ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Abdelmejid BAYAD

**Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi**

Tome 51, n$^o$ 1 (2001), p. 29-42.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_1_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**51**, 1 (2001), 29–42

# SOMMES DE DEDEKIND ELLIPTIQUES ET FORMES DE JACOBI

**par Abdelmejid BAYAD**

---

## 0. Introduction et résultats.

B. Riemann, avant sa mort le 20 juillet 1866, avait confié ses manuscrits à R. Dedekind. Parmi ceux-ci, il y avait deux notes qui traitaient de la théorie des fonctions elliptiques de Jacobi. En s'appuyant sur ces deux papiers, R. Dedekind avait publié une note [8], sur l'application de la méthode de B. Riemann au problème de l'étude du comportement de la fonction eta

$$\eta(\tau) \stackrel{\text{dfn}}{=} q_\tau^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_\tau^n)\,, \text{ où } q_\tau = e^{2\pi i\tau},\ \operatorname{Im}\tau > 0. \tag{0.1}$$

Il faut signaler qu'auparavant, Jacobi et Hermite ont déjà considéré cette fonction dans leurs travaux. Mais c'est R. Dedekind qui l'a le plus étudiée et elle porte, d'ailleurs, son nom. Plus particulièrement, en faisant agir le groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{dfn}}{=} \{\tau \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \tau \in \mathcal{H}, \tag{0.2}$$

---

*Mots-clés* : Sommes de Dedekind - Formes de Jacobi - Eta - Loi de réciprocité - Fonction thêta - Fonction de Klein - Fonction de Weierstrass - Formule des résidus - Classes de cohomologie.
*Classification math.* : 11M36 - 11F50 - 11F20 - 11A15 - 11G16 - 11F67 - 14K25 - 55N91 - 55N34.

R. Dedekind montre que $\eta$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante, *cf.* [1, Supplement to Chap 3] : pour $c > 0$ on a

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \epsilon(a,b,c,d)\left(\frac{c\tau+d}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau) \tag{0.3}$$

où l'on a posé

$$\epsilon(a,b,c,d) = e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - S(d,c)\right)} \tag{0.4}$$

et

(0.5)

$$S(d,c) = \sum_{x=1}^{c-1}\left(\left(\frac{x}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dx}{c}\right)\right), \text{ et } ((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

À partir de cette équation fonctionnelle, il déduit sa fameuse loi de réciprocité suivante :

$$S(p,q) + S(q,p) = \frac{p^2+q^2+1}{12pq} - \frac{1}{4}, \text{ pour } p > 0,\ q > 0 \text{ et } (p,q) = 1. \tag{0.6}$$

En outre, pour $q$ entier fixé dans $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$x \mapsto \left(\left(\frac{x}{q}\right)\right), \text{ pour } x \in \mathbb{Z}. \tag{0.7}$$

En appliquant les techniques de la théorie de l'analyse de Fourier à cette dernière fonction, on obtient alors

$$\left(\left(\frac{x}{q}\right)\right) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\frac{e^{\frac{2\pi ik}{q}}}{1-e^{\frac{2\pi ik}{q}}} + \frac{1}{2}\right)e^{\frac{2\pi ikx}{q}}, \text{ cf. [13].} \tag{0.8}$$

Ceci permet de réécrire la somme de Dedekind $S(p,q)$ à l'aide de la fonction cotangente

$$S(p,q) = \frac{1}{4q}\sum_{k=1}^{q-1}\cot\left(\frac{\pi k}{q}\right)\cot\left(\frac{\pi pk}{q}\right) q \in \mathbb{N}^*. \tag{0.9}$$

À partir de cette nouvelle formulation des sommes de Dedekind, D. Zagier [34] en donne la généralisation suivante : étant donnés $n+1$ entiers naturels non nuls $p, a_1, ..., a_n$ et premiers deux à deux avec $n$ pair, on pose

$$d(p; a_1, ..., a_n) = (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\cot\left(\frac{\pi k a_1}{p}\right) ... \cot\left(\frac{\pi k a_n}{p}\right). \tag{0.10}$$

Puis, il donne une généralisation de la loi de réciprocité de Dedekind qui s'énonce comme suit :

$$\sum_{j=0}^{n} d(a_j; a_0, ..., \hat{a}_j, ..., a_n) = 1 - \frac{l_n(a_0, ..., a_n)}{a_0 ... a_n}$$

où $l_n(a_0,...,a_n) = L_k(p_1,...,p_k)$, $k = \frac{n}{2}$ où $p_i$, $i = 1,...k$, est le i-ème polynôme élémentaire symétrique en $a_0$,...,$a_n$ et $L_k$ le polynôme de Hirzebruch [17] connu par les topologistes.

Il est important de signaler que les sommes de Dedekind ont plusieurs applications dans divers domaines :

– lois de réciprocité quadratiques [27], le calcul du nombre des classes des corps quadratiques et les fonctions L [28];

– l'étude du problème des nombres aléatoires (ou pseudo-aléatoires) [10], la formule de partition de Hardy-Ramanujan [16], [31];

– la formule d'indice de Hirzebruch, évaluant la signature de certains invariants d'homologie de variétés différentielles à l'aide de la fonction cotangente. Cette formule est généralisée par Atiyah et Singer qui ont trouvé une formule pour la signature équivariante, [2], [4], [17], [18], [19], [32], [35];

– en géométrie algébrique (Théorème de Riemann-Roch) [3], [14], [15].

Pour plus d'informations sur les applications en théorie des nombres se reporter au livre [20].

Par conséquent, il me paraît intéressant de donner et d'étudier un analogue elliptique aux sommes de Dedekind classiques. C'est l'objectif de ce papier et nous nous proposons de prouver une loi de réciprocité satisfaite par ces nouvelles sommes.

D'une façon précise, soit $L = [\omega_1, \omega_2]$ un réseau complexe, où $\{\omega_1, \omega_2\}$ en est une base orientée *i.e.* $\mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$. On associe à $L$ une forme de Jacobi $D_L(z;\varphi)$ étudiée dans [5] et [6], périodique de périodes $L$ en la seconde variable, et analytique en la première variable, normalisée par $\lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi) = 1$. À partir de cette forme $D_L(z;\varphi)$ nous construisons des sommes de Dedekind multiples et nous étudions leurs propriétés. Le résultat principal de ce travail est que ces sommes satisfont une loi de réciprocité à la Dedekind. D'autre part, en les spécialisant en des paramètres de points de 2-division, en la seconde variable $\varphi$, du tore complexe $\mathbb{C}/L$, on obtient les résultats de S. Egami [11] . En outre, lorsqu'on fait tendre $\mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}$ vers $\infty$, on retrouve la loi de réciprocité de Dedekind satisfaite par les sommes multiples construites à l'aide de la fonction cotangente, c'est le résultat principal de l'article de D. Zagier [34] .

Notre résultat est à rapprocher de celui de R. Sczech [32], qui à la place de la fonction cotangente utilise les séries d'Eisentein

$$E_k(x) = \sum_{w\in L}^{e}(w+x)^{-k}|w+x|^{-s}\Big|_{s=0}, \; k=0,1,... \tag{0.12}$$

où la sommation $\sum_{w\in L}^{e}$ est celle d'Eisenstein et on considère la somme

$$D(a,c) = \frac{1}{c}\sum_{k\in L/cL} E_1\left(\frac{k}{c}\right)E_1\left(\frac{ak}{c}\right) \tag{0.13}$$

et on montre que

$$D(a,c)+D(c,a) = 2iE_2(0)\operatorname{Im}\left(\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}+\frac{c}{a}\right), \; c\neq 0 \tag{0.14}$$

$$\forall a,c \in O_L \overset{\text{dfn}}{=} \{x\in\mathbb{C} | xL\subset L\}.$$

La démonstration de cette identité se base sur la formule d'addition vérifiée par la fonction zêta de Weierstrass. De cette loi de réciprocité R. Sczech [32] déduit des applications concernant les travaux de Harder [14], [15] sur certaines classes de cohomologie représentées par les séries d'Eisenstein.

Le plan de ce travail s'articule en trois parties : dans la première nous exposons quelques préliminaires essentiels pour l'énoncé de nos résultats. Dans la seconde partie, nous énonçons nos résultats, et leurs démonstrations sont exposées dans la troisième partie. Un commentaire sera fourni à la fin de cet article, pour signaler l'apparition naturelle de nouveaux invariants "elliptiques", $M_{n,\tau}(a_0;a_1,...,a_n;\varphi)$, dans nos formules.

Je tiens à remercier Philippe Cassou-Noguès pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et ses nombreuses remarques et suggestions qui m'ont été profitables. Je remercie également le rapporteur pour ses commentaires et critiques pertinentes.

## 1. Quelques préliminaires.

Soient $(\tau,z,\varphi)\in\mathbb{C}^3$, avec $\operatorname{Im}\tau>0$. On pose $q_\tau = e^{2\pi i\tau}$, $q_z = e^{2\pi iz}$, $L=[\tau,1]$ et $\tau=\frac{w_1}{w_2}$. On définit le produit triple de Jacobi $\theta_\tau$ par

$$\theta_\tau(z) \overset{\text{dfn}}{=} q_\tau^{\frac{1}{8}}(e^{\frac{z}{2}}-e^{\frac{-z}{2}})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n)(1-q_\tau^n e^z)(1-q_\tau^n e^{-z}) \tag{1.1}$$

qui peut être aussi défini par la série

$$\theta_\tau(z) \overset{\text{dfn}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q_\tau^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}e^{(n+\frac{1}{2})z}. \tag{1.2}$$

Pour cette équivalence on se réfère à [30, p. 17 et p. 69-71].

On introduit la fonction de Klein $\mathcal{K}_L(z)$ qui peut être définie par la série

(1.3)
$$\frac{2\pi i}{\omega_2}\mathcal{K}_L(z) \overset{\text{dfn}}{=} q_z^{\frac{\mathrm{Im}(z)}{2|\omega_2|^2\mathrm{Im}(\tau)}} q_\tau^{\frac{-1}{8}} \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n)^{-3}\right] \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q_\tau^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2} q_{\frac{z}{\omega_2}}^{n+\frac{1}{2}},$$

*cf.* [6].

Elle est plus communément décrite par le produit infini

$$\mathcal{K}_L(z) \overset{\text{dfn}}{=} z e^{-\frac{1}{2}zz^*} \prod_{\ell\in L,\ell\neq 0}\left(1-\frac{z}{\ell}\right)e^{\frac{z}{\ell}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2} \tag{1.4}$$

où, écrivant $z = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note $z^* = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ pour $\eta_1$ et $\eta_2$ les périodes de “deuxième espèce” associées aux périodes de “première espèce” $\omega_1$ et $\omega_2$ (*cf.* [23]). L'application $z \mapsto zz^*$ et, donc d'après (1.4), la fonction $z \mapsto \mathcal{K}_L(z)$ ne dépendent pas du choix de la base $(w_1, w_2)$ de $L$, telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$.

*Démonstration.* — Se reporter à [6].

Comme l'application $z \mapsto zz^*$ ne dépend pas du choix de la base $(w_1, w_2)$ orientée de $L$, alors

LEMME 1.5. — *La fonction $\mathcal{K}_L(z)$ est homogène de degré 1 i.e.,*

$$\mathcal{K}_{\lambda L}(\lambda z) = \lambda\mathcal{K}_L(z).$$

De plus, les fonctions $\mathcal{K}_L(z)$ et $\theta_\tau(z)$ sont liées par la formule suivante :

LEMME 1.6. — *Soit $L = [\omega_1, \omega_2]$ un réseau complexe, où $\mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$. On a*

$$\mathcal{K}_L(z) = \frac{\omega_2}{2\pi i} \quad q_z^{\frac{\mathrm{Im}(z)}{2|\omega_2|^2\mathrm{Im}(\tau)}} \quad \frac{\theta_\tau(u)}{\theta'_\tau(0)} \quad \text{où} \quad u = \frac{2\pi i z}{\omega_2},$$

*(voir [6, §1]).*

D'autre part, on connaît l'action du groupe modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur la fonction $\theta_\tau$. Plus précisément, on a

THÉORÈME 1.7 (Formule de transformation). — *Pour tout* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, *on a*

$$\theta_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-1}\exp\left(\pi i\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\right)\theta'_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(0)\frac{\theta_\tau(z)}{\theta'_\tau(0)}.$$

*Démonstration.* — Pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on remarque que

$$\left\{\begin{array}{ll} \tau = & d(a\tau+b) - b(c\tau+d); \\ 1 = & ad - bc. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

Donc, $[\tau, 1] = [a\tau + b, c\tau + d]$. Par conséquent,

$$\mathcal{K}_{[\frac{a\tau+b}{c\tau+d},1]}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right) = \mathcal{K}_{(c\tau+d)^{-1}[a\tau+b,c\tau+d]}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right).$$

Par homogénéité, lemme 1.5, on obtient

$$\mathcal{K}_{[\frac{a\tau+b}{c\tau+d},1]}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-1}\mathcal{K}_{[a\tau+b,c\tau+d]}(z)$$

et compte tenu des relations (1.5) et (1.8), on conclut que

$$\mathcal{K}_{[\frac{a\tau+b}{c\tau+d},1]}\left(\frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-1}\mathcal{K}_{[\tau,1]}(z). \tag{1.9}$$

Finalement le théorème 1.7 se déduit du lemme 1.6 et de la formule (1.9). Maintenant, introduisons les formes de Jacobi $D_L(z;\varphi)$ associées au réseau $L$.

DÉFINITION 1.10. — *Soit $L = [\omega_1, \omega_2]$ où $\mathrm{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$. On définit $D_\tau(z;\varphi)$ par*

$$D_L(z;\varphi) = \frac{2\pi i}{\omega_2} q_{\frac{z}{\omega_2}}^{\frac{\mathrm{Im}(\frac{\varphi}{\omega_2})}{\mathrm{Im}\tau}} \frac{\theta_\tau'(0)\theta_\tau(u+v)}{\theta_\tau(u)\theta_\tau(v)}, z, \varphi \in \mathbb{C} - L$$

*où l'on a posé $u = \frac{2\pi i}{w_2} z$, $v = \frac{2\pi i}{w_2}\varphi$ , $\tau = \frac{w_1}{w_2}$. Aussi, elle s'exprime d'une manière équivalente à l'aide de $\mathcal{K}_L$*

$$D_L(z,\varphi) = \exp\pi i(E_L(z,\varphi)).\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}, \tag{1.11}$$

*où*

$$E_L(z,\varphi) = \frac{\mathrm{Im}\,(\bar{z}\varphi)}{\mathrm{Im}\,\tau}.$$

*Remarque 1.12.* — Cette dernière formule permet de voir l'indépendance de $D_L(z,\varphi)$ du choix de la base orientée de $L$ et aussi son homogénéité de degré -1.

*Attention :* Dans toute la suite, pour raison de simplicité, on ne considère que le réseau $L = [\tau, 1]$ et on notera $D_\tau(z,\varphi)$ au lieu de $D_L(z,\varphi)$.

La forme $D_\tau$ vérifie plusieurs propriétés intéressantes :

PROPOSITION 1.13. — i) *$D_\tau$ est périodique, en la seconde variable, de périodes le réseau $L$ et méromorphe en la première variable et vérifie l'équation fonctionnelle suivante :*

$$D_\tau(z+\rho,\varphi) = \exp(2\pi i E_L(\rho,\varphi)) D_\tau(z,\varphi) \text{ pour tout } \rho \in L.$$

ii) *Pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a*

$$D_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{\varphi}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d) D_\tau(z;\varphi).$$

iii) *(Produit fini) Pour $z, \varphi \in \mathbb{C} - L$, on a*

$$D_\tau(z,\varphi) = 2\pi i q_z^{\frac{\mathrm{Im}\varphi}{\mathrm{Im}\tau}} \frac{\left(q_{z+\varphi}^{\frac{1}{2}} - q_{z+\varphi}^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(q_z^{\frac{1}{2}} - q_z^{-\frac{1}{2}}\right)\left(q_\varphi^{\frac{1}{2}} - q_\varphi^{-\frac{1}{2}}\right)}$$
$$\prod_{n\geqslant 1} \frac{(1-q_\tau^n)^2(1-q_\tau^n q_{z+\varphi})(1-q_\tau^n q_{z+\varphi}^{-1}}{(1-q_\tau^n q_z)(1-q_\tau^n q_z^{-1})(1-q_\tau^n q_\varphi)(1-q_\tau^n q_\varphi^{-1})}.$$

*Démonstration.* — Pour le i) se reporter à [6].

Démontrons le ii), soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{\varphi}{c\tau+d}\right) = q_z^{\frac{1}{c\tau+d}\frac{\mathrm{Im}(\frac{\varphi}{c\tau+d})}{\mathrm{Im}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})}} \frac{\theta'_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(0)\theta_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(\frac{z+\varphi}{c\tau+d})}{\theta_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(\frac{z}{c\tau+d})\theta_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}(\frac{\varphi}{c\tau+d})}.$$

Grâce au théorème 1.7, on conclut que

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\left(\frac{z}{c\tau+d}; \frac{\varphi}{c\tau+d}\right)$$

est égale à

$$q_z^{\frac{1}{c\tau+d}\frac{\mathrm{Im}(\varphi(c\bar\tau+d))}{\mathrm{Im}(\tau)}} \exp \pi i c\left[\frac{(z+\varphi)^2 - z^2 - \varphi^2}{c\tau+d}\right] \frac{\theta'_\tau(0)\theta_\tau(z+\varphi)}{\theta_\tau(z)\theta_\tau(\varphi)}.$$

Puis, on utilise le fait que $\mathrm{Im}\, x = \frac{x-\bar x}{2i}, x \in \mathbb{C}$, ce qui permet de finir la démonstration de la proposition 1.13.

PROPOSITION 1.14 (Racine carrée tordue). — *On a, pour tous $z, \varphi \in \mathbb{C} - L$, la formule différence suivante :*

$$\wp_L(z) - \wp_L(\varphi) = D_\tau(z,\varphi) D_\tau(z,-\varphi),$$

*où $\wp_L(z)$ est la fonction de Weierstrass définie par la série suivante :*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{l\in L, l\neq 0}\left[\frac{1}{(z-l)^2} - \frac{1}{l^2}\right].$$

En effet, d'après (1.11) on peut écrire

$$\begin{aligned} D_\tau(z,\varphi)D_\tau(z,-\varphi) = & \exp\pi i(E_L(z,\varphi))\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)} \\ & \exp\pi i(E_L(z,-\varphi))\frac{\mathcal{K}_L(z-\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(-\varphi)} \\ = & \frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}\frac{\mathcal{K}_L(z-\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(-\varphi)} \\ = & -\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)\mathcal{K}_L(z-\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)^2\mathcal{K}_L(\varphi)^2}. \end{aligned}$$

D'après (1.1) et le théorème 2 §1 Chap 18 de [26], on déduit que

$$D_\tau(z,\varphi)D_\tau(z,-\varphi) = \wp_L(z) - \wp_L(\varphi).$$

*Remarque 1.15.* — Lorsque $\varphi$ est un paramètre de point de 2-division non nul du tore $\mathbb{C}/L$, on a, pour tout $z \in \mathbb{C} - L$, la formule racine carrée suivante :

$$\wp_L(z) - \wp_L(\varphi) = D_\tau(z,\varphi)^2.$$

Ce résultat se déduit des propositions 1.13 et 1.14.

## 2. Énoncé des résultats.

Ce paragraphe contient les principaux résultats de ce travail. Étant donnés $n$ indéterminées $a_1$, $a_2$,..., $a_n$ non nulles premières deux à deux et $p$ entier $\geqslant 1$ premier avec chaque $a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on introduit l'ensemble

$$E_p = \{x\tau + y, (x,y) \neq (0,0), 0 \leqslant x, y \leqslant p-1\}$$

et on définit la somme suivante :
(2.1)

$$d_\tau(p;a_1,\dots,a_n;\varphi) \overset{\text{dfn}}{=} \frac{1}{p}\sum_{w\in E_p}\exp(2\pi i E_L(w,\varphi))D_\tau\!\left(\frac{a_1 w}{p};\varphi\right)\dots D_\tau\!\left(\frac{a_n w}{p};\varphi\right).$$

On désigne par $M_{n,\tau}(p;a_1,\dots,a_n;\varphi)$ le coefficient de $z^n$ dans le développement de $z^{n+1}D_\tau(pz;\varphi)\prod_{k=1}^n D_\tau(a_k z;\varphi)$ en fonction de $z$, ou encore le résidu en $z = 0$ de la fonction $D_\tau(pz;\varphi)\prod_{k=1}^n D_\tau(a_k z;\varphi)$. Alors ces sommes satisfont la relation suivante :

THÉORÈME 2.2 (Loi de réciprocité). — *Soient $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux. Soit $d$ un* *entier naturel diviseur de $a_0 + ... + a_n$. Alors, pour tout $\varphi$ paramètre de point de d-division non nul de $\mathbb{C}/L$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} d_\tau(a_k; a_0, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n; \varphi) = -M_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi).$$

Une autre variante de ce théorème peut être énoncée comme suit :

THÉORÈME 2.2 BIS (Loi de réciprocité). — *Soient $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux. Soit $d$ un entier naturel diviseur de $n+1$. Alors, pour tout $\varphi$ paramètre de point de d-division non nul de $\mathbb{C}/L$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} d_\tau\left(a_k; a_0, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n; \frac{\varphi}{a_k}\right) = -\tilde{M}_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi)$$

*où $\tilde{M}_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi)$ est le résidu en $z = 0$ de la fonction*

$$\prod_{k=0}^{n} D_\tau\left(a_k z; \frac{\varphi}{a_k}\right).$$

Par conséquent, d'après la remarque 1.15 , on a le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.3 . — *Soient $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux tel que $a_0 + ... + a_n$ est pair. Alors, pour $\varphi = \frac{1}{2}$ paramètre de point de 2-division de $\mathbb{C}/L$, le théorème 2.2 est équivalent au théorème 1 de [11, §3].*

En effet, d'après la remarque 1.15 on a l'égalité

$$D_\tau\left(z; \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\wp_L(z) - \wp_L(\tfrac{1}{2})}.$$

Cette dernière fonction correspond exactement à la fonction $2\pi i\varphi(\tau, 2\pi i z)$ considérée par S. Egami [11] pour obtenir son résultat principal [11, Th 1, §3]. En effet, à partir du théorème 2.2, la définition 1.12 et la proposition 1.13 i), on obtient : $\forall z, \varphi \in \mathbb{C} - L$, on a

$$(2.4)\qquad D_\tau\left(z, \frac{1}{2}\right) = \pi i \frac{q_z^{\frac{1}{2}} + q_z^{-\frac{1}{2}}}{q_z^{\frac{1}{2}} - q_z^{-\frac{1}{2}}} \prod_{n \geqslant 1} \frac{(1 - q_\tau^n)^2 (1 + q_\tau^n q_z)(1 + q_\tau^n q_z^{-1})}{(1 - q_\tau^n q_z)(1 - q_\tau^n q_z^{-1})(1 + q_\tau^n)^2}.$$

Comme la fonction $D_L(z, \varphi)$ est homogène de degré -1, alors la fonction $\varphi(\tau, z)$, étudiée par S. Egami [11], est exactement égale à

$$\frac{1}{2\pi i} D_\tau\left(\frac{z}{2\pi i}, \frac{1}{2}\right) = D_{2\pi i L}(z, \pi i).$$

D'autre part, la quantité

$$\frac{p}{(2\pi i)^n} d_\tau\left(p; a_1, ..., a_n, \frac{1}{2}\right)$$

correspond à la somme de Dedekind introduite par S. Egami [11] :

$$D_\tau(p; a_1, ..., a_n).$$

Une autre conséquence du théorème 2.2, réside dans le fait qu'on peut retrouver la loi de réciprocité de Dedekind associée aux sommes multiples classiques étudiées dans [34]. D'une manière précise, on a

COROLLAIRE 2.5. — *Soient $p$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux. On suppose que $p + a_1 + ... + a_n$ est pair. Alors, pour $\varphi = \frac{1}{2}$ paramètre de point de 2-division de $\mathbb{C}/L$, on a*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \cot\left(\frac{\pi k a_1}{p}\right) ... \cot\left(\frac{\pi k a_n}{p}\right) = \frac{p}{\pi^n} \lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} d_\tau\left(p; a_1, ..., a_k, ..., a_n; \frac{1}{2}\right) + (-1)^{\frac{n}{2}+1} p \sum_{t=1}^{p-1} (-1)^{\left(t+[\frac{a_1 t}{p}]+...+[\frac{a_n t}{p}]\right)}.$$

Donc, à partir du corollaire 2.5, on peut donner des formulations nouvelles des résultats de D. Zagier [34].

*Démonstration.* — En effet, pour $z = 2\pi i(x\tau + y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} D_{2\pi i L}(z, \pi i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{1+[x]} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2i}\cot(\pi y) & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Grâce à la proposition 1.13 et au théorème 2.2, le corollaire 2.5 s'obtient par passage à la limite, en faisant $\mathrm{Im}(\tau) \to \infty$.

## 3. Démonstration des résultats.

Démontrons le théorème 2.2. On introduit la fonction suivante :

$$f_n(\tau, z, \varphi) = \prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k z; \varphi). \tag{3.1}$$

On sait, d'après la proposition 1.13, que $f_n$ est méromorphe par rapport à $z$, doublement périodique par rapport à $\varphi$ dont l'ensemble des périodes contient le réseau $L$. De plus, grâce à la proposition 1.13 on a

$$f_n(\tau, z+\rho, \varphi) = \exp\left(2\pi i E_L(\rho, (a_0 + ... + a_n)\varphi)\right) f_n(\tau, z, \varphi), \forall \rho \in L. \tag{3.2}$$

Comme $\varphi$ est un point de $d$-division et $d$ divisant $a_0+...+a_n$, alors le facteur exponentiel vaut $+1$. D'où la périodicité de $f_n$ en la deuxième variable dont l'ensemble des périodes contient le réseau $L$. Donc, $f_n(\tau, z, \varphi)$ est elliptique par rapport à la deuxième variable. Par conséquent, la somme des résidus de $f_n(\tau, z, \varphi)$, en la deuxième variable, sur un domaine fondamental du tore complexe $\mathbb{C}/L$ vaut zéro.

Pour appliquer le théorème des résidus à cette fonction, considérons le domaine fondamental $\{x\tau + y; 0 \leqslant x, y < 1\}$. On a alors la formule de résidus suivante :

LEMME 3.3. — *Soient $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ entiers naturels non nuls et premiers deux à deux. Soit $d$ un diviseur de $a_0 + ... + a_n$. On a alors, pour tout $\varphi$ paramètre de point de d-division non nul de $\mathbb{C}/L$ :*

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{x\tau+y\in E_{a_k}} \mathrm{Res} f_n(\tau, z, \varphi)|_{z=a(k,x,y)} = -\mathrm{Res}\, f_n(\tau, z, \varphi)|_{z=0}$$

*où $a(k, x, y) = \frac{x\tau+y}{a_k}, k = 0, ..., n$.*

*Démonstration.* — En effet, en zéro, le résidu de la fonction $f_n(\tau, ., \varphi)$ vaut $M_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi)$. Précisons maintenant les autres pôles et les résidus de $f_n(\tau, ., \varphi)$ en ces pôles, ils sont représentés par

$$z_k = \frac{\rho}{a_k}, \text{ où } \rho \in \{x\tau + y, (x, y) \neq (0, 0), 0 \leqslant x, y \leqslant a_k - 1\}. \tag{3.4}$$

Comme $a_1$, $a_2$,..., $a_n$ sont premiers deux à deux, alors ces pôles sont simples et le résidu de $f_n(\tau, z, \varphi)$ en $z_k = \frac{\rho}{a_k}$ vaut

$$\frac{1}{a_k}\exp\pi\left(\frac{a_k\bar{z}_k\varphi - a_k z_k\bar{\varphi}}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)\prod_{j=0,j\neq k}^{n} D_\tau(a_j z_k; \varphi).$$

En effet,

$$\mathrm{Res}\, D_\tau(a_k z, \varphi)|_{z=a(k,x,y)} = \frac{1}{a_k}\,\mathrm{Res}\, D_\tau(z, \varphi)|_{z=x\tau+y}$$

et d'après la proposition 1.13, on obtient

$$\mathrm{Res}\, D_\tau(a_k z, \varphi)|_{z=a(k,x,y)} = \frac{1}{a_k}\,\exp\left(2\pi i E_L(\rho, \varphi)\right).$$

En conclusion, la somme des résidus pour les pôles non nuls vaut

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_k}\sum_{\rho\in E_{a_k}}\exp\pi\left(\frac{\bar{\rho}\varphi - \rho\bar{\varphi}}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)\prod_{j=0,j\neq k}^{n} D_\tau\left(a_j\frac{\rho}{a_k}; \varphi\right) \tag{3.5}$$

et est égale à

$$-M_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi).$$

En combinant 1.12, la proposition 1.13, la définition 2.1 et l'égalité 4.5, on obtient le théorème 2.2.

La preuve du théorème 2.2 bis est similaire à celle du théorème 2.2, il suffit de considérer $f_n(\tau, z, \varphi) = \prod_{k=0}^{n} D_\tau\left(a_k z; \frac{\varphi}{a_k}\right)$.

*Commentaire.* — L'objet intéressant qui apparaît dans nos formules, théorème 2.2, est $M_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \varphi)$.

En effet, pour $\varphi = \frac{1}{2}$, Egami [11] a vérifié que $M_{n,\tau}(a_0; a_1, ..., a_n; \frac{1}{2})$ est un polynôme symétrique en $a_0;a_1,...,a_n$ et nul lorsque $n$ est impair. Ce qui permet de l'écrire en fonction des $p_0$, $p_1, ..., p_n$, où $p_i$ est le i-ème polynôme symétrique élémentaire en $a_0^2,...,a_n^2$. Plus précisément,

$$M_{n,\tau}\left(a_0; a_1, ..., a_n; \frac{1}{2}\right) = K_{n,\tau}(p_0, p_1, ..., p_n)$$

où, justement, $K_{n,\tau}$ est un polynôme qui apparaît dans la théorie du genre elliptique [19].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] T. M. APOSTOL, Introduction to analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] M.F. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH, Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen, Math. Z., 77 (1961), 149-187.

[3] M.F. ATIYAH, F. HIRZEBRUCH, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), 276-281.

[4] M.F. ATIYAH, I.M. SINGER, The index of elliptic Operators, Ann. of. Math., 87 (1968), 546-604.

[5] A. BAYAD, G. ROBERT, Amélioration d'une congruence pour certains éléments de Stickelberger quadratiques, Bull. Soc. Math. France, 125 (1997), 249-267.

[6] A. BAYAD, G. ROBERT, Note sur une forme de Jacobi méromorphe, C.R.A.S., Paris, 325 (1997), 455-460.

[7] H. COHEN, Sommes de carrés, fonctions L et formes modulaires, C.R.A.S., Paris, 277 (1973), 827-830.

[8] H. COHEN, Sums involving the values at negative integers of $L$-functions of quadratic characters, Math. Ann., 217 (1975), 271-285.

[9] R. DEDEKIND, Erlauterungen zu zwei Fragmenten von riemann, Ges. math. Werke, erster Band, Braunschwei: Friedrich Vieweg, 1930, 159-173.

[10] U. DIETER, Pseudo-random numbers: the exact distribution of pairs, Math. of Computation, 25 (1971).

[11] S. EGAMI, An elliptic analogue of multiple Dedekind sums, Compositio Math., 99 (1995), 99-103.

[12] M. EICHLER, D. ZAGIER, The Theory of Jacobi forms, Progress in Math., 55, Birkhauser, 1985.

[13] E. GROSSWALD, H. RADEMACHER, Dedekind Sums, Carus Mathematical Monographs, No.16, Mathematical Assoc. America, Washington D.C, 1972.

[14] G. HARDER, Periods Integrals of Cohomology Classes which are represented by Eisenstein Series, Proc. Bombay Colloquium, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

[15] G. HARDER, Periods Integrals of Eisenstein Cohomology Classes which and special values of somes L-functions, Number theory related to Fermat's last theorem, pp.103-142. In Koblitz, N. (ed.) Boston-Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1982.

[16] G. H. HARDY, S. RAMANUJAN, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc., (2), 17 (1918), 75-115.

[17] F. HIRZEBRUCH, Topological methods in algebraic geometry, Third Enlarged Edition, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1966.

[18] F. HIRZEBRUCH, The signature theorem: reminiscences and recreation, Prospects in Mathematics, Ann. of Math. Studies, 70, 3-31, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[19] F. HIRZEBRUCH, T. BERGER and R. JUNG, Manifolds and Modular forms, Aspects of Math., E.20, Vieweg, 1992.

[20] F. HIRZEBRUCH and D. ZAGIER, The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory, Math.Lecture Series 3, Publish or Perish Inc., 1974.

[21] H. ITO, A function on the upper halfspace which is analogous to imaginary of $\log\eta(z)$, J. reine angew. Math., 373 (1987), 148-165.

[22] H. ITO, On a property of elliptic Dedekind sums, J. Number Th., 27 (1987), 17-21.

[23] D. KUBERT, Product formulae on elliptic curves, Inv. Math., 117 (1994), 227–273.

[24] D. KUBERT, S. LANG, Modular units, Grundlehren der Math. Wiss. 244, Springer-Verlag, 1981.

[25] P. S. LANDWEBER, Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology, Proceeding Princeton 1986, Lectures Notes in Mathematics, 1362, Berlin–Heidelberg, Springer, 1988.

[26] S. LANG, Elliptic functions, Addison-Wesley, 1973.

[27] C. MEYER, Uber einige Anwendungen Dedekindscher Summen, J. reine angew. Math., 198 (1957), 143-203.

[28] C. MEYER, Uber die Bildung von Klasseninvarianten binarer quadratischer Formen mittels Dedekinkscher Summen, Abh. math. sem. Univ. Hamburg, 27, Heft 3/4 (964), 206-230.

[29] L.J. MORDELL, The reciprocity formula for Dedekind sums, Amer. J. Math., 73 (1951), 593-598.

[30] D. MUMFORD, Tata Lectures on Theta I, Progress in Math. 28, Birkhauser, 1983.

[31] H. RADEMACHER, On the partition function $p(n)$, Proc. London Math. Soc., (2), 43 (1937), 241-254.

[32] R. SCZECH, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, Invent. Math., 76 (1984), 523-551.

[33] D. ZAGIER, Periods of modular forms and Jacobi theta functions, Invent. Math., 104 (1991), 449-465.

[34] D. ZAGIER, Higher order Dedekind sums, Math. Ann., 202 (1973), 149-172.

[35] D. ZAGIER, Note on the Landweber-Stong Elliptic Genus, Lectures Notes in Mathematics, Berlin-Heidelberg, Springer, 1362 (1988), 216-224.

Manuscrit reçu le 8 mars 2000,
accepté le 31 mai 2000.

Abdelmejid BAYAD,
Université d'Evry
Département de Mathématiques
Boulevard des Coquibus
91025 Évry Cedex (France).
bayad@lami.univ-evry.fr