection avec M_f d’une petite courbe complexe lisse, coupant transversalement C_j en un point lisse du lieu exceptionnel (on appelle une telle courbe une “curvette” de C_j). L’intersection de la curvette avec M_f est alors orientée comme le bord de la partie de la curvette (munie de l’orientation complexe) qui se trouve dans W . On note b^{geom} l’orientation des fibres de Seifert ainsi obtenue.

Bien que cette décomposition de Waldhausen ne soit, en général, pas minimale, elle est représentée par un graphe de Waldhausen que nous notons $\Delta(M_f^{\text{geom}}, \varnothing)$. Un retour aux définitions montre qu’avec ces orientations, les pondérations ϵ^{geom} des arêtes du graphe $\Delta(M_f^{\text{geom}}, \varnothing)$, notées ϵ^{geom} , sont toutes égales à $+1$. En effet, le nombre d’intersection de deux courbes complexes lisses transverses est égal à $+1$.

Notons b^{flot} l’orientation naturelle des fibres de Seifert induite par la structure reliée. La fibre de Φ_f étant munie de l’orientation qui provient de sa structure complexe, soit M_f^{flot} l’orientation de M_f compatible avec l’orientation b^{flot} . Par construction, il s’agit de l’orientation associée à la fibration horizontale Φ_f . Notons ϵ^{flot} les pondérations ϵ du graphe de Waldhausen associé à ces orientations.

Par construction, le degré de la restriction de Φ_f à b^{flot} est positif. D’autre part, le degré de la restriction de Φ_f à b^{geom} est égal à la multiplicité de la fonction f le long d’une certaine composante du lieu exceptionnel. Comme f est holomorphe, cette multiplicité est positive. D’où $b^{\text{flot}} = b^{\text{geom}}$. En un point lisse q d’une surface complexe, l’orientation complexe s’obtient en considérant deux courbes complexes lisses qui se coupent transversalement en q . L’orientation M_f^{geom} est donc obtenue en prenant l’orientation complexe d’une fibre de Φ_f suivie de l’orientation b^{flot} . Par conséquent, $M_f^{\text{flot}} = M_f^{\text{geom}}$. Ceci entraîne $\epsilon^{\text{flot}} = \epsilon^{\text{geom}}$, et donc $\epsilon^{\text{flot}} = +1$.

D’après [N], les pondérations ϵ du graphe de Waldhausen minimal $G(M_f^{\text{geom}}, \varnothing)$ de $(M_f, \varnothing, \Phi_f)$ sont des produits des pondérations ϵ du graphe $\Delta(M_f^{\text{geom}}, \varnothing)$. Donc les pondérations ϵ du graphe $G(M_f^{\text{geom}}, \varnothing)$ sont toutes égales à $+1$. Or d’après la formule (3) du lemme 4.5, le signe d’une torsade et celui de l’entier ϵ qui lui correspond sont opposés. Ceci implique que les torsades de la monodromie de f sont toutes négatives.

L'auteur remercie Claude Weber de l'avoir aidée à éclaircir ce point.

2) (i) \Rightarrow (ii) est une conséquence de 1).

(ii) \Rightarrow (iii) : Supposons qu'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives. Soit $G(M, \emptyset)$ le graphe de Wadhausen de l'entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement (M, \emptyset, Φ) . D'après la formule (3) du lemme 4.4, chaque pondération ϵ de $G(M, \emptyset)$ est de signe opposé à la torsade correspondante, donc est égale à $+1$. De plus, le multi-ordre de la monodromie de Φ est solution du système monodromique de $G(M, \emptyset)$ (Théorème 4.3).

(iii) \Rightarrow (ii) : supposons que M possède un graphe de Waldhausen $G(M, \emptyset)$ dont les pondérations ϵ des arêtes sont toutes égales à $+1$ et dont le système monodromique (\mathcal{S}) possède une solution (X_ν) à composantes toutes strictement positives. Nous allons utiliser le résultat suivant, variante d'un résultat de D. Mumford ([Mu]).

LEMME 5.3. — Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique à coefficients réels qui vérifie les conditions suivantes :

1) $\forall i \neq j, a_{ij} \geq 0$.

2) il n'existe pas de partition non triviale $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ telle que $\forall (i, j) \in I \times J, a_{ij} = 0$.

Soit $B = [b_i]_{1 \leq i \leq n}$ une matrice à coefficients réels négatifs ou nuls. Supposons que le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X = [x_i]_{1 \leq i \leq n}$ admette une solution à composantes toutes strictement positives, alors

a) Si $B = 0$, alors l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est de dimension 1.

b) Si la matrice B est non nulle, alors le déterminant de A est non nul.

La matrice du système monodromique (\mathcal{S}) vérifie les hypothèses du lemme 5.3. En effet, le changement d'orientation d'une arête de $G(M, \emptyset)$ pondérée par $(\alpha, \beta, \epsilon)$ remplace ce triplet par $(\alpha, \beta', \epsilon)$ où $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$. Ceci montre que la matrice de (\mathcal{S}) est symétrique. D'autre part, la condition 1) est immédiate, et la condition 2) provient de la connexité du graphe $G(M, \emptyset)$. Nous sommes dans la situation a) du lemme 5.3, donc l'ensemble des solutions de (\mathcal{S}) est $\mathbb{R}(X_\nu)$. Quitte à multiplier (X_ν) par un réel strictement positif, on peut supposer que (X_ν) est à composantes entières minimales, i.e. $\text{pgcd}(X_\nu, \nu \text{ sommet de } G(M, \emptyset)) = 1$.

Soit μ le plus petit entier tel que la suite (μX_ν) vérifie la condition (i) du lemme 4.7 Si $g_\nu = 0$ pour tout sommet ν de $G(M, L)$, la minimalité de μ implique que (μX_ν) réalise aussi la condition (ii) du lemme 4.7. Alors le lemme 4.7 implique qu'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est de multi-ordre (μX_ν) . De plus ses torsades sont négatives puisque de signes opposés aux pondérations ϵ du graphe $G(M, \emptyset)$, qui est distingué.

(iii) \Rightarrow (i) : Nous allons obtenir ce résultat en interprétant un résultat de G. Winters ([Wi]) en termes de systèmes monodromiques.

Soit Δ le graphe de plombage normalisé de M obtenu comme dans [N] à partir du graphe distingué $G(M, \emptyset)$, et soit E le diviseur à croisements normaux associé à Δ . Munissons M de la décomposition de Waldhausen à fibres de Seifert orientées obtenue en identifiant M au bord du plombage. Le graphe de Waldhausen caractérisant cette décomposition s'obtient à partir de Δ en pondérant chacune de ses arêtes arbitrairement orientée par le triplet $(1, 0, 1)$, comme sur la figure 17. Notons encore Δ ce graphe.

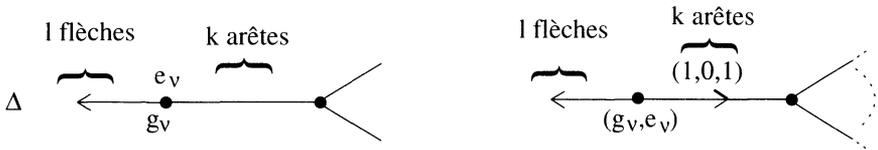


Figure 17

La minimalité de la décomposition de Waldhausen n'intervient pas dans la définition du système monodromique. En particulier, on définit le système monodromique (\mathcal{S}') du graphe Δ de la même façon que pour le graphe $G(M, \emptyset)$: l'équation de (\mathcal{S}') correspondant au sommet ν de Δ s'écrit, conformément aux notations de la figure 17 :

$$e_\nu X_\nu + \sum_{i=1}^k X_{\nu_i} = 0.$$

On reconnaît le système linéaire bien connu en géométrie complexe, qui relie les classes d'Euler aux multiplicités des composantes E_ν du diviseur E dans le cas où M est le bord d'une famille dégénérée de courbes complexes. Dans [Wi], G. Winters démontre le résultat suivant :

THÉORÈME ([Wi]). — *Le graphe Δ est le graphe dual d'une famille dégénérée de courbes complexes de fibre régulière $\sum N_\nu E_\nu$ et de fibre spéciale E si et seulement si (N_ν) est solution du système (\mathcal{S}') .*

Supposons que le système monodromique (\mathcal{S}) de $G(M, \emptyset)$ admette une solution à composantes toutes strictement positives. Alors d'après ce qui précède, il existe une fibration horizontale $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives. Les pondérations ϵ du graphe Δ étant toutes positives, les fibres de Φ sont aussi transverses à la décomposition de Waldhausen de M qui provient du plombage. Soit alors $h' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ un représentant de la monodromie associé cette décomposition. Pour chaque sommet ν de Δ , notons N_ν l'ordre de la restriction de h' à $\mathcal{F} \cap V'_\nu$. Les arguments du paragraphe 4 montrent que la suite (N_ν) est solution du système (\mathcal{S}') . Donc (\mathcal{S}') admet une solution à composantes toutes strictement positives. On conclut à l'aide du Théorème de G. Winters.

Remarque. — Un sommet ν de Δ est appelé sommet de rupture si la composante connexe de $M \setminus (\mathcal{U}(T') \cup \mathcal{U}(K))$ qu'il représente n'est ni un tore plein ni un tore épaissi. Les sommets de $G(M, \emptyset)$ sont en bijection avec les sommets de rupture de Δ . Via les formules données par [N] (pages 322, 323), il n'est pas difficile de montrer que le système (\mathcal{S}) est en fait le sous-système de (\mathcal{S}') dont les inconnues et les équations sont indexées par les sommets de ruptures de $G(M, K)$, et que (N_ν) est solution de (\mathcal{S}') si et seulement si la sous-suite de (N_ν) indexée par les sommets de $G(M, K)$ est solution de (\mathcal{S}) .

3) Supposons que M réalise (ii), et reprenons les notations utilisées dans la preuve de l'implication (iii) \Rightarrow (ii). Pour tout sommet ν de $G(M, L)$, posons $N_\nu^{(0)} = \mu X_\nu$. Par minimalité de μ , le multi-ordre de toute fibration horizontale $\Phi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ est de la forme $(\xi N_\nu^{(0)})$, où $\xi \in \mathbb{N}^*$.

Réciproquement, soit ξ un entier ≥ 2 .

Si les composantes de Seifert de (M, \emptyset) sont toutes de genre zéro, alors la suite $(\xi N_\nu^{(0)})$ ne vérifie pas la condition (ii) du lemme 4.7 (le pgcd vaut ξ). Donc les fibrations horizontales de M dont la monodromie est à torsades négatives sont toutes de multi-ordre $(N_\nu^{(0)})$. Il en existe un nombre fini à équivalence topologique près d'après le théorème 4.3.

Sinon, la condition (i) du lemme 4.7 est encore réalisée par la suite $(\xi N_\nu^{(0)})$, et (ii) est une condition vide, donc il existe une fibration horizontale de M dont la monodromie admet $(\xi N_\nu^{(0)})$ pour multi-ordre, et ses torsades sont négatives puisque $G(M, \emptyset)$ est distingué.

Ce qui achève la démonstration du théorème 5.2.

II. Germes de courbes en un point d'une surface complexe normale.

On s'intéresse maintenant à une surface complexe normale Z et à un germe de fonction analytique $g : Z \rightarrow \mathbb{C}$ à singularité isolée en $p \in Z$ tel que $g(p) = 0$.

Soit M_Z le bord d'un voisinage de p défini de la façon suivante : on plonge Z dans \mathbb{C}^N pour N assez grand de façon à ce que l'origine soit l'image du point p . On intersecte Z avec la boule B_ϵ^{2N} de rayon ϵ et centrée en $0 \in \mathbb{C}^N$. Pour ϵ suffisamment petit, la sphère $\mathbb{S}_\epsilon^{2N-1}$ de rayon ϵ centrée en l'origine de \mathbb{C}^N coupe Z transversalement en $M_Z := \mathbb{S}_\epsilon^{2N-1} \cap Z$, et $g^{-1}(0)$ réduit coupe M_Z transversalement en $L_g := g^{-1}(0) \cap M_Z$. La classe d'homéomorphisme du couple (M_Z, L_g) , indépendante de ϵ , s'appelle le *bord* de g .

De plus, soit $\Phi_g : M_Z \setminus L_g \rightarrow \mathbb{S}^1$ la fibration de Milnor de g ($\Phi_g(z) = \frac{g(z)}{|g(z)|}$). Les arguments de [D] montrent que (M_Z, L_g, Φ_g) est un entrelacs de Waldhausen fibré horizontalement. La monodromie de Φ_g s'appelle la *monodromie de la fonction analytique* g .

THÉORÈME 5.4. — 1) *La monodromie d'un germe de fonction analytique à singularité isolée en un point d'une surface complexe normale est à torsades négatives.*

2) *Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen tel que $L \neq \emptyset$. Il existe une surface complexe normale Z et un germe analytique $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée en $p \in Z$ dont (M, L) est le bord si et seulement si il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives.*

3) *Une condition nécessaire pour qu'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives est que (M, L) possède un graphe de Waldhausen $G(M, L)$ distingué (i.e. dont les pondérations ϵ des arêtes sont toutes égales à $+1$), auquel cas, il existe à équivalence topologique près un nombre fini (éventuellement nul) de telles fibrations horizontales. Leurs monodromies ont toutes le même multi-ordre, qui est l'unique solution du système monodromique de $G(M, L)$.*

Remarques. — a) Le résultat 5.4.1) est dû à P. Du Bois et F. Michel, et indépendamment, à D. Eisenbud et W. Neumann (Voir [DM] et [EN]) dans le cas particulier où p est un point lisse de Z . Les auteurs donnent aussi

une formule explicite pour la valeur des torsades. À notre connaissance, ce résultat est nouveau lorsque le point $p \in Z$ n'est pas lisse.

b) 5.4.2) et 3) fournissent un critère explicite pour déterminer, via l'algorithme 4.8, si un entrelacs de Waldhausen donné se réalise comme le bord d'un germe analytique à singularité isolée en un point d'une surface complexe normale.

Preuve. — 1) Soit $g : Z \rightarrow \mathbb{C}$ un germe de fonction analytique comme ci-dessus. On procède exactement comme pour 5.2.1) en remplaçant M_f^{geom} par la variété M_Z naturellement orientée comme le bord de la variété constituée des points lisses de $Z \cap \mathbb{S}_\epsilon^{2N-1}$ munie de l'orientation complexe et en résolvant g en $p \in Z$ pour obtenir une décomposition de Waldhausen de (M_Z, L_g) par plombages.

3) S'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives, le graphe de Waldhausen $G(M, L)$ de (M, L, Φ) est distingué d'après la formule (3) du lemme 4.4. Le multi-ordre (N_ν) de Φ est solution du système monodromique de $G(M, L)$, qui vérifie donc les hypothèses du lemme 5.3, par les mêmes arguments que pour 5.2.2). Comme $L \neq \emptyset$, nous sommes dans la situation b) du lemme 5.3, donc (N_ν) est l'unique solution du système monodromique $G(M, L)$. On conclut en utilisant le théorème 4.3.

2) Supposons qu'il existe une fibration horizontale $\Phi : M \setminus L \rightarrow \mathbb{S}^1$ dont la monodromie est à torsades négatives. Soit Δ le graphe de plombage normalisé de M obtenu à partir du graphe de Waldhausen distingué de (M, L) et soit (N_ν) l'unique solution de son système monodromique. L'équation de ce système correspondant au sommet ν de Δ s'écrit, conformément aux notations de la figure 18 :

$$e_\nu X_\nu + \sum_{i=1}^k X_{\nu_i} = l.$$

Considérons la variété de Waldhausen M' dont le graphe de plombage Δ' est obtenu à partir de Δ en remplaçant l'extrémité de chaque flèche par un sommet pondéré comme sur la figure 18. Le système monodromique du graphe Δ' admet pour solution (N'_ν) avec $N'_\nu = N_\nu$ pour tout sommet ν de Δ , et $N'_\nu = 1$ pour tout nouveau sommet.

D'après le Théorème de Winters cité plus haut, Δ' est le graphe dual d'une famille dégénérée de courbes complexes $f : \Sigma \rightarrow D$ dont le bord est homéomorphe à M' . Soit Z la surface complexe obtenue en identifiant

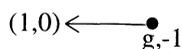


Figure 18

en un point p les composantes irréductibles de $f^{-1}(0)$ représentées par des sommets de Δ , et soit $\pi : \Sigma \rightarrow Z$ la projection. Alors (M, L) est homéomorphe au bord du germe de fonction analytique $g : Z, p \rightarrow \mathbb{C}, 0$ défini par $g \circ p = f$.

La réciproque est une conséquence de 1).

Le point 2) du théorème 5.4 se traduit en termes de graphes de plombages de la façon suivante :

COROLLAIRE 5.5. — *Soit (M, L) un entrelacs de Waldhausen tel que $L \neq \emptyset$ admettant un graphe de plombage Δ dont les poids ϵ des arêtes sont tous positifs. Alors il existe une surface complexe normale Z et un germe analytique $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée en $p \in Z$ dont (M, L) est le bord si et seulement si le système monodromique du graphe Δ admet une solution à composantes entières strictement positives.*

Preuve. — Si N désigne une telle solution (N_ν) , le graphe $\mathcal{G}_{(M,L)}^{(N_\nu)}$ construit à partir du graphe Δ vérifie automatiquement les conditions du lemme 4.7.

Remarques. — a) Si le système monodromique du graphe Δ admet une solution à composantes toutes strictement positives, alors d'après le lemme 5.3, la matrice d'intersection du diviseur E associé à Δ est définie négative. Cette dernière condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un germe de surface complexe normale (Z, p) dont M est le bord ($[G]$). Mais il n'existe pas nécessairement de germe $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dont (M, L) est le bord sur tout germe de surface (Z, p) dont M est le bord, comme le montre l'exemple suivant, dû à A. Nemethi. Le bord du germe d'hypersurface $(Z, 0)$ dans \mathbb{C}^3 d'équation $x^2 + y^7 + z^{42} = 0$ est homéomorphe au bord du germe d'hypersurface $(Z', 0)$ d'équation $z^2 + y(x^{12} - y^{18}) = 0$. Cependant, le bord (M_z, L_g) du germe $g : (Z, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ défini par $f(x, y, z) = z$ ne se réalise pas comme bord d'un germe $g' : (Z', 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

b) Nous avons toujours supposé $g : (Z, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée en p , hypothèse qui conduit à des décompositions en livres ouverts. On obtient des résultats analogues dans le cas général en généralisant nos

résultats topologiques à des multi-entrelacs, c'est-à-dire des entrelacs dont les composantes sont pondérées par des entiers.

L'auteur remercie le rapporteur pour la qualité de sa lecture et pour ses remarques, qui lui ont permis d'éclaircir de nombreux points de l'article.

BIBLIOGRAPHIE

- [C] N. CHAVEZ, Variétés graphées fibrées sur le cercle et difféomorphismes quasi-finis de surfaces, thèse de l'Université de Genève, 1996.
- [D] A. DURFEE, Neighbourhoods of algebraic sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 276 (1983), 517-530.
- [DBM] P. du BOIS et F. MICHEL, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curve germs, *J. Algebraic Geom.*, 3 (1994), 1-38.
- [EN] D. EISENBUD et W. NEUMANN, Three dimensional link theory and invariants of plane curves singularities, *Ann. of Math. Stud.* 110, Princeton University Press, Princeton, 1985.
- [ES] C. J. EARLE et P.L. SIPE, Families of Riemann surfaces over the punctured disk, *Pacific J. Math.*, 150 (1991), 79-96.
- [Ga] M. del C. GAZOLAZ, Fibrés de Seifert : classification et existence de feuilletages, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 295 (1982), 677-679.
- [G] H. GRAUERT, Über Modifikationen und exceptionelle analytische Raumformen, *Math. Ann.*, 146 (1962), 331-368.
- [HMK] F. HIRZEBRUCH, W. NEUMANN et S. S. KOH, Differentiable manifolds and quadratic forms, *Dekker Publ.*, 1971.
- [I] Y. IMAYOSHI, Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces, *Ann. of Math. Stud.* 97, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981, 277-300.
- [LMW] D.T. LÊ, F. MICHEL et C. WEBER, Courbes polaires et topologie des courbes planes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 24 (1991), 141-169.
- [MM1] Y. MATSUMOTO et J. M. MONTESINOS-AMILABIA, Pseudo-periodic homeomorphisms and degeneration of Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 30 (1994), 70-75.
- [MM2] Y. MATSUMOTO et J. M. MONTESINOS-AMILABIA, Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces, I, II, preprint, Univ. of Tokyo and Univ. Complutense de Madrid, 1991/1992.
- [M] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Princeton University Press, 1968.
- [Mu] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math.*, 9 (1961), 1-87.
- [N] W. NEUMANN, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 268 (1981), 299-344.
- [Ni1] J. NIELSEN, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 21 (1944), *Collected Papers 2*, Birkhäuser, 1986.
- [Ni2] J. NIELSEN, Die Struktur periodischer transformationen von Flächen, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 21 (1937), *Collected Papers 2*, Birkhäuser, 1986.
- [P1] A. PICHON, Variétés de Waldhausen et fibrations sur le cercle, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 324 (1997), 655-658.

- [P2] A. PICHON, Three-dimensional manifolds which are the boundary of a normal singularity $z^k - f(x, y) = 0$, *Math. Zeit.*, 231 (1999), 625-654.
- [ST] H. SHIGA et H. TANIGAWA, On the Maskit coordinates of Teichmüller spaces and modular transformations, *Kodai Math. J.*, 12 (1989), 437-443
- [Wa] F. WALDHAUSEN, Eine klasse von 3-dimensionalen Mannfaltigkeiten II, *Invent. Math.*, 4 (1967), 87-117.
- [Wi] G. B. WINTERS, On the existence of certain families of curves, *Amer. J. Math.*, 96 (1974), 215-228.
- [Wu] Y. WU, Canonical reducing curves of surface homeomorphism, *Acta Math. Sinica*, 3 (1987), 305-313.

Manuscrit reçu le 6 juin 1997,
révisé le 24 mars 2000,
accepté le 26 juillet 2000.

Anne PICHON,
Institut de Mathématiques de Luminy
Case 907
163 avenue de Luminy
13288 Marseille cedex 09 (France).
pichon@iml.univ-mrs.fr