



## DE

# L'INSTITUT FOURIER

Denis SERRE

Sur la stabilité des couches limites de viscosité

Tome 51, nº 1 (2001), p. 109-129.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF\_2001\_\_51\_1\_109\_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

# cedram

Article mis en ligne dans le cadre du Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques http://www.cedram.org/

## SUR LA STABILITÉ DES COUCHES LIMITES DE VISCOSITÉ

par Denis SERRE

#### Introduction.

Nous considérons dans cet article un système de lois de conservation, en une variable d'espace, posé dans le domaine x > 0,

(1) 
$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x, \quad x, t > 0.$$

Le flux  $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , ainsi que le tenseur de viscosité  $B : \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ . Nous considérons le problème mixte, où (1) est complété par une condition initiale

$$u(x,0)=u_0(x),$$

et une condition de Dirichlet

(2) 
$$u(0,t) = a(t).$$

Le système (1) est particulièrement intéressant dans l'étude de la convergence de la méthode de viscosité pour le système réduit

(3) 
$$u_t + f(u)_x = 0, \quad x > 0.$$

Mots-clés : Couches limites – Fonction d'Evans.

 $Classification\ math.: 35K50 - 35P99 - 35L65 - 35L50 - 35B25 - 35B35.$ 

Cette méthode consiste à ajouter au second membre un terme qui modélise les effets dissipatifs du modèle physique sous-jacent. Dans la limite des processus quasi-réversibles, ces effets sont faibles, de sorte que les nouveaux termes sont en facteur d'un coefficient petit  $\epsilon \ll 1$ , destiné à tendre vers zéro. Le système perturbé a donc la forme, toujours conservative,

(4) 
$$u_t^{\epsilon} + f(u^{\epsilon})_x = \epsilon (B(u^{\epsilon})u_x^{\epsilon})_x.$$

Dans un tel problème, d'ordre deux en espace, une condition aux limites de Dirichlet est naturelle (une condition mixte, invoquant les traces de u et de  $\epsilon u_x$  est plausible également, et se traite de la même façon qu'ici) :

$$u^{\epsilon}(0,t) = b(t).$$

Cette égalité ne subsiste pas lorsqu'on fait tendre  $\epsilon$ vers zéro, ce qu'on peut traduire par le principe général bien connu

$$\lim_{x \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} u^{\epsilon}(x,t) \neq \lim_{\epsilon \to 0+} \lim_{x \to 0+} u^{\epsilon}(x,t)$$

La discrépance entre les deux types de limites est due à une couche limite, c'est-à-dire à une variation de  $u^{\epsilon}$ , de l'ordre de l'unité, dans un voisinage du bord de taille petite. Lorsque le bord n'est pas caractéristique (voir plus loin pour cette notion), on s'attend à une taille de l'ordre de  $\epsilon$ , et à une description

(5) 
$$u^{\epsilon}(x,t) \sim \begin{cases} U(x/\epsilon,t), & 0 < x = \mathcal{O}(\epsilon), \\ \bar{u}(x,t), & x >> \epsilon. \end{cases}$$

La fonction U est appelée profil de la couche limite. Elle satisfait un problème sur déterminé pour une EDO

(6) 
$$B(U)U' = f(U) - f(\bar{u}(0,t)),$$

(7) 
$$U(0,t) = b(t), \quad U(+\infty,t) = \bar{u}(0,t).$$

Le champ  $\bar{u}$  est solution d'un problème mixte pour le système réduit (3), de condition initiale

$$\bar{u}(\cdot,0) = \lim_{\epsilon \to 0} u^{\epsilon}(\cdot,0),$$

la condition aux limites étant donnée par la condition de compatibilité (notée sous la forme  $\bar{u}(0,t) \in \mathcal{C}(b(t))$  dans [6], [5]) pour (6,7).

L'étude des profils possibles, qui fournit l'ensemble C(b), est un problème d'équation différentielle ordinaire, qui est plus ou moins difficile,

selon la taille n du système et la nature des non-linéarités. La description de C(b) au voisinage de b a été faite dans [6], [5] et quelques exemples non-triviaux ont pu être résolus complètement<sup>1</sup>. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction ici.

Lorsque  $\mathcal{C}(b)$  est bien déterminé, le problème mixte qui gouverne l'évolution de  $\bar{u}$  peut être étudié avec les techniques de [11]. Celui-ci étant génériquement bien posé sous une hypothèse d'hyperbolicité (ce qui n'est plus vrai en plusieurs variables d'espace),  $\bar{u}$  est en général déterminé de manière unique dans une bande  $t \in (0,T)$ . Cette solution, de classe  $\mathcal{C}^1$ lorsque les données le permettent, ne peut pas être prolongée indéfiniment en raison de l'apparition de discontinuités (ondes de choc).

La pertinence du développement (5) est l'objet de théorèmes de convergence. Dans le contexte présent, en une seule variable d'espace, la convergence de  $u^{\epsilon}$  pour la norme de  $L^{\infty}(0, T^*; L^2(\mathbb{R}^+))$  est démontrée dans [5], [6]. Ce résultat est étendu en plusieurs variables d'espace dans [8], où un développement à tous les ordres en  $\epsilon$  est aussi obtenu (voir aussi [15]). Cependant, dans tous les énoncés, la convergence n'est prouvée que tant que l'amplitude de la couche limite ne dépasse pas un certain seuil. C'est pourquoi le temps de convergence  $T^*$  peut ne pas être égal au temps d'existence T de  $\bar{u}$ . Le but de cet article est de montrer que cette distinction n'est pas due à une faiblesse de la démonstration. On pourrait penser naïvement que le fait de pouvoir calculer  $\bar{u}$  et U, et donc les termes successifs du développement asymptotique, entraîne la convergence de  $u^{\epsilon}$ vers  $\bar{u}$ . La non-linéarité des équations rend la situation bien plus complexe et nous verrons que certaines couches limites, d'amplitude assez grande, sont instables.

La question de la stabilité de la couche limite est la suivante. Soit Uune solution de l'équation différentielle B(U)U' = f(U) - f(c), vérifiant  $U(+\infty) = c$ . C'est donc une couche limite pour des données appropriées. Étant donnée une condition initiale  $u(x,0) = U(x/\epsilon) + \delta(x/\epsilon)$ , pour le système (4), la solution du problème mixte avec condition de Dirichlet  $u(0,t) \equiv U(0)$  est-elle proche de  $U(\cdot/\epsilon)$  sur un intervalle de temps indépendant de  $\epsilon$ , lorsque  $\delta$  est petit? Le premier élément de réponse est apporté par une linéarisation autour du profil, qui fournit le problème

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> La description de C(b) au voisinage d'un point quelconque vient d'être faite par F. Rousset : Inviscid boundary conditions and stability of boundary layers. Asymptotic Analysis, à paraître.

d'évolution

(8) 
$$v_t = L^{\epsilon} v, \qquad x, t > 0,$$

(9) 
$$v(0,t) = 0, t > 0,$$

(10) 
$$v(x,0) = \delta(x/\epsilon), \qquad x > 0.$$

Dans ce problème d'évolution, l'opérateur  $L^{\epsilon}$  est à coefficients variables et dépend aussi de  $\epsilon$ , d'une part à cause du paramètre de diffusion, d'autre part à cause de U, lorsqu'une non-linéarité est présente. On constate qu'un changement de variables  $(x,t) \mapsto (y,\tau) := (x/\epsilon, t/\epsilon)$  ramène (8,9,10) à un système à coefficients constants

$$V_t = LV, \quad V(0, au) = 0, \quad V(y,0) = \delta(y).$$

Ici, L n'est rien d'autre que l'opérateur obtenu par linéarisation de  $u \mapsto (B(u)u' - f(u))'$ , autour de U. Admettons pour l'instant que la restriction du spectre de  $L : H^2 \cap H^1_0(\mathbb{R}^+) \to L^2(\mathbb{R}^+)$  au demi-plan  $\Re z > 0$  est constituée de valeurs propres isolées. Notons  $\lambda$  une telle valeur propre, s'il en existe une. Alors, pour une perturbation générique  $\delta$ , le comportement de V est une croissance exponentielle, de l'ordre de  $\tau \Re \lambda$ . Pour v, cela se traduit par un ordre gigantesque

$$\frac{t\Re\lambda}{\epsilon}$$

En un temps très petit, par exemple  $t \sim \epsilon$ , la solution u subit une modification aussi grande que le profil lui-même. Une telle couche limite ne peut donc subsister, ni même être observée. A fortiori, la convergence est impossible.

Nous dirons donc que le profil  $U(\cdot;T_0)$  est linéairement stable si le spectre de l'opérateur L, de domaine  $H^2 \cap H^1_0(\mathbb{R}^+)$ , est entièrement contenu dans le demi-espace  $\Re \lambda \leq 0$ . Comme l'instabilité éventuelle se manifeste en un temps  $\mathcal{O}(\epsilon)$ , il est naturel de geler la variable de temps dans le profil. C'est pourquoi la notion de stabilité concerne chaque profil  $U(\cdot;t)$ , plutôt que la couche limite  $U(\cdot;\cdot)$  dans son ensemble.

On peut comparer le type d'instabilité décrit ci-dessus avec celui des profils de viscosité pour les ondes de choc du système (3). Les démonstrations de convergence de la solution du problème de Cauchy pour (4), vers une solution  $\bar{u}$  de (3) comportant des chocs sans interaction, supposent toujours que l'amplitude des chocs n'est pas trop grande (voir par exemple [7], [14] et les références citées). De même, l'existence

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

112

de profils d'interaction choc-choc ou couche limite-choc est obtenue sous une hypothèse de petitesse [12]. Les profils de choc, comme les couches limites, peuvent être instables lorsque leur amplitude est grande. La stabilité linéarisée de ces profils a été étudiée dans [4], au moyen de la fonction d'Evans; des critères géométriques d'instabilité ont été explicités. Une étude analogue, qui concerne les profils discrets des ondes de choc, est menée dans [3] et [13]. Nous adoptons ci-dessous la même stratégie, en construisant une fonction d'Evans adaptée à notre problème.

Le plan de cet article est le suivant. À la section 1, on décrit les hypothèses naturelles, on montre que les modes instables sont dûs uniquement à des valeurs propres et on caractérise celles-ci comme les zéros d'une fonction holomorphe, la fonction d'Evans; on étudie enfin la dépendance de la stabilité pour des familles à un paramètre de profils. La section 2 contient l'étude générale de la valeur de la fonction d'Evans à l'origine (asymptotique des grandes longueurs d'ondes), et des calculs explicites lorsque c'est possible. La section 3 contient des exemples de profils pour lesquels le nombre de valeurs propres instables est soit pair, soit impair. Dans ce dernier cas, le profil est instable. Notons qu'un exemple ad hoc de profil instable, dû à O. Guès, G. Métivier et J. Rauch, se trouve dans [8]; il est cependant peu satisfaisant pour notre étude car il concerne un système quasilinéaire qui n'est pas conservatif. À notre connaissance, l'exemple construit ici, qui peut concerner la dynamique des gaz isentropiques (avec une diffusion inhabituelle cependant), est le premier exemple de profil instable de couche limite pour un système de lois de conservation<sup>2</sup>. Enfin, la section 4 complète l'analyse et contient un critère géométrique explicite pour l'instabilité des profils lorsque n = 2.

#### 1. La fonction d'Evans.

#### 1.1. Hypothèses.

Suivant [4], nous faisons les hypothèses suivantes :

(H0)  $f_j, B_{jk} \in \mathcal{C}^2$ .

 $<sup>^2</sup>$  Voir D. Serre, K. Zumbrun : Boundary layer stability in real vanishing viscosity limit – Prépublication, novembre 2000 – pour un autre exemple, mais ayant une signification physique.

- (H1) Les valeurs propres de B(u) sont de partie réelle strictement positive, pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ .
- (H2) Pour l'état  $u_W$  (la limite du profil en  $+\infty$ ), la matrice jacobienne  $df(u_W)$  est diagonalisable à valeurs propres réelles.
- (H3) De plus,  $df(u_W)$  est inversible.
- (H4) Il existe  $\theta > 0$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , les valeurs propres de la matrice  $i\xi df(u_W) + \xi^2 B(u_W)$  soient de partie réelle supérieure à  $\theta\xi^2$ .

Ces hypothèses signifient respectivement que le problème (1) est régulier, qu'il est parabolique, que (3) est hyperbolique en  $u_W$ , que le bord est non-caractéristique et enfin que l'état  $u_W$  est  $L^2$ -linéairement stable pour (1). Ces hypothèses sont minimales et autorisent l'étude de systèmes pour lesquels (3) n'est pas strictement hyperbolique.

Un cas particulier important pour lequel les hypothèses (H2,4) sont satisfaites est celui où le système (1) admet un symétriseur dissipatif en  $u_W$ :

(H5) Il existe une matrice réelle symétrique  $\Sigma$ , définie positive, telle que  $\Sigma df(u_W)$  soit symétrique et  $X^T \Sigma B(u_W) X \ge \theta ||X||^2$ .

En pratique, (H5) a lieu dès que (1) admet une entropie dissipative :

(H5') Il existe une fonction  $u \mapsto E$ , associée à un flux  $u \mapsto F$ , vérifiant

$$egin{aligned} dF = dEdf & ext{et, en } u_W, \quad D^2E > 0, \ D^2E(BX,X) \geqslant heta \|X\|^2, \quad orall X \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ci-dessus,  $D^2 E$  désigne la matrice hessienne de E.

Dans toute la suite, on suppose (H0),...,(H4). On mentionnera l'hypothèse (H5) chaque fois que ce sera nécessaire.

#### 1.2. Le spectre essentiel.

Nous considérons donc une solution  $x \mapsto U(x)$  du système différentiel

(11) 
$$U' = B(U)^{-1}(f(U) - f(u_W)) =: g(U), \quad x \in [0, +\infty[,$$

telle que  $U(+\infty) = u_W$ . L'opérateur linéarisé que nous considérons est

$$L[v] := \frac{d}{dx} \left( B \circ U \frac{dv}{dx} + ((dB \circ U) \cdot v) \frac{dU}{dx} - (df \circ U)v \right).$$

Son domaine est  $H^2 \cap H^1_0(\mathbb{R}^+)$ . Par un abus de notation, on écrira aussi

$$L[v] = rac{d}{dx} \left( B(x) rac{dv}{dx} - A(x)v 
ight),$$

où  $x \mapsto A(x), B(x)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathcal{C}^2$ .

L'hypothèse **(H3)** exprime que  $dg(u_W) = B(u_W)^{-1} df(u_W)$  est inversible. Par ailleurs **(H4)** assure que  $dg(u_W)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure. Le point stationnaire  $u_W$  de g est ainsi hyperbolique (au sens des systèmes dynamiques). Le profil U varie donc sur la variété stable  $W^s(u_W)$  de  $u_W$ . Pour fixer les idées, nous désignons par

$$\lambda_1(u_W) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p(u_W) < 0 < \lambda_{p+1}(u_W) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(u_W)$$

l'ensemble des valeurs propres de  $df(u_W)$ . Par un argument de continuation, on montre que  $dg(u_W)$  a exactement p valeurs propres, comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans le demi-plan  $\Re \lambda < 0$ . Ainsi dim  $W^s(u_W) = p$ et on a

(12) 
$$||U(x)|| + ||U'(x)|| + ||U''(x)|| = \mathcal{O}(e^{\omega x}),$$

où  $\omega < 0$ .

Il est classique (voir [10] par exemple) que le spectre  $\sigma(L)$  contient celui de  $L_W$ , l'opérateur à coefficients constants, de domaine  $H^1(\mathbb{R})$ , défini par

$$L_W[v] := B(u_W)v'' - df(u_W)v'.$$

Le spectre de  $L_W$  est une courbe algébrique  $\Gamma_W$ , constitué des valeurs propres des matrices

$$-\xi^2 B(u_W) - i\xi df(u_W), \quad \xi\in \mathbb{R}.$$

Celles-ci sont dans le demi-plan  $\Re \lambda < 0$  lorsque  $\xi \neq 0$ , d'après (H4).

Étant donnée une composante connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_W$ , l'intersection  $\sigma(L) \cap \Omega$  est ou bien égale à  $\Omega$  tout entier, ou bien la réunion de valeurs propres isolées (voir [9]). Dans le cas de la composante  $\Omega_+$  qui contient le demi-plan  $\Re \lambda > 0$ , il n'y a que des valeurs propres isolées, car, d'après l'inégalité de Gårding,  $\Re \lambda$  est majorée sur  $\sigma(L)$ .

En conclusion, la seule source d'instabilité forte dans le spectre de L est constituée des éventuelles valeurs propres  $\lambda$  de partie réelle strictement positive, et celles-ci sont isolées. L'application  $\lambda \mapsto (L - \lambda)^{-1}$ est méromorphe de  $\Omega_+$  dans  $\operatorname{End}(L^2(\mathbb{R}^+))$ .

#### DENIS SERRE

#### 1.3. Le lemme de l'écart.

Les résultats de ce paragraphe sont dûs à [4], à l'exception de la proposition 1.2, due à [2], dont seul le cas particulier n = 2 se trouve dans [4].

Nous considérons maintenant l'opérateur  $L-\lambda,$  où  $\lambda\in\mathbb{C}$  avec  $\Re\lambda>0.$  L'équation

(13) 
$$(L-\lambda)v = 0$$

est réécrite comme une équation linéaire du premier ordre

(14) 
$$V' = A(x;\lambda)V$$

avec

$$V := \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}, \quad A(x;\lambda) := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ B^{-1}(\lambda + A') & B^{-1}(A - B') \end{pmatrix}$$

Lorsque  $x \to +\infty$ , cette matrice converge exponentiellement vite vers

$$A_W(\lambda) := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ \lambda B(u_W)^{-1} & B(u_W)^{-1} df(u_W) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A_W(\lambda)$  sont les racines  $\mu \in \mathbb{C}$  de l'équation

(15) 
$$\det(\mu^2 B(u_W) - \mu df(u_W) - \lambda I_n) = 0.$$

D'après (H4), aucune d'entre elle n'est imaginaire pure. Par un argument de continuité, on en déduit que *n* d'entre elles sont de part et d'autre de l'axe imaginaire. Nous notons  $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda)$  celles dont la partie réelle est négative. Les fonctions  $\lambda \mapsto \mu_j(\lambda)$  sont continues sur  $\Omega_+$ , holomorphes en dehors des points où les multiplicités changent.

On peut donc définir de manière unique le sous-espace vectoriel stable  $S_W(\lambda)$  de  $A_W(\lambda)$ , de dimension *n*. C'est l'ensemble des vecteurs  $V_0 \in \mathbb{C}^{2n}$  tels que la solution *V* de l'équation différentielle

$$V' = A_W(\lambda)V, \quad V(0) = V_0$$

tende vers zéro en  $+\infty$ ; autrement dit

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x A_W(\lambda)} V_0 = 0.$$

L'application  $\lambda \mapsto S_W(\lambda)$  est holomorphe sur  $\Omega_+$ , à valeurs dans la grassmannienne des sous-espaces de dimension n de  $\mathbb{C}^{2n}$ . Pour voir cela de façon pratique, considérons la matrice  $A_W^{(n)}(\lambda)$  induite par  $A_W(\lambda)$  sur la composante  $\Lambda_n(\mathbb{C}^{2n})$  de l'algèbre extérieure  $\Lambda(\mathbb{C}^{2n})$ , par

$$A_W^{(n)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_N) := (A_W(\lambda)X_1) \wedge \ldots \wedge X_N + \cdots + X_1 \wedge \ldots \wedge (A_W(\lambda)X_N).$$

Cette matrice a une unique valeur propre, simple, de partie réelle minimale, à savoir

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(\lambda) =: \bar{\mu}(\lambda)$$

Cette valeur propre est donc une fonction holomorphe de  $\lambda$  et on peut choisir un vecteur propre  $\eta(\lambda)$  de façon holomorphe. Celui-ci est décomposable :  $\eta$  s'exprime sous la forme  $V_1(\lambda) \wedge \cdots \wedge V_n(\lambda)$ , où les  $V_j(\lambda)$ engendrent  $S_W(\lambda)$ . Les fonctions  $\lambda \mapsto V_j(\lambda)$  sont continues de  $\Omega_+$  dans  $\mathbb{C}^{2n}$ .

Nous utiliserons les deux résultats importants ci-dessous.

PROPOSITION 1.1. — Les applications  $\lambda \mapsto S_W(\lambda), \eta(\lambda)$  admettent un prolongement holomorphe dans un voisinage de l'origine.

On prendra garde, cependant, que le prolongement de  $S_W(\lambda)$  ne fournit pas en général un sous-espace stable de  $A_W(\lambda)$ , lorsque  $\lambda$  n'est plus dans  $\Omega_+$ .

PROPOSITION 1.2. — Sous l'hypothèse (H5), et pour  $\Re \lambda > 0$ , l'intersection de  $S_W(\lambda)$  et de  $\mathbb{C}^n \times \{0\}$  est réduite à  $\{0\}$ .

On montre que, pour  $\lambda \in \Omega_+$ , l'ensemble des solutions de (14) qui tendent vers zéro en  $+\infty$  est un espace vectoriel de dimension n. Notant  $S(x; \lambda)$  sa trace en chaque point x > 0, on a de plus

$$\lim_{x \to +\infty} S(x;\lambda) = S_W(\lambda).$$

À nouveau, (14) induit une équation différentielle sur  $\Lambda_n(\mathbb{C}^{2n})$ , par

(16) 
$$\eta' = A(x;\lambda)^{(n)}\eta.$$

L'espace des solutions qui tendent vers zéro en  $+\infty$  comme  $\exp(x\bar{\mu}(\lambda))$  est de dimension un, engendré par l'unique solution  $\eta(x;\lambda) : \mathbb{R}^+ \to \Lambda_n(\mathbb{C}^{2n})$ de (16), vérifiant

$$\eta(x;\lambda) \sim e^{\bar{\mu}(\lambda)x}\eta(\lambda).$$

À nouveau,  $\eta(x; \lambda)$  est holomorphe par rapport à  $\lambda$ . Le fait que  $A(x; \lambda)$  converge exponentiellement vite vers  $A_W(\lambda)$  quand  $x \to +\infty$ , ajouté à la proposition 1.1 (séparation géométrique), permet de prolonger  $\eta(x; \lambda)$  (et donc  $S(x; \lambda)$ ) à un voisinage de l'origine, comme fonction holomorphe. C'est le Lemme de l'écart ("gap lemma"). Ce prolongement satisfait encore l'équation (16).

Notons que, lorsque  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , la matrice  $A(x; \lambda)$  est réelle, de sorte qu'il est possible de choisir  $\eta(\lambda)$  réel; comme  $\bar{\mu}(\lambda)$  est réel lui aussi,  $\eta(x; \lambda)$ est à valeurs réelles. De même, les  $V_j(\lambda)$  peuvent être choisis réels. Avec ce choix, il ne constituent pas nécessairement une base propre, par exemple lorsque  $A_W(\lambda)$  admet des valeurs propres non réelles.

Nous pouvons maintenant définir la fonction d'Evans du problème aux limites. Elle n'est pas intrinsèque, car elle dépend du choix de  $\eta(\lambda)$ : On considère d'abord un *n*-vecteur associé au sous-espace  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ , par exemple

$$\eta_0 := e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n},$$

où  $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^{2n}$ . On pose alors

$$D(\lambda) := \eta(0; \lambda) \wedge \eta_0,$$

qui est un élément de  $\Lambda_{2n}(\mathbb{C}^{2n}) \sim \mathbb{C}$ . La restriction de D à  $]0, +\infty[$  est à valeurs réelles. Le rôle de cette fonction dans l'étude de la stabilité linéarisée de U est expliqué par l'énoncé suivant.

PROPOSITION 1.3.— Les valeurs propres de L dans  $\Omega_+$ , pour la condition aux limites de Dirichlet, sont les zéros de D.

En effet, D s'annule lorsque l'intersection de  $S(0; \lambda)$  avec  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ n'est pas réduite à  $\{0\}$ , c'est-à-dire lorsqu'il existe une solution non triviale de (13), nulle en x = 0, tendant vers zéro en  $+\infty$ . Cette dernière condition équivaut, puisque  $\lambda \in \Omega_+$ , à  $v \in L^2(\mathbb{R}^+)$ .

En pratique, suivant la stratégie employée dans [4], nous décomposerons  $\eta(x; \lambda)$  sous la forme  $V_1(x; \lambda) \wedge \cdots \wedge V_n(x; \lambda)$ , où les  $V_j(\cdot; \lambda)$  sont des solutions indépendantes de (14), continues par rapport à  $\lambda$  mais pas nécessairement holomorphes. Toutes ces fonctions seront en fait définies pour  $\lambda \in \Omega_+ \cup B(0; \epsilon)$ , pour un  $\epsilon > 0$ . Écrivant alors

$$V_j(x;\lambda) = egin{pmatrix} v_j(x;\lambda) \ v_j'(x;\lambda) \end{pmatrix},$$

on a

$$D(\lambda) = \det(v_1(0;\lambda),\ldots,v_n(0;\lambda)).$$

Il n'est pas en général possible de calculer explicitement la fonction d'Evans, ce qui reviendrait à calculer explicitement les valeurs propres d'un opérateur différentiel assez quelconque. Aussi la stratégie utilisée dans [4] consiste à comparer les signes de D sur l'axe réel, aux voisinages des points  $\lambda = 0$  et  $\lambda = +\infty$ . Une différence essentielle avec le cas des profils d'ondes de choc est que dans un cas, D s'annule en zéro parce que U' est une fonction propre associée à  $\lambda = 0$ , tandis qu'ici, il n'en est rien en général. En fait, il n'y a pas d'invariance par translation pour le problème aux limites, et U'(0) n'a pas de raison d'être nul. Dans [4], les auteurs évaluent donc le signe de D'(0), alors que nous calculerons ici celui de D(0).

Lorsque D(0) n'est pas nul, le signe de  $D(0)D(\lambda)$ , pour  $\lambda \gg 1$  réel (ce que nous notons  $\operatorname{sgn} D(0)D(+\infty)$ ) détermine la parité du nombre de valeurs propres instables de L (celles avec  $\Re \lambda > 0$ ). En effet,  $L - \lambda$  est de Fredholm, d'indice nul; la multiplicité d'une valeur propre a donc un sens. On peut alors démontrer [13] que cette multiplicité est égale à la multiplicité de  $\lambda$  comme racine de D. Autrement dit, D joue le rôle d'un polynôme caractéristique de L. En particulier, les valeurs propres dans  $\Omega_+$ sont isolées et de multiplicités finies. Comme L est sectoriel, les valeurs propres instables sont donc en nombre fini. Le nombre de valeurs propres réelles positives, comptées avec leurs ordres de multiplicité, est pair si  $D(0)D(+\infty) > 0$ , impair dans le cas contraire. Quant aux valeurs propres non réelles, elles sont en nombre pair puisque  $D(\bar{\lambda}) = \overline{D(\lambda)}$ .

Nous dirons donc que l'opérateur L est pair (respectivement impair) si  $D(0)D(+\infty) > 0$  (resp. < 0). Si D(0) = 0, nous dirons qu'il est neutre. L'imparité de L implique l'instabilité du profil de couche limite U. En revanche, aucune conclusion ne peut être tirée du fait que L soit pair.

#### 1.4. Familles de profils.

Étant donné un profil U de couche limite, nous pouvons considérer la solution maximale  $\tilde{U}$  de (11), qui étend U:

$$\tilde{U}(x) = U(x), \quad \forall x > 0.$$

Soit  $I = ]x_-, +\infty[$  l'intervalle de définition de  $\tilde{U}$ . On a  $x_- < 0$ . Pour  $x_0 \in I$ , la restriction  $U_0$  de  $\tilde{U}$  à la demi-droite  $[x_0, +\infty]$  est encore un profil de

couche limite, dans le domaine  $x > x_0$  et pour la condition aux limites  $u(x_0,t) = \tilde{U}(x_0)$ . Par une translation  $x \mapsto x - x_0$ , on peut toujours se ramener au domaine fixe x > 0.

Les fonctions  $v_j(\cdot; \lambda)$ , utilisées au paragraphe précédent, peuvent être prolongées comme solutions de  $(\tilde{L} - \lambda)v_j = 0$  à tout l'intervalle *I*, car cette équation est linéaire, à coefficients réguliers. Pour construire la fonction d'Evans (que nous notons dorénavant  $D(\lambda; x_0)$ ) associée au profil  $U_0$ , il suffit alors de poser

$$D(\lambda; x_0) := \det(v_1(x_0; \lambda), \dots, v_n(x_0; \lambda)).$$

La parité de  $L_0$ , opérateur linéarisé autour de  $U_0$ , de domaine  $H^2 \cap H^1_0(x_0; +\infty)$ , est déterminée par le signe de  $D(0; x_0)D(+\infty; x_0)$ . Nous verrons plus loin que le signe de  $D(+\infty; x)$  est constant sur *I*. La parité de  $L_0$ , lorsque  $x_0$  varie ( $U_0$  décrit alors une famille à un paramètre de profils) est donc gouvernée par le signe de la fonction

$$\Delta(x) := D(0; x) = \det(v_1(x; 0), \dots, v_n(x; 0)).$$

Lorsque  $\Delta$  change de signe en un point  $x^*$ , l'opérateur  $L_*$  associé au profil  $U_*$  est neutre. La parité de l'opérateur  $L_0$  change, parce qu'une valeur propre traverse l'axe imaginaire en  $\lambda = 0$ . C'est l'un des processus possibles de la transition vers l'instabilité. L'autre processus est le passage d'une paire de valeur propres conjuguées à travers l'axe imaginaire, mais celuici ne peut pas être diagnostiqué au moyen de  $\Delta$ . Notons que les valeurs propres instables ne peuvent pas disparaître en s'échappant à l'infini, parce que  $L_0$  est sectoriel, uniformément lorsque  $x_0$  parcourt un intervalle compact.

### **2. Le signe de** D(0).

Nous notons  $x \mapsto w_j$  les fonctions  $v_j(\cdot; 0)$ . Ces fonctions ont été décrites dans [4]. Tout d'abord, ce sont des solutions de  $\tilde{L}w = 0$ . On a donc

(17) 
$$Bw'_j - Aw_j \equiv y_j,$$

où  $y_i$  est un vecteur constant.

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

120

Un moyen de choisir la base des  $w_j$  consiste à examiner le comportement des valeurs propres  $\mu_j(\lambda)$  pour  $\lambda$  petit, et à leur associer une fonction  $w_j$  à chacune. Pour simplifier l'exposé, nous faisons ici une hypothèse légèrement plus restrictive sur f en  $u_W$ :

(H2') La matrice jacobienne  $df(u_W)$  a toutes ses valeurs propres réelles et simples.

On peut donc ordonner strictement les valeurs propres de  $df(u_W)$  et choisir un vecteur propre  $r_j$  pour chacune :

$$df(u_W)r_j = \lambda_j(u_W)r_j.$$

Notons aussi  $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$  les valeurs propres de  $dg(u_W) = B(u_W)^{-1} df(u_W)$ ,  $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$  étant celles de partie réelle négative. Lorsque  $\lambda \to 0+$ , les nombres  $\mu_i(\lambda)$  ont le comportement suivant :

$$\mu_j(\lambda) \sim \left\{egin{array}{cc} \gamma_j, & 1 \leqslant j \leqslant p, \ -\lambda/\lambda_j(u_W), & p+1 \leqslant j \leqslant n. \end{array}
ight.$$

On peut alors choisir  $w_i$  de sorte que

$$\lim_{x \to +\infty} w_j(x) = 0, \quad 1 \le j \le p,$$

avec en particulier  $w_1 = U'$ , tandis que

$$\lim_{x \to +\infty} w_j(x) = r_j, \quad p+1 \leqslant j \leqslant n.$$

On obtient donc

$$y_j = \begin{cases} 0, & 1 \leq j \leq p, \\ -\lambda_j(u_W)r_j, & p+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Nous allons maintenant montrer qu'un calcul explicite de  $\Delta$  est possible dans au moins trois cas.

#### **2.1.** Le cas p = n.

Lorsque p = n, nous avons  $Bw'_j = Aw_j$  pour tout j. Le determinant  $\Delta$  est donc un wronskien et ne peut pas s'annuler. La parité de l'opérateur  $L_0$  ne dépend donc pas du choix de l'abcisse  $x_0$  du bord du domaine. On vérifie que  $L_0$  est pair pour  $x_0 >> 1$ , et on en conclut que  $L_0$  est pair pour tout  $x_0 \in I$ .

TOME 51 (2001), FASCICULE 1

,

La parité de  $L_0$  pour  $x_0$  grand vient du fait que le profil  $U_0$  est alors de faible amplitude, donc est stable d'après [5], [6], au moins sous l'hypothèse **(H5)**. Un calcul direct avec  $\Delta$  est évidemment possible, lorsque **(H5)** n'a pas lieu.

Pour de telles couches limites, où toutes les caractéristiques sortent du domaine, on voit donc que L est inversible. La transition vers l'instabilité ne peut donc se produire que lors de la traversée de l'axe imaginaire par une paire de valeurs propres complexes conjuguées. On ne connaît pas actuellement d'exemple de ce phénomène, mais aucun argument ne permet de l'exclure pour l'instant.

#### **2.2.** Le cas $U \equiv u_W$ .

Lorsque la condition aux limites coïncide avec  $u_W$ , on a  $U \equiv u_W$ . Par exemple, c'est le seul cas possible si p = 0, car  $u_W$  est un foyer répulsif du système dynamique (6). L'opérateur linéarisé est alors à coefficients constants. L'espace vectoriel  $S(x; \lambda)$  coïncide en tout point avec  $S_W(\lambda)$ . Ainsi,  $D(\lambda)$  s'annule si et seulement si  $S_W(\lambda)$  rencontre  $\mathbb{C}^n \times \{0\}$  de manière non triviale. D'après la proposition 1.2, l'hypothèse (H5) assure donc la stabilité linéarisée des couches limites constantes. Lorsque (H5') a lieu, on peut en fait, en suivant l'analyse de [6], montrer que la couche limite est non-linéairement stable dans  $L^2(\mathbb{R}^+)^n$ . Lorsque  $B \equiv I_n$ , mais l'hypothèse plus faible (H5) est satisfaite, cette stabilité non-linéaire est démontrée dans [8].

#### **2.3.** Le cas n = 2, p = 1.

Si n = 2, alors  $p \leq 2$ . Comme les cas p = 0, p = 2 sont résolus dans les paragraphes précédents, nous supposons que p = 1. Nous avons donc  $w_1 = U'$ , qui satisfait  $Bw'_1 = Aw_1$ , tandis que  $Bw'_2 = Aw_2 + y_2$ . Dérivons par rapport à x:

$$\Delta'(x) = \det(w_1', w_2) + \det(w_1, w_2'),$$

ce qui donne

$$(\det B)\Delta' = \det(Aw_1, Bw_2) + \det(Bw_1, Aw_2 + y_2) = (\det B)\{\det(B^{-1}Aw_1, w_2) + \det(w_1, B^{-1}Aw_2 + B^{-1}y_2)\},\$$

c'est-à-dire

(18) 
$$\Delta' = \operatorname{Tr}(B^{-1}A)\Delta + \det(U', B^{-1}y_2).$$

Nous pouvons donc calculer explicitement  $\Delta$  en connaissant son comportement asymptotique en  $+\infty$ . Pour cela, nous remarquons d'abord que  $\gamma_1$  étant l'unique valeur propre de  $dg(u_W)$  avec  $\Re \gamma < 0$ , celle-ci doit être réelle. Un vecteur propre associé  $s_1$  est déterminé par l'asymptotique de U':

(19) 
$$U'(x) \sim e^{\gamma_1 x} s_1, \quad x \to +\infty.$$

Ainsi,

(20) 
$$\Delta(x) \sim e^{\gamma_1 x} \det(s_1, r_2),$$

où le second membre n'est pas nul, sous l'hypothèse **(H5)**. Comme la solution de l'équation non-homogène  $Y' = \text{Tr}(B^{-1}A)Y$  se comporte à l'infini comme  $(\gamma_1 + \gamma_2)x$ , devant lequel  $\Delta$  est négligeable, la propriété (20) et l'équation différentielle permettent d'écrire la formule

(21) 
$$\Delta(x) = \lambda_2(u_W) \int_x^{+\infty} \det(U'(y), B^{-1}(y)r_2) \left(\int_y^x \operatorname{Tr}(B^{-1}A)d\xi\right) dy.$$

Ceci s'écrit, de manière équivalente,

$$\Delta = \lambda_2(u_W) \det(Z, r_2),$$
(22)
$$Z(x) := \int_x^{+\infty} (\det B)^{-1} (f(U) - f(u_W)) \left( \int_y^x \operatorname{Tr}(B^{-1}A) d\xi \right) dy.$$

#### 3. Exemples.

#### 3.1. Un exemple pair.

Nous considérons ici le système défini par le flux

$$f(u):=igg( egin{array}{c} u_2\ \sigma(u_1) \end{array}igg),$$

avec  $\sigma' > 0$ , qui assure l'hyperbolicité. Nous choisissons une diffusion B(u) diagonale, donc à termes positifs. On a p = 1, n = 2. De plus,  $Tr(B^{-1}A) \equiv 0$ , de sorte que

$$Z(x) = \lambda_2(u_W) \int_x^{+\infty} U' \frac{dy}{\det B}.$$

Les deux composantes de U' sont de signes opposés. Il en est donc de même de Z. En revanche, un calcul élémentaire montre que  $r_2$  est à composantes strictement positives. On en déduit que  $\Delta$  ne s'annule jamais. La parité de  $L_0$  ne change donc pas lorsque l'abcisse  $x_0$  du bord varie. Comme  $U_0$  est stable pour  $x_0 \gg 1$ , on en déduit que  $L_0$  est pair, pour tout choix de  $x_0$  dans I.

#### 3.2. Un cas d'instabilité.

Considérons un système hyperbolique de la forme (3), constitué de n = 2 équations. On suppose que ce système admet un 1-choc de Lax stationnaire de  $u_E$  vers  $u_W$ . Par exemple, la dynamique d'un gaz isentropique ou isotherme convient. Par hypothèse, on a donc  $\lambda_1(u_E) >$  $0 > \lambda_1(u_W)$  et  $\lambda_2(u_W) > 0$ . Nous supposons de plus qu'il existe un profil de viscosité pour ce choc, associé au tenseur *B*. Ce sera notre profil  $\tilde{U}$ . On a à nouveau p = 1.

Remarquant que  $(B^{-1}A)(u_E)$  a ses deux valeurs propres de partie réelle strictement positives, nous les supposons complexes conjuguées, non réelles. Notons  $\gamma$  l'une d'entre elles.

La condition de Rankine-Hugoniot s'écrivant  $f(u_E) = f(u_W), \tilde{U}$  satisfait

$$B\tilde{U}' = f(\tilde{U}) - f(u_E),$$

ce qui montre que, quand  $x \to x_0 = -\infty$ ,

$$\tilde{U}' = \Re(e^{x\gamma}\zeta) + \mathcal{O}(e^{x(\Re\gamma + \epsilon)}),$$

où  $\zeta \in \mathbb{C}^*$  et  $\epsilon > 0$ . Il s'ensuit que

$$\det(\tilde{U}', B^{-1}y_2) = \Re(e^{x\gamma}\theta) + \mathcal{O}(e^{x(\Re\gamma+\epsilon)}),$$

où  $\theta \in \mathbb{C}^*$ . Utilisant alors l'équation (18), nous en déduisons

$$\Delta(x) = \Re\left(e^{x\gamma}\frac{\gamma\theta}{|\gamma|^2}\right) + \mathcal{O}(e^{x(\Re\gamma+\epsilon)}),$$

pour  $x \to -\infty$ .

Ce calcul montre que  $\Delta$  change de signe (une infinité de fois) lorsque xdécroît. Comme la parité de  $L_0$  change avec le signe de  $\Delta(x_0)$ , on en déduit qu'il existe une infinité d'intervalles disjoints  $]X_{2j+1}, X_{2j}[$ , dans lesquels choisir  $x_0$  fournit un profil de couche limite  $U_0$  instable.

Bien entendu, il est plausible que le profil  $U_0$  soit instable pour tout choix de  $x_0$  inférieur à  $X_0$ , le nombre de valeurs propres instables augmentant d'une unité chaque fois que  $x_0$  traverse  $X_j$  en décroissant. Mais le calcul ci-dessus ne permet pas de l'affirmer. Un calcul plus poussé permettrait sans doute de montrer l'apparition d'une valeur propre instable réelle à chaque traversée d'un  $X_j$ . Cependant, notre technique ne permet pas d'éliminer le cas où une paire de valeurs propres instables complexes conjuguées retraverse l'axe imaginaire. Ce processus pourrait fournir des profils stables  $U_0$  pour des valeurs de  $x_0$  prises dans certains sous-intervalles des  $|X_{2j}, X_{2j-1}|$ .

#### 3.3. Une construction.

Nous montrons maintenant que la construction du paragraphe précédent est possible et compatible avec les hypothèses (H0),...,(H5').

Nous commençons par prendre un système  $2 \times 2$  strictement hyperbolique, pour lequel le premier champ caractéristique est vraiment non linéaire, la valeur propre correspondante s'annulant pour certaines valeurs de l'état. Il y a donc des 1-chocs stationnaires de faible amplitude. Pour la viscosité artificielle (choix  $B \equiv I_2$ ), on sait que de tels chocs admettent un profil. On choisit donc un tel profil, noté  $\hat{U}$ , dont les extrémités sont notées  $u_E, u_W$ . On suppose enfin que le système admet une entropie strictement convexe E. La dynamique des gaz isentropiques convient donc parfaitement.

Par un choix convenable des coordonnées, on peut supposer que  $df(u_E)$  est diagonale. Comme sa base propre est orthogonale relativement à  $D^2E(u_E)$ , cette matrice est aussi diagonale. Par un changement de coordonnées respectant les axes, on peut donc aussi imposer  $D^2E(u_E) = I_2$ .

Nous allons maintenant modifier le choix de B dans un voisinage de  $u_E$ , ce qui aura pour effet de modifier le profil. Nous commençons par choisir un nombre b > 0 tel que, pour  $u = u_E$ ,

$$|b| |\lambda_1 - \lambda_2| < 2\lambda_1 \lambda_2.$$

On définit alors une matrice

$$M := \begin{pmatrix} \lambda_2 & b \\ -b & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices M et  $Mdf(u_E)$  sont positives, au sens où, pour tout  $X \neq 0$ , (MX, X) > 0 et  $(Mdf(u_E)X, X) > 0$ . Par ailleurs, les valeurs propres de  $Mdf(u_E)$  sont complexes conjuguées non réelles.

Par hypothèse, il existe une boule  $B(u_E; \epsilon)$ , avec  $\epsilon > 0$ , dans laquelle le champ de vecteurs  $f - f(u_E)$  est sortant. Soit  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  une fonction positive, valant un au voisinage de zéro et à support dans ] - 1, 1[. Posant

$$\phi_\epsilon(u) := 
ho\left(rac{\|u-u_E\|}{\epsilon}
ight),$$

nous définissons

$$B(u)^{-1} = C(u) = \begin{cases} (1 - \phi_{\epsilon})I_2 + \phi_{\epsilon}M, & u \in B(u_E; \epsilon), \\ I_2, & u \notin B(u_E; \epsilon). \end{cases}$$

Par construction, la matrice  $C(u_E)$  est positive, et ceci reste vrai pour C(u) pour tout u, si  $\epsilon$  est assez petit. Ainsi, B satisfait l'hypothèse **(H5')**.

Le champ de vecteurs intervenant dans l'équation du profil est donc

$$g(u) = C(u)(f(u) - f(u_E)).$$

Hors de  $B(u_E; \epsilon)$ , il coïncide avec  $f - f(u_E)$ , dont  $\hat{U}$  est une courbe intégrale. Le profil cherché  $\tilde{U}$  est la courbe intégrale de g qui, hors de  $B(u_E; \epsilon)$ , coïncide avec  $\hat{U}$ . Montrons que, pour un choix de  $\epsilon$  suffisamment petit, on a

(23) 
$$(g(u), u - u_E) > \alpha ||u - u_E||^2,$$

pour tout  $u \in B(u_E; \epsilon)$ , avec  $\alpha > 0$ . Ainsi, nous aurons dans cette boule

$$\frac{d}{dx} \|u - u_E\|^2 = 2(g(u), u - u_E) > \alpha \|u - u_E\|^2.$$

Ceci implique

$$\lim_{x\to -\infty} \tilde{U}(x) = u_E,$$

puisque  $\tilde{U}$  prend ses valeurs dans  $B(u_E; \epsilon)$  pour  $x \ll -1$ .

Pour montrer (23), on remarque que

$$(g(u), u - u_E) = (C(u)df(u_E)(u - u_E), u - u_E) + \mathcal{O}(||u - u_E||^3),$$

qui a bien la positivité requise pour  $\epsilon$  assez petit, puisque  $df(u_E)$  et  $Mdf(u_E)$ , sont positives.

Ceci achève la construction d'un système de la forme (1), qui satisfait (H0),...,(H5'), qui admet un profil  $\tilde{U}$  pour un 1-choc stationnaire, et pour

lequel les valeurs propres de  $B^{-1}df(u_E)$  ne sont pas réelles. L'étude du paragraphe 3.2 montre alors que certaines couches limites, construites à partir de  $\tilde{U}$ , sont instables.

Remarque. — On peut être surpris que cette construction utilise un choc de faible amplitude pour (3), de sorte que les couches limites, quoique instables, sont elles-mêmes de faible amplitude. Ceci semble contredire la remarque, évoquée dans l'introduction, que les couches limites de faible amplitude sont stables. En fait, la petitesse évoquée dans la construction est une notion différente de la petitesse qui assure la stabilité. Dire ici que le choc est d'amplitude faible, c'est dire que  $||u_E - u_W|| \ll ||r_1||$ , où  $r_1$ est normalisé par  $d\lambda_1 \cdot r_1 = 1$ ; autrement dit,  $|\lambda_1(u_W) - \lambda_1(u_E)| \ll 1$ . En revanche, dire qu'une couche limite est de faible amplitude, assurant ainsi sa stabilité, c'est dire (voir [8]) que

$$\sup_{x} \|U_0(x) - u_W\| << \min_j |\lambda_j(u_W)|.$$

Clairement, notre construction ne satisfait pas uniformément cette contrainte, puisque  $||u_W - u_E||$  et  $\lambda_1(u_W)$  sont du même ordre.

#### 4. Le signe de $D(+\infty)$ ; conclusion.

On utilise ici un argument développé dans [2]. Grâce à l'inégalité de Gårding, il existe un nombre  $\Lambda > 0$  tel que l'opérateur

$$L_{ heta} - \lambda := heta rac{d^2}{dx^2} + (1 - heta)L - \lambda$$

soit inversible pour tout  $\lambda > \Lambda$  ( $\lambda$  réel) et tout  $\theta \in [0, 1]$ . Généralisant les notations précédentes, nous définissons la matrice  $A(x; \lambda, \theta)$ , pour laquelle

$$L_{ heta}v = \lambda v \Longleftrightarrow rac{d}{dx} \left( egin{array}{c} v \ v' \end{array} 
ight) = A(x;\lambda, heta) \left( egin{array}{c} v \ v' \end{array} 
ight).$$

De même, on pose

$$A_W(\lambda, \theta) := \lim_{x \to +\infty} A(x; \lambda, \theta).$$

On vérifie sans peine que  $A_W(\lambda, \theta)$  n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle et que son sous-espace stable  $S_W(\lambda, \theta)$  est de dimension n.

Il est immédiat que  $S_W(\lambda, \theta)$  dépend continûment de  $(\lambda, \theta)$ . Cet espace correspond à un vecteur propre  $\eta(\lambda; \theta)$  de la matrice  $A_W(\lambda, \theta)^{(n)}$ ,

qui est elle aussi une fonction continue de  $(\lambda, \theta)$ . Appliquant une nouvelle fois le lemme de l'écart, on obtient que l'ensemble des solutions  $x \mapsto V$  de l'équation différentielle

$$V' = A(x; \lambda, \theta) V$$

est un espace vectoriel de dimension n, dont la trace  $S(x; \lambda, \theta)$  au point  $x \in \mathbb{R}^+$  tend vers  $S_W(\lambda, \theta)$  quand  $x \to +\infty$ . Cet espace correspond à une solution  $\eta(x; \lambda, \theta)$  de l'équation différentielle

$$\eta' = A(x; \lambda, \theta)^{(n)} \eta,$$

et celle-ci dépend continûment de  $(\lambda,\theta).$  On peut ainsi définir une fonction d'Evans ét endue

$$D(\lambda, heta)=\eta(0;\lambda, heta)\wedge\eta_0.$$

Bien entendu,  $\eta$  et *D* sont réels lorsque  $\lambda$  est réel.

Comme  $L_{\theta} - \lambda$  est inversible pour tout  $\theta \in [0, 1]$  lorsque  $\lambda$  est réel avec  $\lambda > \Lambda$ , on voit que D ne s'annule pas sur  $]\Lambda, +\infty[\times[0, 1]]$ , donc garde un signe constant. Ainsi, le signe de  $D(+\infty)$ , c'est-à-dire de  $D(+\infty; 1)$  avec les notations présentes, est le même que celui de  $D(+\infty, 0)$ , ou de  $D(\lambda, 0)$ pour  $\lambda > \Lambda$ . Cependant,

$$A(x;\lambda,0) \equiv \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ \lambda I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

entraîne

$$\eta(x;\lambda,0) = e^{-nx\sqrt{\lambda}}\eta(\lambda,0),$$

c'est-à-dire

$$\eta(0;\lambda,0)=\eta(\lambda,0),\quad D(\lambda,0)=\eta(\lambda,0)\wedge\eta_0$$

On en conclut

(24) 
$$\operatorname{sgn} D(+\infty) = \operatorname{sgn} \eta(\lambda, 0) \wedge \eta_0, \ \forall \lambda > \Lambda.$$

Nous utilisons maintenant une remarque algébrique, semblable à la proposition 1.2, démontrée dans [2]:

PROPOSITION 4.1.— On fait les hypothèses (H3), (H5).

Pour tout  $\lambda \in [0, +\infty[$  et tout  $\theta \in [0, 1]$ , on a

$$\eta(\lambda,\theta) \wedge \eta_0 \neq 0.$$

En particulier, le signe de  $\eta(\lambda, \theta) \wedge \eta_0$  (qui est un réel) est constant sur  $[0, \infty] \times [0, 1]$ .

De la proposition 4.1 et de la formule (24), on déduit

$$\operatorname{sgn} D(+\infty) = \operatorname{sgn} \eta(0,1) \wedge \eta_0 = \operatorname{sgn} \eta(0) \wedge \eta_0.$$

Cependant, comme

$$\eta(x;0) = egin{pmatrix} w_1 \ w_1' \end{pmatrix} \wedge egin{pmatrix} w_2 \ w_2' \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\eta(x;0) \wedge \eta_0 = \det(w_1, w_2),$$

et donc

$$\eta(0) \wedge \eta_0 = \det(s_1, r_2),$$

d'où on déduit le signe de  $D(0)D(+\infty)$  :

THÉORÈME 4.1. — On suppose que p = 1, n = 2 et on fait les hypothèses (H0), (H3), (H5).

Avec la normalisation du vecteur propre  $s_1$  de  $(B^{-1}df)(u_W)$ , donnée par

$$w_1 = U' \sim e^{\gamma_1 x} s_1,$$

on a

$$\operatorname{sgn} D(0)D(+\infty) = \operatorname{sgn} \det(Z, r_2) \det(s_1, r_2),$$

où Z est fourni par la formule (22).

En conclusion, nous avons le critère géométrique d'instabilité suivant.

COROLLAIRE 4.1. — La droite  $\mathbb{R}r_2$  sépare le plan en deux demi-plans. La couche limite est instable dès que les vecteurs  $s_1$  et Z appartiennent à des demi-plans distincts.

#### BIBLIOGRAPHIE

- J. ALEXANDER, R. GARDNER, C. JONES, A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves, J. Reine Angew. Math., 410 (1990), 167-212.
- [2] S. BENZONI, D. SERRE, K. ZUMBRUN, Alternate Evans functions and viscous shock waves, SIAM J. Math. Anal., à paraître.

#### DENIS SERRE

- [3] M. BULTELLE, M. GRASSIN, D. SERRE, Unstable Godunov discrete profiles for steady shock waves, SIAM J. Num. Anal., 35 (1998), 2272-2297.
- [4] R. GARDNER, K. ZUMBRUN, The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles, Comm. Pure & Appl. Math., 51 (1998), 797-855.
- [5] M. GISCLON, Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique, J. Math. Pures & Appl., 75 (1996), 485-508.
- [6] M. GISCLON, D. SERRE, Etude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 319 (1994), 377-82.
- [7] J. GOODMAN, A. SZEPESSY, K. ZUMBRUN, A remark on the stability of viscous shock waves, SIAM J. Math. Anal., 25 (1994), 1463-1467.
- [8] E. GRENIER, O. GUÈS, Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems, J. Diff. Equations, 143 (1998), 110-146.
- [9] D. HENRY, Geometric theory of semilinear parabolic equations. LNM 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [10] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 112, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [11] Li TA-TSIEN, Yu WEN-CI, Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems, vol. V, Math. Series, Duke university, Durham, N. C., 1985.
- [12] D. SERRE, Solutions globales  $(-\infty < t < +\infty)$  des systèmes paraboliques de lois de conservation, Ann. Inst. Fourier, 48-4 (1998), 1069-1091.
- [13] D. SERRE, Discrete shock profiles and their stability. Hyperbolic problems : theory, numerics, applications. Zurich 1998. M. Fey, R. Jeltsch eds. ISNM 130, 843-854. Birkhaüser (1999).
- [14] A. SZEPESSY, ZHOUPING XIN, Nonlinear stability of viscous shock waves, Arch. Rat. Mach. Anal., 122 (1993), 53-103.
- [15] ZHOUPING XIN, Viscous boundary layers and their stability, J. of PDEs, 11 (1998), 97-124.
- [16] K. ZUMBRUN, P. HOWARD, Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves, Indiana U. Math. J., 47 (1998), 741-871.
- [17] K. ZUMBRUN, D. SERRE, Viscous and inviscid stability of multidimensional shock fronts, Indiana U. Math. J., 48 (1999), 937-992.

Manuscrit reçu le 30 août 1999, accepté le 14 juin 2000.

Denis SERRE, ENS Lyon Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (CNRS, UMR 5669) 46, Allée d'Italie 69364 Lyon cedex 07 (France). Denis.SERRE@umpa.ens-lyon.fr