

JACQUES SAULOY

**Systèmes aux  $q$ -différences singuliers réguliers :  
classification, matrice de connexion et monodromie**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 50, n° 4 (2000), p. 1021-1071

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_2000\\_\\_50\\_4\\_1021\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_4_1021_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SYSTÈMES AUX $q$ -DIFFÉRENCES SINGULIERS RÉGULIERS : CLASSIFICATION, MATRICE DE CONNEXION ET MONODROMIE

par Jacques SAULOY

---

## Table des matières.

<b>0. Introduction et notations</b> . . . . .	1022
0.1. Résolution locale . . . . .	1023
0.2. Classification . . . . .	1026
0.3. Confluence des solutions . . . . .	1026
0.4. Confluence et monodromie . . . . .	1027
<b>1. Construction de solutions locales</b>	
1.1. Solutions fondamentales en 0 . . . . .	1028
1.1.1. On se ramène au cas fuchsien non résonnant . . . . .	1028
1.1.2. Cas d'un système à coefficients constants . . . . .	1030
1.1.3. Cas d'un système fuchsien non résonnant . . . . .	1033
1.1.4. Synthèse . . . . .	1034
1.2. Non-unicité des solutions canoniques . . . . .	1036
1.3. Caractérisation des systèmes singuliers réguliers par la forme des solutions . . . . .	1037
1.3.1. Un algorithme de réduction . . . . .	1037
1.3.2. Caractérisation des systèmes singuliers réguliers . . . . .	1039
<b>2. Matrice de connexion et classification</b> . . . . .	1039
2.1. Caractérisation globale des systèmes singuliers réguliers . . . . .	1040
2.2. Classification des systèmes singuliers réguliers sur $\mathbb{S}$ . . . . .	1040
2.3. Précisions diverses . . . . .	1042
2.3.1. Polarité . . . . .	1042
2.3.2. Interprétation catégorique . . . . .	1043
<b>3. Comportement des solutions lorsque <math>q \rightarrow 1</math></b> . . . . .	1043
3.1. Estimation asymptotique de $e_{q,c}$ et de $\ell_q$ . . . . .	1044
3.2. Comportement des solutions canoniques . . . . .	1047

---

*Mots-clés* : Équations aux  $q$ -différences – Matrice de connexion – Fonctions hypergéométriques basiques.

*Classification math.* : 05A30 – 33D15 – 39A13.

3.3. Comportement des solutions à valeur initiale fixe . . . . .	1048
3.3.1. Étude locale . . . . .	1050
3.3.2. Étude globale . . . . .	1050
<b>4. Comportement de la matrice de connexion lorsque <math>q \rightarrow 1</math> et monodromie . . . . .</b>	<b>1052</b>
<b>5. Trois exemples . . . . .</b>	<b>1055</b>
5.1. Déformation de la fonction hypergéométrique . . . . .	1055
5.2. Déformation de $\log(1 - z/z_0)$ . . . . .	1058
5.3. Un exemple irrégulier . . . . .	1059
5.3.1. Calculs explicites en dimension 1 . . . . .	1060
5.3.2. Amélioration des estimations de $\Theta$ . . . . .	1061
5.3.3. Application à l'exemple . . . . .	1062
<b>Annexe A. Relations algébriques dans les corps de solutions . . . . .</b>	<b>1064</b>
<b>Annexe B. Équations et systèmes . . . . .</b>	<b>1067</b>
B.1. Passage des équations aux systèmes . . . . .	1067
B.2. Passage des systèmes aux équations . . . . .	1068
B.3. Équations singulières régulières . . . . .	1068

## 0. Introduction et notations.

Dans tout cet article,  $q$  désigne un nombre complexe tel que  $|q| > 1$ . Si  $p = q^{-1}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on notera :

$$(x; p)_n = \prod_{0 \leq k \leq n-1} (1 - xp^k) \quad \text{et} \quad (x; p)_\infty = \prod_{0 \leq k} (1 - xp^k).$$

La série hypergéométrique *classique* a été généralisée par Heine, puis Ramanujan (voir [12], [20]) en la série hypergéométrique *basique*

$$\Phi(a, b, c; q, z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a; p)_n (b; p)_n}{(c; p)_n (p; p)_n} z^n.$$

Si  $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ , celle-ci est solution de l'équation aux  $q$ -différences à coefficients rationnels :

$$\sigma_q^2 \Phi - \lambda \sigma_q \Phi + \mu \Phi = 0$$

avec

$$\lambda = \frac{(a+b)z - (1+c/q)}{abz - c/q}, \quad \mu = \frac{z-1}{abz - c/q},$$

où l'on note

$$\sigma_q f(z) = f(qz)$$

pour toute fonction  $f$  sur la sphère de Riemann

$$\mathbb{S} = \mathbb{P}^1 \mathbb{C}.$$

Ceci a motivé l'étude de telles équations fonctionnelles (voir [1], [6], [9], [12], [21], [22]).

Par analogie avec le cas classique des équations différentielles, G.D. Birkhoff [6] a posé le problème de Riemann-Hilbert pour les systèmes linéaires aux  $q$ -différences à coefficients rationnels<sup>(1)</sup> :

$$(1) \quad \sigma_q X = AX, \quad A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z)).$$

Le groupe de jauge  $\text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$  opère à gauche sur les solutions vectorielles ou matricielles de tels systèmes et donc sur les systèmes eux-mêmes, ce qui conduit à introduire la notion d'équivalence méromorphe sur  $\mathbb{S}$  ou rationnelle :  $A \sim (\sigma_q F)^{-1} A F$  lorsque  $F \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ . Il s'agit alors de classifier ces systèmes modulo cette relation d'équivalence.

### 0.1. Résolution locale.

Les deux seuls points fixes de l'automorphisme  $z \mapsto qz$  de  $\mathbb{S}$  sont 0 et  $\infty$ , et l'on est conduit à étudier l'existence de solutions au voisinage de 0, le cas de  $\infty$  s'en déduisant par changement de coordonnée.

Le cas où  $A(0)$  est singulière est illustré par l'équation  $\sigma_q f = zf$  dont des solutions typiques s'obtiennent à l'aide de la fonction  $\Theta$  : ce cas se caractérise par l'apparition de solutions à croissance sauvage (voir [21]). À l'opposé, si  $A(0) = I_n$ , le produit  $\prod_{i \geq 1} A(q^{-i}z)$  définit une solution holomorphe en 0 et méromorphe sur  $\mathbb{C}$ .

Supposons  $A(0) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  : un tel système est dit *fuchsien en 0*. En parfaite analogie<sup>(2)</sup> avec la méthode de Frobenius pour les équations différentielles linéaires, on peut alors construire une solution matrice fondamentale  $X \in \text{GL}_n(\mathbb{K}'_0)$  à coefficients dans une extension  $\mathbb{K}'_0$  de  $\mathbb{C}(\{z\})$  (corps des fractions de l'anneau  $\mathbb{C}\{z\}$  des séries entières) à condition que celle-ci contienne :

- Pour chaque  $c \in \text{Sp}(A(0))$  (spectre de  $A(0)$ ), un élément  $e_c$  tel que

$$\sigma_q e_c = c e_c.$$

Il joue un rôle analogue à celui de  $z^\gamma$  et nous le nommerons *caractère d'exposant  $c$* .

<sup>(1)</sup> Nous précisons dans l'annexe B le lien entre *systèmes de rang  $n$  et équations d'ordre  $n$* .

<sup>(2)</sup> L'analogie suivie (motivée, entre autres, par l'exemple des séries hypergéométriques basiques) est  $(\sigma_q - 1)/(q - 1) \leftrightarrow \delta = z(d/dz)$  (voir [21] et 0.3).

- Dans le cas où  $A(0)$  n'est pas semi-simple, un élément  $\ell$  tel que

$$\sigma_q \ell = \ell + 1.$$

Il joue un rôle analogue à celui du logarithme.

Notons, de façon générale,  $\mathcal{M}(\mathbb{X})$  le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann  $\mathbb{X}$ . L'équation fonctionnelle (1) entraîne alors que les solutions sont en fait à coefficients dans le sous-corps  $\mathcal{M}(\mathbb{C})(\ell, (e_c)_{c \in \mathbb{C}^*})$  de  $\mathbb{K}'_0$ . En opposition à ce qui se passe avec les équations différentielles, l'opérateur aux  $q$ -différences  $\sigma_q$  propage dans  $\mathbb{C}$  la propriété des solutions d'être méromorphes près de 0.

Classiquement (voir [1], [6], [9]), on utilise respectivement les fonctions multivaluées  $z^{\log(c)/\log(q)}$  et  $\log(z)/\log(q)$  dans les rôles de  $e_c$  et de  $\ell$ . Il faut alors prendre en compte conjointement les effets de l'automorphisme  $\sigma_q$  et ceux de la monodromie. Van der Put et Singer proposent dans [19] d'instancier les  $e_c$  et  $\ell$  par des *symboles* algébriquement indépendants (sauf en ce qui concerne des relations obligées). Mais il est alors difficile d'interpréter les solutions comme des fonctions.

Selon une suggestion de J.-P. Ramis dans [22], nous opérons un choix différent et montrons au paragraphe 1 comment résoudre (1) à l'aide de fonctions *uniformes*.

Désignons par  $\Theta_q$  la fonction theta de Jacobi (voir [21]) :

$$\Theta_q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n.$$

Elle satisfait la formule du triple produit de Jacobi :

$$\Theta_q(z) = (p; p)_\infty (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty.$$

On en déduit l'équation fonctionnelle :

$$\Theta_q(qz) = -qz\Theta_q(z).$$

Il est alors facile de voir que l'on peut prendre, pour instancier  $\ell$ , la fonction :

$$\ell_q(z) = z \frac{\Theta'_q(z)}{\Theta_q(z)}$$

et, pour instancier,  $e_c$  la fonction :

$$e_{q,c}(z) = \frac{\Theta_q(z)}{\Theta_q(c^{-1}z)}.$$

Ces fonctions sont *méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$* . Les pôles (simples) de  $\ell_q$  sont les éléments de la spirale discrète  $q^{\mathbb{Z}}$ ; les zéros (simples) et pôles (simples)

de  $e_{q,c}$  sont les éléments de  $q^{\mathbb{Z}}$  et de  $cq^{\mathbb{Z}}$  respectivement. Nous avons donc remplacé la ramification des choix classiques par des spirales discrètes de pôles.

Nous obtenons ainsi des solutions fondamentales canoniques  $X^{(0)}$  appartenant à  $GL_n(\mathbb{K}_0)$  et à coefficients dans le corps :

$$\mathbb{K}_0 = \mathcal{M}(\mathbb{C})(\ell_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbb{C}^*})$$

(donc méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$ ) et en donnons des formes normales. Dans le cas où le système est *non résonnant en 0*, c'est-à-dire où deux valeurs propres distinctes de  $A(0)$  ne sont pas congrues modulo  $q^{\mathbb{Z}}$ , il y a même une forme canonique. Nous étendons de plus la résolution au cas d'un système *singulier régulier en 0*, c'est-à-dire, par définition, rationnellement équivalent à un système fuchsien en 0. Dans tous les cas, on peut écrire  $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$  où :

(i)  $M^{(0)}$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ ; les pôles de  $M^{(0)}$  sur  $\mathbb{C}^*$  forment une union finie de demi-spirales logarithmiques discrètes  $q^{\mathbb{N}^*}\mathcal{S}(A)$ , où  $\mathcal{S}(A)$  est l'ensemble formé des pôles de  $A$  et des pôles de  $A^{-1}$ .

(ii)  $N^{(0)}$  est construite à partir des  $e_{q,c}$  et de  $\ell_q$ ; les pôles de  $N^{(0)}$  sur  $\mathbb{C}^*$  forment une union finie de spirales logarithmiques discrètes déterminées par la structure de Jordan de  $A(0)$  :  $q^{\mathbb{Z}}\text{Sp}(A(0))$  si  $A(0)$  est semi-simple,  $q^{\mathbb{Z}}\text{Sp}(A(0)) \cup q^{\mathbb{Z}}$  dans le cas général.

Toutes les solutions dans  $GL_n(\mathbb{K}'_0)$  s'obtiennent alors sous la forme  $X^{(0)}V^{(0)}$  où  $V^{(0)}$  est à coefficients dans le « corps des constantes »  $(\mathbb{K}'_0)^{\sigma_q}$ , *i.e.* le sous-corps de  $\mathbb{K}'_0$  formé des éléments invariants sous l'automorphisme  $\sigma_q$ . On voit facilement (annexe A) que celui-ci est égal à  $\mathcal{M}(\mathbb{C})^{\sigma_q}$ , corps des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  telles que  $f(qz) = f(z)$ , qui s'interprète naturellement comme le corps des fonctions méromorphes sur la surface de Riemann  $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$ . Le changement de variable  $z = e^{2i\pi x}$  permet d'identifier celle-ci au tore complexe  $\mathbb{E} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ , avec la notation  $q = e^{-2i\pi\tau}$ ,  $\text{Im}(\tau) > 0$ . Nous confondrons dorénavant le corps  $\mathcal{M}(\mathbb{C})^{\sigma_q}$  et le corps des fonctions elliptiques  $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ .

Notons que la réalisation des caractères comme fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}^*$  entraîne *nécessairement* la présence d'un « cocycle » non trivial de fonctions elliptiques, les  $e_{q,cd}/e_{q,c}e_{q,d}$  : c'est cette circonstance qui fait du corps des constantes  $\mathcal{M}(\mathbb{E})$  tout entier (annexe A). Ceci est la différence principale avec [19], où les caractères sont des symboles et peuvent être astreints à vérifier :  $e_{cd} = e_c e_d$ , ce qui entraîne que le corps des constantes est  $\mathbb{C}$ .

### 0.2. Classification.

À un système fuchsien en 0 et en  $\infty$ , et à des solutions fondamentales  $X^{(0)}$  et  $X^{(\infty)}$  en 0 et en  $\infty$ , G.D. Birkhoff associe la matrice de connexion :

$$P = (X^{(\infty)})^{-1} X^{(0)}$$

dont les coefficients sont  $\sigma_q$ -invariants, multivalués et peuvent être vus comme des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ , automorphes pour le réseau  $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$  (où  $\mathbb{Z}\tau$  agit trivialement et  $\mathbb{Z}$  par monodromie). Il code le système (1) à l'aide de  $P$  et des exposants en 0 et en  $\infty$  et montre que l'on peut résoudre le problème inverse dans le cas où  $A(0)$  et  $A(\infty)$  sont semi-simples.

Nous montrons au paragraphe 2 que nos solutions uniformes conduisent à une matrice de connexion *elliptique*, c'est-à-dire à coefficients dans  $\mathcal{M}(\mathbb{E})$ . Notre méthode fait jouer un rôle symétrique à 0 et  $\infty$  et évite le recours à des fonctions à croissance sauvage, du type  $q^t \mapsto q^{t(t-1)/2}$  (voir [21]). Nous obtenons alors le théorème de classification des systèmes singuliers réguliers à équivalence rationnelle près (par la matrice de connexion, assortie des structures de Jordan en 0 et  $\infty$ ), ainsi que des précisions sur la possibilité de prescrire les pôles.

Cette classification peut d'ailleurs être enrichie sous forme d'une équivalence de catégories tannakiennes, qui ouvre la voie à l'étude par l'analyse du groupe de Galois des équations aux  $q$ -différences (voir [24], [25]).

Signalons d'autre part, selon une suggestion de Yves André, que tous les résultats qui précèdent s'étendent au cas  $p$ -adique. Les ingrédients nécessaires pour cela sont résumés dans [24]. Cette remarque ne s'étend toutefois pas à ce qui suit.

### 0.3. Confluence des solutions.

Pour donner un sens géométrique à ces constructions, suivant une idée de Jean-Pierre Ramis, nous étudions ici la classique confluence d'équations aux  $q$ -différences vers des équations différentielles lorsque  $q$  tend vers 1.

La formule heuristique

$$\frac{\sigma_q - \text{Id}}{q - 1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \delta := z \frac{d}{dz}$$

conduit à étudier une famille de systèmes (1), avec  $A$  dépendant de  $q$  de telle sorte que  $A = I_n + (q - 1)B$ , où  $B \xrightarrow{q \rightarrow 1} \tilde{B}$ .

Nous nous restreignons pour cela au cas fuchsien non résonnant. Le système (1) admet alors une unique solution  $X^{(0)} = M^{(0)}e_{q,A(\infty)}$  et la matrice de connexion  $P = (X^{(\infty)})^{-1}X^{(0)}$ .

Nous supposons que  $q$  tend vers 1 le long d'une spirale logarithmique  $q = q_0^\epsilon$ , c'est-à-dire

$$\tau = \tau_0\epsilon, \quad q_0 = e^{-2i\pi\tau_0},$$

où l'on a fixé  $\tau_0$  tel que  $\text{Im}(\tau_0) > 0$  et où  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Les spirales et demi-spirales logarithmiques discrètes  $q^{\mathbb{Z}}, q^{\mathbb{N}}$  se condensent alors en des coupures spirales  $q_0^{\mathbb{R}}, q_0^{\mathbb{R}^+}$  de  $\mathbb{S}$ . Sous des hypothèses appropriées, nous montrons alors au paragraphe 3 que les solutions fondamentales canoniques de (1) tendent vers celles du système différentiel

$$(2) \quad \delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$$

obtenues par la méthode de Frobenius (voir [13], [28]). Par exemple  $(q-1)\ell_q$  tend vers  $\log(-z)$  et, si  $(c-1)/(q-1)$  tend vers  $\gamma$ ,  $e_{q,c}$  tend vers  $(-z)^\gamma$ .

Bien que nos solutions canoniques à (1) soient sans monodromie, ce n'est évidemment pas possible en général pour les solutions de (2). En fait, les spirales et demi-spirales discrètes de pôles des solutions de (1) se transforment, quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , en des coupures spirales qui rendent les solutions de (2) *uniformes*. C'est ce phénomène géométrique et numérique (zones de comportement chaotique de  $\Theta$ ) qui justifie l'hypothèse sur le mode de convergence de  $q$ .

#### 0.4. Confluence et monodromie.

Supposons maintenant les mêmes conditions satisfaites en  $\infty$ , et notons  $X_\epsilon^{(0)}, X_\epsilon^{(\infty)}$  et  $P_\epsilon$  les solutions canoniques et la matrice de connexion associées. On montre alors, au paragraphe 4, que la matrice  $P_\epsilon$  tend vers une matrice *localement constante*  $\tilde{P}$ ; celle-ci est définie sur  $\mathbb{S}$  privé de toutes les coupures des solutions en 0 et  $\infty$ , c'est-à-dire sur une union finie d'ouverts connexes :  $\tilde{P}$  prend donc un nombre fini de valeurs  $\tilde{P}_0, \dots, \tilde{P}_r$ . En prolongeant les déterminations des solutions en 0 et en  $\infty$  le long de chemins qui évitent les diverses coupures, on conclut alors que les  $\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1}$  ( $1 \leq j \leq r$ ) sont les matrices de monodromie de (2) en les singularités autres que 0 et  $\infty$  (la monodromie en 0 et  $\infty$  est fournie par les structures de Jordan de  $\tilde{B}(0)$  et  $\tilde{B}(\infty)$ ).

Ce résultat fait d'ailleurs partie d'un phénomène de *confluence du groupe de Galois de (1) vers celui de (2)*, étudié dans [24] et [25].

*Remerciements.* — Ce travail fait partie d'une thèse sous la direction de Jean-Pierre Ramis. Je le remercie pour son soutien et pour ses conseils.

## 1. Construction de solutions locales.

### 1.1. Solutions fondamentales en 0.

Supposons donné un système (1) singulier régulier en 0 (*cf.* 0.1). Par définition, à une transformation de jauge rationnelle près, on peut le supposer fuchsien en 0, ce que nous ferons donc.

On obtient des solutions fondamentales en 0 à coefficients dans le corps de fonctions  $\mathbb{K}_0$  introduit au 0.1 par un dévissage analogue à celui du cas différentiel. Nous allons construire une telle solution  $X^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}_0)$  et expliciter sa forme.

#### 1.1.1. On se ramène au cas fuchsien non résonnant.

Nous dirons qu'un système de matrice  $A$  fuchsien en 0 est *non résonnant* (en 0) si deux valeurs propres distinctes de  $A_0 = A(0)$  ne sont pas congrues modulo  $q^{\mathbb{Z}}$ , autrement dit si

$$q^{\mathbb{N}^*} \mathrm{Sp}(A(0)) \cap \mathrm{Sp}(A(0)) = \emptyset.$$

Nous allons montrer que tout système fuchsien est rationnellement équivalent à un système non résonnant. Pour être précis, on a le

**THÉORÈME.** — *En alternant des transformations de jauge à matrices constantes  $Q_1, \dots, Q_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et à matrices de «shearing» (voir ci-dessous)  $S_1, \dots, S_r$ , on ramène le système en  $X$  à un système non résonnant à l'origine en  $Y$ , où  $X = Q_1 S_1 \cdots Q_r S_r Y$ .*

Supposons que  $\mathrm{Sp}(A_0)$  contienne une classe non triviale modulo  $q^{\mathbb{Z}}$  :  $\{c, \dots, cq^m\}$  (avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ). Il existe une matrice  $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que l'on peut écrire

$$Q^{-1} A_0 Q = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

où le bloc  $a_0$  est triangulaire supérieur, de taille  $\mu$  et n'a que des  $cq^m$  sur la diagonale et le bloc  $d_0$  est triangulaire supérieur, de taille  $\nu$  et n'a aucun  $cq^m$  sur la diagonale. On introduit la matrice dite *de shearing* (c'est-à-dire, de *cisaillement*) (voir [28], p. 94)

$$S = \begin{pmatrix} zI_\mu & 0 \\ 0 & I_\nu \end{pmatrix}.$$

Écrivons maintenant, avec des blocs de tailles correspondantes,

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = (\sigma(QS))^{-1}A(QS) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-1}a & q^{-1}z^{-1}b \\ zc & d \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse faite sur  $Q^{-1}A_0Q$  montre que les coefficients de  $b'$  (et, de façon évidente, ceux de  $a', c', d'$ ) appartiennent à  $\mathbb{C}\{z\}$ . Le terme constant  $B_0$  de  $B$  est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} q^{-1}a_0 & * \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le spectre de  $B_0$  est le même que celui de  $A_0$ , sauf en ce qui concerne les  $cq^m$  qui ont été remplacés par  $cq^{m-1}$ . □

À cause de la nécessité de cette «préparation», il semble difficile de prévoir sur la forme d'une matrice quelconque la présence de contributions «logarithmiques» dans les solutions.

*Exemple 1.*

$$A = \begin{pmatrix} q & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend  $Q = I_2$  et  $S = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , de sorte que

$$B = (\sigma(QS))^{-1}A(QS) = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_0.$$

La solution d'exposant 1 comportera donc une partie logarithmique. On obtient comme matrice fondamentale (cf. 1.1.2) :

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell_q/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z\ell_q/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Exemple 2.*

$$A' = \begin{pmatrix} q & z^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A'_0 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La même transformation donne

$$B' = (\sigma(QS))^{-1} A'(QS) = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc  $B'_0 = I_2$  : la solution d'exposant 1 ne comporte pas de partie logarithmique. On obtient comme matrice fondamentale :

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z/(q^2 - q) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z^2/(q^2 - q) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En revanche, l'algorithme de préparation ne modifie ni les pôles de  $A(z)$  dans  $\mathbb{C}^*$  ni le spectre de  $A_0$  modulo  $q^{\mathbb{Z}}$ , donc pas non plus les pôles des solutions.

À partir d'un système non résonnant, il y a une « voie vectorielle » basée sur la décomposition cyclique (voir [24]). Nous présenterons ici la « voie matricielle » : elle occupe le reste du paragraphe 1.

### 1.1.2. Cas d'un système à coefficients constants.

On suppose maintenant  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et l'on construit une matrice fondamentale canonique  $e_{q,A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}_0)$  telle que

$$\sigma_q e_{q,A} = A e_{q,A} = e_{q,A} A.$$

Les ingrédients de base sont les fonctions  $\ell_q$  et  $e_{q,c}$  qui ont été définies au 0.1. Grâce à la décomposition de Dunford multiplicative, la construction se fera en trois étapes.

1.1.2.1 *Cas d'une matrice unipotente.* — Soit  $U = I_n + N$  où  $N \in M_n(\mathbb{C})$  est nilpotente. Nous aurons besoin, pour ce cas, d'introduire la notation

$$\ell_q^{(k)} = \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (\ell_q - i) = \binom{\ell_q}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Par convention,  $\ell_q^{(k)} = 0$  pour  $k < 0$ . La formule de Pascal pour les coefficients binomiaux montre que, quelque soit  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sigma_q \ell_q^{(k)} = \ell_q^{(k)} + \ell_q^{(k-1)}.$$

PROPOSITION. — *Le système  $\sigma_q M = U M$  admet une unique solution à coefficients dans  $\mathbb{C}[\ell_q] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{C} \ell_q^{(k)}$ , soit  $M = \ell_q^{(0)} M_0 + \ell_q^{(1)} M_1 + \dots$ ,*

telle que  $M_0 = I_n$ . Cette solution est définie par  $M_k = N^k$  pour tout  $k \geq 0$ . Elle commute avec  $N$  et  $U$ .

On le prouve par identification; les  $\ell_q^{(k)}$  sont en effet linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$ , autrement dit,  $\ell_q$  est transcendant (voir annexe A). L'exponentielle d'une matrice nilpotente et le logarithme d'une matrice unipotente étant définies sur un corps commutatif de caractéristique 0 quelconque, cette solution vaut donc

$$U^{\ell_q} = \exp(\ell_q \log(I_n + N)) = \sum_{k \geq 0} \binom{\ell_q}{k} N^k.$$

On la notera  $e_{q,U}$ . Par construction, elle est unipotente. C'est un polynôme en  $U$  et réciproquement. □

Les propriétés suivantes sont alors immédiates :

- (i) Soit  $R \in GL_n(\mathbb{C})$  et soit  $V = RUR^{-1}$ ; alors  $e_{q,V} = Re_{q,U}R^{-1}$ .
- (i) Une matrice commute avec  $e_{q,U}$  si et seulement si elle commute avec  $U$ .

À titre d'exemple, notons :

$$\xi_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{C}).$$

Si  $U$  est la matrice  $\xi_{1,m}$ , on trouve pour  $e_{q,U}$  la matrice

$$L_m = \xi_{1,m}^{\ell_q} = \begin{pmatrix} \ell_q^{(0)} & \ell_q^{(1)} & \dots & \ell_q^{(m-1)} \\ 0 & \ell_q^{(0)} & \dots & \ell_q^{(m-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \ell_q^{(0)} \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{C}[\ell_q]).$$

1.1.2.2 Cas d'une matrice semi-simple. — Pour une matrice diagonale  $\Delta = \text{Diag}(c_1, \dots, c_n) \in GL_n(\mathbb{C})$ , on notera  $e_{q,\Delta} = \text{Diag}(e_{q,c_1}, \dots, e_{q,c_n})$ . On a donc

$$\sigma_q e_{q,\Delta} = \Delta e_{q,\Delta} = e_{q,\Delta} \Delta.$$

De plus, le fait que la correspondance  $c \leftrightarrow e_{q,c}$  est biunivoque montre que  $\Delta$  est un polynôme en  $e_{q,\Delta}$  et réciproquement et donc qu'ils ont même commutant.

Soit maintenant  $D \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  une matrice diagonalisable. Écrivons

$$D = R\Delta R^{-1} = R'\Delta'(R')^{-1},$$

où  $R, R' \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et où  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont diagonales. On constate alors

$$R e_{q,\Delta} R^{-1} = R' e_{q,\Delta'} (R')^{-1}.$$

On note cette matrice  $e_{q,D}$ . Les propriétés suivantes sont immédiates :

(i)  $\sigma_q e_{q,D} = D e_{q,D} = e_{q,D} D$ ;

(ii) Si  $D' = RDR^{-1}$ ,  $e_{q,D'} = R e_{q,D} R^{-1}$ ;

(iii) chacune des matrices  $D$  et  $e_{q,D}$  est un polynôme en l'autre et elles ont donc même commutant.

1.1.2.3 *Cas général.* — Soit  $A = D + N$  la décomposition de Dunford d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  :  $D$  est semi-simple,  $N$  est nilpotente et  $[D, N] = 0$  (les matrices  $D$  et  $N$  commutent). Ces conditions spécifient uniquement  $D$  et  $N$ . Si  $A$  est inversible, on en déduit la *décomposition de Dunford multiplicative*  $A = DU$ , où  $D$  est semi-simple,  $U$  est unipotente et  $[D, U] = 0$  : on prend  $U = I_n + D^{-1}N$ . Il y a encore unicité sous ces conditions. Si  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , la décomposition de Dunford multiplicative de  $RAR^{-1}$  est alors  $(RDR^{-1})(RUR^{-1})$ .

On appellera *solution canonique dans le cas de coefficients constants* la matrice

$$e_{q,A} = e_{q,D} e_{q,U}.$$

Elle possède donc les propriétés suivantes :

(i)  $\sigma_q e_{q,A} = A e_{q,A} = e_{q,A} A$ ;

(ii) la décomposition de Dunford multiplicative de  $e_{q,A}$  est  $e_{q,D} e_{q,U}$ ;

(iii) on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} [M, A] = 0 &\iff [M, D] = [M, U] = 0 \iff [M, e_{q,D}] = [M, e_{q,U}] = 0 \\ &\iff [M, e_{q,A}] = 0. \end{aligned}$$

On peut noter l'analogie de  $e_{q,A}$  avec le  $z^A$  de la théorie des équations différentielles linéaires (voir [13], [28]).

1.1.3. *Cas d'un système fuchsien non résonnant.*

Nous aurons besoin du

LEMME. — *Soit  $M_0$  un élément de  $M_n(\mathbb{C})$ . L'endomorphisme*

$$\Phi_{M_0, \lambda} : M \mapsto \lambda M M_0 - M_0 M$$

*de  $M_n(\mathbb{C})$  a pour spectre le multi-ensemble  $\lambda \operatorname{Sp}(M_0) - \operatorname{Sp}(M_0)$ .*

Autrement dit, si l'on note

$$\operatorname{Sp}(M_0) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

le spectre de  $\Phi_{M_0, \lambda}$  est  $\{\lambda \lambda_i - \lambda_j; 1 \leq i, j \leq n\}$  en comptant les multiplicités.

L'assertion du lemme revient à dire que le polynôme caractéristique de  $\Phi_{M_0, \lambda}$  est  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} (T - \lambda \lambda_i + \lambda_j)$ . Cela équivaut à un système d'identités polynomiales en les coefficients de  $M_0$  et il suffit donc de le vérifier pour les éléments d'une partie Zariski-dense de  $M_n(\mathbb{C})$ , par exemple pour les matrices semi-simples.

Par ailleurs, si l'on note, pour  $N_0 \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ ,  $i_{N_0}$  l'automorphisme intérieur  $M \mapsto N_0 M (N_0)^{-1}$  de  $M_n(\mathbb{C})$ , on a l'égalité

$$\Phi_{N_0 M_0 (N_0)^{-1}, \lambda} = i_{N_0} \circ \Phi_{M_0, \lambda} \circ (i_{N_0})^{-1};$$

si  $M_0$  est semblable à  $M_1$ , alors  $\Phi_{M_0, \lambda}$  est semblable à  $\Phi_{M_1, \lambda}$ . On peut donc supposer  $M_0$  diagonale :  $M_0 = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Mais, dans ce cas, l'effet de  $\Phi_{M_0, \lambda}$  sur les matrices élémentaires est  $E_{i, j} \mapsto (\lambda \lambda_j - \lambda_i) E_{i, j}$  et la conclusion est alors immédiate.  $\square$

Ce lemme est d'ailleurs valable sur tout corps commutatif.

Supposons maintenant le système de matrice  $A$  fuchsien non résonnant. Le théorème qui suit dit que ce système est alors équivalent au sens de Birkhoff au système de matrice  $A(0)$ .

THÉORÈME. — *Il existe une unique transformation de jauge formelle, tangente à l'identité*

$$F = I_n + zF_1 + \dots \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}\{z\})$$

*telle que  $(\sigma_q F)^{-1} A F = A_0$ . Cette transformation est convergente.*

Comme prévisible, il y a une étape formelle puis le recours aux séries majorantes.

• Étape 1 : existence et unicité de la solution formelle. Le système prescrit équivaut au système avec conditions initiales :

$$\begin{cases} AF = (\sigma_q F)A_0 \\ F_0 = I_n \end{cases} \iff \begin{cases} F_0 = I_n \\ q^m F_m A_0 = A_0 F_m + \cdots + A_m F_0, \forall m \geq 1. \end{cases}$$

Le lemme ci-dessus, joint à l'hypothèse de non-résonance, garantit que, pour  $m \geq 1$ , l'endomorphisme  $\Phi_{A_0, q^m}$  est inversible. Les coefficients  $F_m$  sont donc uniquement définis par les relations

$$\begin{cases} F_0 = I_n \\ F_m = (\Phi_{A_0, q^m})^{-1}(A_1 F_{m-1} + \cdots + A_m F_0), \quad \forall m \geq 1. \end{cases}$$

Cette partie de la preuve garde un sens et reste valable sur un corps commutatif quelconque.

• Étape 2 : convergence des solutions formelles. Puisque  $|q| > 1$ , l'endomorphisme  $\Phi_{A_0, q^m}$  est équivalent, lorsque  $m \rightarrow \infty$ , à la multiplication à droite qui à  $M$  associe  $M \times (q^m A_0)$ . Choissant, dans  $\text{End}_{\mathbb{C}}(M_n(\mathbb{C}))$  la norme associée à une norme d'algèbre quelconque sur  $M_n(\mathbb{C})$ , on conclut que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|(\Phi_{A_0, q^m})^{-1}\| = 0$ . Il s'ensuit en particulier que  $b = \sup_{m \geq 1} \|(\Phi_{A_0, q^m})^{-1}\| < \infty$ .

Notant  $a_m = \|A_m\|$  et  $f_m = \|F_m\|$ , on obtient les inégalités :

$$\forall m \geq 1, \quad 0 \leq f_m \leq b(a_1 f_{m-1} + \cdots + a_m f_0).$$

Comme la série  $\sum a_m z^m$  converge, la méthode des séries majorantes permet de conclure aisément.  $\square$

Il est à noter que, si  $A$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  (dans la suite, elle le sera même sur  $\mathbb{S}$ ),  $F$  l'est aussi : son équation fonctionnelle se réécrit en effet  $\sigma_q F = AF A_0^{-1}$  d'où la « propagation des pôles » déjà notée.

On appellera *solution canonique dans le cas non-résonnant* la matrice  $Fe_{q, A(0)}$  ainsi obtenue (en 1.1.2 et 1.1.3).

#### 1.1.4. Synthèse.

On peut résumer les résultats qui précèdent en un

THÉORÈME. — *Le système (1) admet une solution fondamentale  $X^{(0)} \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$ . Dans le cas fuchsien non résonnant, il y a un choix canonique  $Me_{q,A(0)}$  où  $M$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et  $M(0) = I_n$ . Dans le cas singulier régulier général, il y a une solution de la forme  $MN$  où  $M \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$  et où  $N$  est formée de blocs de la forme  $e_{q,c}(\xi_{1,p})^{\ell_q} = e_{q,c}L_p$  (notations de 1.1.2.1).*

Cette dernière forme s'obtient simplement par réduction de Jordan de la valeur en 0 de la matrice non résonnante à laquelle on s'est ramené. Nous appellerons « log-car » une matrice de la forme de  $N$  (bâtie à l'aide du « logarithme »  $\ell_q$  et des « caractères »  $e_{q,c}$ ). La matrice  $M$  n'est autre que le produit des transformations de jauge nécessaires, qui sont respectivement les unes rationnelles et l'autre méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , tangente à l'identité. Elle est donc bien à coefficients méromorphes sur  $\mathbb{C}$ . Il s'ensuit que  $X^{(0)}$  est bien à coefficients dans  $\mathbb{K}_0$ . □

Le corps des constantes étant  $\mathbb{K}_0^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbb{E})$  (annexe A), toutes les solutions de (1) sont alors de la forme  $X^{(0)}V$  où  $V \in \mathcal{M}(\mathbb{E})^n$ .

La description des pôles donnée dans l'introduction se déduit de ce qui précède. Définissons le lieu singulier d'une fonction matricielle  $F$  comme la partie suivante de  $\mathbb{C}^*$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(F) &:= \{\text{pôles de } F\} \cup \{\text{zéros de } \det F\} \\ &= \{\text{pôles de } F\} \cup \{\text{pôles de } F^{-1}\}. \end{aligned}$$

Les singularités de  $M$  sur  $\mathbb{C}^*$  forment une union finie de demi-spirales logarithmiques discrètes  $q^{\mathbb{N}^*} \mathcal{S}(A)$ . En effet, soit  $K = (\sigma_q N)N^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Alors,  $\sigma_q M = AMK^{-1}$ , soit encore, en notant  $\tau_q = \sigma_q^{-1}$ ,

$$M = (\tau_q A)(\tau_q M)K^{-1}.$$

En itérant cette formule, on trouve

$$M = (\tau_q A) \cdots (\tau_q^r A)(\tau_q^r M)K^{-r},$$

ce qui permet de ramener tout point de  $\mathbb{C}^*$  dans un voisinage de 0 où la seule singularité de  $M$  est 0. On en déduit que

$$\mathcal{S}(M) \subset q^{\mathbb{N}^*} \mathcal{S}(A).$$

Des propriétés de  $\ell_q$  et des  $e_{q,c}$  (0.1), on déduit d'ailleurs que les singularités de  $N$  sur  $\mathbb{C}^*$  forment des spirales logarithmiques discrètes déterminées par la structure de Jordan :

- Les spirales  $q^{\mathbb{Z}}\alpha$  de zéros et de pôles des caractères non triviaux, c'est-à-dire d'exposants  $c \in \text{Sp}(A(0)) - q^{\mathbb{Z}}$ .
- La spirale  $q^{\mathbb{Z}}$  des pôles de  $\ell_q$  si, après préparation,  $A(0)$  a au moins un bloc unipotent de taille  $\geq 2$ .

Dans tous les cas :

$$\mathcal{S}(N) \subset q^{\mathbb{Z}}(\text{Sp}(A(0)) \cup \{1\}).$$

### 1.2. Non-unicité des solutions canoniques.

Écrivant  $N = LC$  la matrice obtenue ci-dessus (partie log-car de la solution), en vertu de la congruence  $e_{q,qc} \equiv ze_{q,c} \pmod{\mathbb{C}^*}$ , on peut imposer à la matrice  $C$  (diagonale de caractères) de ne contenir que des caractères d'exposants  $c$  tels que  $1 \leq |c| < |q|$  et de commuter tout de même avec  $L$ . De même, on peut introduire un ordre arbitraire sur  $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$  et ranger les caractères en ordre croissant d'exposants; et, pour chaque caractère, les blocs unipotents associés par ordre croissant de tailles : ces deux conditions s'obtiennent en effet à l'aide de matrices de permutations. On dira, si toutes ces conditions sont réunies, que la solution est sous forme normalisée. Il n'y a pas unicité de solutions de cette forme : on va voir ci-dessous ce qu'il en est exactement. En revanche, à solution donnée, on va voir que l'écriture normalisée est unique.

**THÉORÈME.** — *Soit  $X = MN$  une solution canonique fondamentale en 0 en forme normale. Alors  $X' = M'N'$  est une solution canonique fondamentale en 0 en forme normale si et seulement si  $N' = N$  et  $M' = MR$  où  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $R$  commute avec  $N$ .*

Seule la nécessité de la condition n'est pas évidente. Les matrices  $K = (\sigma_q N)N^{-1}$  et  $K' = (\sigma_q N')(N')^{-1}$  sont des éléments de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  ayant respectivement même commutant que  $N$  et que  $N'$ .

Notant  $R = M^{-1}M'$ , on a  $N^{-1}RN' = X^{-1}X'$ , qui est elliptique puisqu'elle relie deux solutions d'un même système. Si  $e_{q,c_1}L_1, \dots, e_{q,c_r}L_r$  (resp.  $e_{q,c'_1}L'_1, \dots, e_{q,c'_s}L'_s$ ) sont les blocs diagonaux (carrés) de  $N$  (resp. de  $N'$ ), et si les  $R_{i,j}$ , pour  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$  sont les blocs correspondants (rectangulaires) de  $R$ , les blocs de  $N^{-1}RN'$  sont les  $(e_{q,c'_j}/e_{q,c_i})L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$  : ceux-ci sont donc elliptiques. Les coefficients de  $L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$  sont donc des caractères d'exposant  $c_i/c'_j$ . Mais ils sont éléments de  $\mathbf{k}'_0(\ell_q)$ , où  $\mathbf{k}'_0$  désigne le corps des fractions  $\mathbb{C}(\{z\})$  de l'anneau des séries convergentes  $\mathbb{C}\{z\}$ , donc

de la forme  $az^p, p \in \mathbb{Z}$  (voir annexe A). Les conditions de normalisation entraînent donc soit que  $R_{i,j} = 0$ , soit que  $c'_j = c_j$  et  $L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$  est à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Dans ce dernier cas, notant  $S_{i,j} = L_i^{-1}R_{i,j}L'_j$ , on développe l'égalité  $L_i S_{i,j} = R_{i,j}L'_j$  dans la base des  $\ell_q^{(k)}$ . Des écritures

$$L_i = \sum_{k \geq 0} \ell_q^{(k)} \xi_{0,m_i}^k, \quad L'_i = \sum_{k \geq 0} \ell_q^{(k')} \xi_{0,m'_i}^k,$$

on déduit que  $R_{i,j} = S_{i,j}$  puis que  $\xi_{0,m_i}^k R_{i,j} = R_{i,j} \xi_{0,m'_i}^k$ . Mais ceci signifie que  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et que  $R^{-1}KR = K'$ . Les conditions imposées par la normalisation entraînent alors que  $K = K'$ . □

L'unicité de la forme normale d'une solution canonique donnée est un corollaire immédiat de ce théorème.

**1.3. Caractérisation des systèmes singuliers réguliers par la forme des solutions.**

Il s'agit plus ou moins d'une réciproque aux résultats de 1.1.

1.3.1. *Un algorithme de réduction.*

Appelons *uniformisante* un élément  $u \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  dont 0 est zéro simple, autrement dit dont la valuation  $v_0(u)$  en 0 vaut 1. Nous établirons d'abord un lemme très utile. Il s'agit en fait d'un algorithme de réduction analogue à l'algorithme du pivot de Gauss, valable dans tout anneau de valuation discrète.

LEMME. — *Toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$  peut s'écrire sous la forme  $M = CR$ , avec des matrices  $C, R \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$  telles que :*

- (i) *R est régulière en 0 (i.e.  $R(0) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ );*
- (ii) *C est produit :*
  - 1) *d'une puissance  $u^k, -k \in \mathbb{N}$  d'une uniformisante  $u$  arbitraire;*
  - 2) *de matrices  $T_{i,\alpha}$  d'opérations élémentaires sur les lignes;*
  - 3) *de matrices de dilatation  $D_{i,v}$ , où les uniformisantes  $v$  sont arbitraires (et choisies indépendamment les unes des autres).*

Pour être précis, les matrices mentionnées sont définies comme suit. La matrice  $T_{i,\alpha}$  ( $\alpha \in \mathbb{C}^n, \alpha_i \neq 0$ ) est égale à l'identité, sauf en ce qui

concerne la ligne de rang  $i$  :

$$T_{i,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse d'une telle matrice est une matrice de même forme. La matrice de dilatation  $D_{i,v}$  est diagonale et est égale à l'identité, sauf en ce qui concerne le coefficient de rang  $i$  :

$$D_{i,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le lemme dit alors que l'on peut écrire :

$$C = u^k T_{i_1, \alpha_1} D_{i_1, v_1} \cdots T_{i_r, \alpha_r} D_{i_r, v_r}$$

où  $u, v_1, \dots, v_r$  sont des uniformisantes *arbitrairement choisies*.

On commence par multiplier  $M$  par une puissance  $u^k$  d'uniformisante, de manière à la rendre holomorphe en 0 : cela revient à se ramener à ce cas, et l'on doit alors prouver le lemme avec  $k = 0$  dans la conclusion. Puis l'on fait une récurrence sur  $v_0(\det M)$ . Si cette valuation vaut 0,  $M$  est régulière en 0 et l'on prend  $R = M$  et  $C = I_n$  (produit vide).

Si  $v_0(\det M) > 0$ , la matrice  $M(0)$  est singulière et il existe donc

$$\underline{\beta} \in \mathbb{C}^n - \{0\} \quad \text{tel que} \quad \underline{\beta} M(0) = 0 \in \mathbb{C}^n.$$

Soit  $i$  un indice tel que  $\beta_i \neq 0$  et soit  $v$  une uniformisante quelconque. Alors  $M_1 = D_{i,v}^{-1} T_{i,\beta} M$  est holomorphe en 0 et  $\det M_1 = (\beta_i/v) \det M$ ;  $M_1$  est meilleure que  $M$  :  $v_0(\det M_1) = v_0(\det M) - 1$ , ce qui achève la récurrence. Les  $T_{i,\alpha}$  de l'énoncé sont alors les  $T_{i,\beta}^{-1}$  (qui sont bien de cette forme!).  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — *Dans le lemme, on peut obtenir  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$  et de plus régulière en  $\infty$ , i.e.  $C(\infty) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .*

Il suffit pour cela de prendre chaque  $v_i$  égal à  $z/(1+z)$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2** (« double réduction »). — Soient  $C', C'' \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ . Il existe alors  $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$  telle que  $UC'$  est régulière en 0 et  $UC''$  est régulière en  $\infty$ .

On applique ce qui précède à  $M = (C'')^{-1}C'$  que l'on écrit donc sous la forme  $CR$  avec  $C, R \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ ,  $C$  régulière en  $\infty$  et  $R$  régulière en 0. On prend alors  $U = C^{-1}(C'')^{-1} : UC' = R$  est régulière en 0,  $UC'' = C^{-1}$  est régulière en  $\infty$  et, bien sur,  $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ . □

Outre ce qui suit, ce lemme et ses corollaires nous serviront au paragraphe 2 pour caractériser globalement les systèmes singuliers réguliers.

1.3.2. *Caractérisation des systèmes singuliers réguliers.*

**THÉORÈME.** — Si le système aux  $q$ -différences à coefficients rationnels  $\sigma_q X = AX$  admet une solution fondamentale de la forme  $MN$ , où  $M$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  et où  $N$  est une matrice log-car, alors c'est un système singulier régulier en 0.

Appliquons le corollaire 1 du lemme de 1.3.1 à  $M$ , que l'on écrit donc  $M = CR$ . Alors  $Y = RN$  est solution du système  $\sigma_q Y = BY$ , avec  $B = (\sigma_q C)^{-1}AC$ . La matrice  $B$  est rationnellement équivalente à  $A$ , puisque  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ . Mais

$$B = (\sigma_q(RN))(RN)^{-1} = \sigma_q R(\sigma_q NN^{-1})R^{-1}$$

est le produit de trois matrices régulières en 0, donc l'est elle-même; le système correspondant est donc fuchsien en 0. □

Il serait intéressant d'obtenir une caractérisation par la croissance des solutions. Le critère le plus probable semble celui-ci : croissance et décroissance modérées le long de toute demi-spirale logarithmique discrète  $q^{-\mathbb{N}}z_0$ .

**2. Matrice de connexion et classification.**

Le changement de coordonnées  $w = 1/z$  permet d'appliquer ces considérations au cas où le système (1) est *singulier régulier sur  $\mathbb{S}$* , c'est-à-dire singulier régulier en 0 et en  $\infty$ . Soient  $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$  et  $X^{(\infty)} = M^{(\infty)}N^{(\infty)}$  des solutions canoniques en forme normale : cette dernière s'obtient par le changement de variable  $w = 1/z$ , donc comme solution du système de matrice  $(A(1/qw))^{-1}$ .

### 2.1. Caractérisation globale des systèmes singuliers réguliers.

THÉORÈME. — *Un système singulier régulier est rationnellement équivalent à un système fuchsien en 0 et  $\infty$  à la fois.*

Soient  $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$  et  $X^{(\infty)} = M^{(\infty)}N^{(\infty)}$  des solutions canoniques en formes normales en 0 et en  $\infty$  respectivement. Appliquant le lemme, on écrit

$$M^{(0)} = C^{(0)}R^{(0)} \quad \text{et} \quad M^{(\infty)} = C^{(\infty)}R^{(\infty)}.$$

Il suffit maintenant de trouver  $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$  telle que  $UC^{(0)}$  et  $UC^{(\infty)}$  soient régulières en 0 et en  $\infty$  respectivement : on pourra alors conclure comme dans le théorème précédent. On applique pour cela le corollaire 2 du lemme de 1.3.1 avec  $C' = C^{(0)}$  et  $C'' = C^{(\infty)}$ .  $\square$

### 2.2. Classification des systèmes singuliers réguliers sur $\mathbb{S}$ .

Sous les hypothèses de ce paragraphe, il est clair que la *matrice de connexion de Birkhoff*

$$P = (X^{(\infty)})^{-1}X^{(0)}$$

est à coefficients elliptiques, autrement dit

$$P \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{E})).$$

Comme indiqué dans l'introduction, on associe à un système singulier régulier  $\sigma_q X = AX$ , la matrice de connexion  $P$  assortie des structures de Jordan en 0 et en  $\infty$ , ou, de façon équivalente, le triplet  $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$ . Celui-ci n'est cependant pas défini de manière univoque :  $P$  peut être remplacé par  $(R^{(\infty)})^{-1}PR^{(0)}$  si  $R^{(0)}, R^{(\infty)} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  commutent respectivement avec  $N^{(\infty)}$  et  $N^{(0)}$ . Ceci justifie l'introduction des notations suivantes.

Sur l'ensemble des triplets  $(N_1, P, N_2)$ , où  $P \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{E}))$  et où  $N_1, N_2$  sont des matrices log-car en forme normale, on définit une relation :

$$(N_1, P, N_2) \sim (N'_1, P', N'_2)$$

si et seulement si

$$N_1 = N'_1, \quad N_2 = N'_2, \quad R_1 P' = P R_2$$

où  $R_1, R_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $[R_1, N_1] = [R_2, N_2] = 0$ .

C'est bien une relation d'équivalence, et l'on notera  $\mathcal{F}_n$  l'ensemble quotient.

L'image dans  $\mathcal{F}_n$  du triplet  $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$  est alors bien définie d'après le paragraphe 1.2. On va maintenant prouver le

**THÉORÈME.** — *On obtient ainsi une bijection de l'ensemble  $\mathcal{E}_n$  des classes d'équivalence rationnelle de systèmes singuliers réguliers de rang  $n$  dans l'ensemble  $\mathcal{F}_n$ .*

On pourrait rapprocher ce codage de l'esprit de Birkhoff en lui donnant une allure un peu plus algébrique-combinatoire. Birkhoff pose en effet le problème «inverse» à partir de la donnée de  $P$  et de celle des exposants en  $0$  et en  $\infty$  : n'étudiant que le cas générique semi-simple, cela lui tient lieu de structure de Jordan. Dans notre cas, la donnée de  $N^{(0)}$  (resp. de  $N^{(\infty)}$ ) équivaut à celle de  $K^{(0)}$  (resp. de  $K^{(\infty)}$ ), qui est à son tour déterminée par la donnée des exposants et des tailles des blocs correspondants.

Si  $B = (\sigma_q U)^{-1}AU$  et si les solutions fondamentales choisies pour  $A$  sont  $M^{(0)}N^{(0)}$  et  $M^{(\infty)}N^{(\infty)}$ , on peut choisir pour  $B$  les solutions  $(UM^{(0)})N^{(0)}$  et  $(UM^{(\infty)})N^{(\infty)}$ , ce qui associe à  $B$  les mêmes parties log-car et la même matrice de connexion, donc le même triplet codant qu'à  $A$ . Ainsi, on a une application bien définie de  $\mathcal{E}_n$  dans  $\mathcal{F}_n$ .

Réciproquement, supposons que  $A$  et  $B$  ont fourni des triplets équivalents. Quitte à modifier le choix des solutions pour l'un de ces deux systèmes, on peut alors supposer que l'on a associé à  $A$  et  $B$  le même triplet  $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$ . Ainsi, on a des solutions fondamentales  $M_1^{(0)}N^{(0)}$  et  $M_1^{(\infty)}N^{(\infty)}$  pour  $A$ , et  $M_2^{(0)}N^{(0)}$  et  $M_2^{(\infty)}N^{(\infty)}$  pour  $B$ . De plus,

$$(M_1^{(\infty)})^{-1}M_1^{(0)} = (M_2^{(\infty)})^{-1}M_2^{(0)}$$

car ces deux matrices sont égales à  $N^{(\infty)}P(N^{(0)})^{-1}$ . On a donc

$$M_1^{(0)}(M_2^{(0)})^{-1} = M_1^{(\infty)}(M_2^{(\infty)})^{-1}.$$

Notant  $U$  cette matrice, on voit qu'elle est inversible et méromorphe à la fois sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{S} - \{0\}$ , donc rationnelle : et il est clair que  $B = (\sigma_q U)^{-1}AU$ , autrement dit, on a équivalence rationnelle. Ceci prouve l'injectivité.

Notons qu'en omettant les parties log-car dans le codage, on n'aurait plus l'injectivité. Par exemple, en dimension 1,  $A = 1$  et  $B = c \in \mathbb{C}^* - q^{\mathbb{Z}}$  ne sont pas équivalentes, mais on peut à toutes deux associer la matrice de connexion  $P = 1$ .

Reste à établir le seul point non trivial, la surjectivité. On part d'un triplet  $(N^{(\infty)}, P, N^{(0)})$  ( $P$  elliptique,  $N^{(\infty)}$  et  $N^{(0)}$  des matrices log-car) et l'on écrit  $P = (N^{(\infty)})^{-1}MN^{(0)}$  où  $M \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ . On invoque alors la «trivialité des fibrés méromorphes sur  $\mathbb{S}$ » (voir [19], p. 158, ainsi que 2.3.1 ci-dessous) : cela entraîne que  $M$  s'écrit  $(M^{(\infty)})^{-1}M^{(0)}$ , où  $M^{(0)} \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$  et  $M^{(\infty)} \in \text{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{S} - \{0\}))$ .

Les matrices  $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$  et  $X^{(\infty)} = M^{(\infty)}N^{(\infty)}$  sont connectées par la matrice elliptique  $P$  :  $X^{(\infty)} = PX^{(0)}$ , et sont donc solutions du même système  $\sigma_q X = AX$ , en prenant pour  $A$  la matrice

$$\sigma_q X^{(0)}(X^{(0)})^{-1} = \sigma_q X^{(\infty)}(X^{(\infty)})^{-1}.$$

La première écriture implique que  $A = \sigma_q M^{(0)}K^{(0)}(M^{(0)})^{-1}$ , où l'on a encore posé  $K^{(0)} = (\sigma_q N^{(0)})(N^{(0)})^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ , ce qui montre que  $A$  est méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Le raisonnement analogue à l'infini montre que  $A$  est méromorphe sur  $\mathbb{S} - \{0\}$  et l'on conclut que  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ .

Le système aux  $q$ -différences linéaire à coefficients rationnels  $\sigma_q X = AX$  admettant les deux solutions en formes normales  $X^{(0)} = M^{(0)}N^{(0)}$  et  $X^{(\infty)} = M^{(\infty)}N^{(\infty)}$ , il résulte de 1.3.2 qu'il est singulier régulier et ceci achève la preuve du théorème.  $\square$

## 2.3. Précisions diverses.

### 2.3.1. Polarité.

Le théorème 2.1 affirme que notre système est rationnellement équivalent à un système fuchsien en 0 et  $\infty$ ; cela revient à dire que l'on peut obtenir  $M^{(0)}$  et  $M^{(\infty)}$  respectivement régulières en 0 et en  $\infty$ .

En vue des applications à la théorie de Galois (voir [24], [25]), il est utile de pouvoir préciser la position des singularités. Celles de  $N^{(0)}$  et de  $N^{(\infty)}$  sont totalement déterminées par la structure de Jordan de  $A(0)$  et de  $A(\infty)$ . En ce qui concerne  $M$ , on déduit facilement ce qui suit de la preuve du théorème. Soit une partie finie  $\Sigma \subset \mathbb{C}^*$ ; pour simplifier la formulation, nous supposons que deux éléments distincts de  $\Sigma$  ne sont pas congrus modulo  $q^{\mathbb{Z}}$ .

- Sens direct : partant d'un système (1) tel que  $\mathcal{S}(A) \subset \Sigma$ , on voit que les singularités de  $M$  appartiennent à  $q^{\mathbb{Z}}\Sigma$ .

- Sens inverse : supposons que les singularités de  $M$  appartiennent à  $q^{\mathbb{Z}}\Sigma$ . L'invocation du «Preliminary Theorem» de [6] (lemme de Birkhoff;

voir ci-dessous) à la place de l'argument de trivialité des fibrés méromorphes permet de choisir les singularités de  $M^{(0)}$  et  $M^{(\infty)}$  respectivement dans  $q^{\mathbb{N}^*} \Sigma$  et dans  $q^{-\mathbb{N}} \Sigma$ ; le système (1) correspondant est alors tel que  $\mathcal{S}(A) \subset \Sigma$  (voir également [3]).

Sous la forme simplifiée utilisée p. 566–567 de *loc. cit.* (un seul contour, une seule matrice; la forme complète se trouve p. 533), voici l'énoncé du «Preliminary Theorem»<sup>(3)</sup>.

*Soit  $C$  une courbe analytique fermée simple de  $\mathbb{C}$  qui entoure 0 et soit  $M(z)$  une matrice holomorphe inversible dans un voisinage de  $C$ . Soient  $D_0$  et  $D_\infty$  les composantes connexes de  $\mathbb{S} - C$  contenant respectivement 0 et  $\infty$ . Il existe alors un voisinage ouvert  $V_0$  de  $\overline{D_0}$ , un voisinage ouvert  $V_\infty$  de  $\overline{D_\infty}$  et des matrices  $M^{(0)}, M^{(\infty)}$  holomorphes inversibles respectivement sur  $V_0$  et sur  $V_\infty - \{\infty\}$ ,  $V_\infty$  étant de plus holomorphe (mais pas nécessairement inversible) en  $\infty$ , telles que, sur  $V_0 \cap V_\infty$  :  $M^{(0)} = M^{(\infty)}M$ .*

Pour appliquer ce théorème, nous choisissons une courbe  $C$  qui passe entre  $z$  et  $qz$  pour chaque  $z \in \Sigma$ .

### 2.3.2. Interprétation catégorique.

La normalisation un peu artificielle de la forme des matrices log-car a pour but d'obtenir un énoncé pas trop compliqué. Si on relaxe cette condition, la relation d'équivalence qui sert à définir  $\mathcal{F}_n$  se traduit, pour les parties log-car, par les conditions  $R_1 N_1 = N'_1 R_1$  et  $R_2 N_2 = N'_2 R_2$ .

Les couples  $(R_1, R_2)$  correspondent, dans la version catégorique du théorème d'équivalence (voir [24], [25]) à des isomorphismes. Ce théorème est donc le premier indice de la possibilité d'obtenir par cette voie (c'est-à-dire, en travaillant avec de «vraies fonctions») un groupe de Galois qui soit un groupe algébrique sur  $\mathbb{C}$ , question qui est restée longtemps pendante.

## 3. Comportement des solutions lorsque $q \rightarrow 1$ .

Nous supposons maintenant donnés  $\tau_0$  tel que  $\text{Im}(\tau_0) > 0$  et  $q_0 = e^{-2i\pi\tau_0}$ . Nous posons  $q = q_0^\epsilon$ , c'est-à-dire  $\tau = \tau_0\epsilon$ ,  $\epsilon$  étant un réel strictement positif que l'on va faire tendre vers 0. Les spirales et demi-spirales logarithmiques discrètes  $q^{\mathbb{Z}}, q^{\mathbb{N}}$  se condensent alors en des coupures spirales  $q_0^{\mathbb{R}}, q_0^{\mathbb{R}^+}$  de  $\mathbb{S}$ .

<sup>(3)</sup> Nous notons ici  $M, M^{(0)}, M^{(\infty)}$  les matrices  $A, U_0, U_\infty$  de Birkhoff.

Afin d'alléger les notations, toutes les dépendances en  $\epsilon$  ne seront pas dénotées explicitement.

**3.1. Estimation asymptotique de  $e_{q,c}$  et de  $\ell_q$ .**

PROPOSITION.

- (i)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (q - 1)\ell_q(z) = \log(-z)$ .
- (ii) Si  $(c - 1)/(q - 1) \rightarrow \gamma$ , alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_{q,c}(z) = (-z)^\gamma$ .

Il s'agit des déterminations principales sur l'ouvert simplement connexe  $\Omega = \mathbb{S} - q_0^{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* - q_0^{\mathbb{R}}$  (resp.  $-1 \mapsto 0, -1 \mapsto 1$ ).

Pour prouver cette proposition, on introduit la fonction

$$\tilde{\Theta}(\tau, x) = \Theta_q(e^{2i\pi x}),$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle (voir [15], [17])

$$\tilde{\Theta}(\tau, x) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(x - \frac{1}{2}(\tau+1))^2}} \tilde{\Theta}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{x}{\tau}\right).$$

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ ; on cherche un équivalent de  $\Theta_q(q^\alpha z) = \tilde{\Theta}(\tau, x - \tau\alpha)$  lorsque  $\epsilon = \tau/\tau_0 \rightarrow 0^+$ . L'équation fonctionnelle se réécrit

$$\tilde{\Theta}(\tau, x - \tau\alpha) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(x - \tau\alpha - \frac{1}{2}(\tau+1))^2}} \tilde{\Theta}\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{x}{\tau} + \alpha\right).$$

Le «facteur d'automorphie» vaut

$$\sqrt{i/\tau} e^{-(i\pi/\tau)(x - \frac{1}{2})^2} e^{2i\pi(\alpha + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(1 + O(\tau))}$$

avec un  $O(\tau)$  uniforme en  $x \in \mathbb{C}$ .

Si l'on écrit  $x = u + iv$  (qui n'est déterminé qu'à un entier près) et  $\tau_0 = \tau_1 + i\tau_2$ , il est loisible de supposer que  $u - v\tau_1/\tau_2$  appartient à  $[0; 1[$ : supposons que ce n'est pas 0. Cela revient simplement à supposer que l'on a pris  $z \in \Omega$  et  $2i\pi(x - \frac{1}{2}) = \log(-z)$ .

La série qui définit le facteur  $\tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau + \alpha)$  ne comprend alors, hors le terme constant 1, que des termes de la forme

$$e^{2i\pi m(\alpha + \frac{1}{2})} \cdot e^{-\frac{i\pi}{\tau}(m^2 + 2m(x - \frac{1}{2}))} \quad m \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

et ceux-ci convergent normalement vers 0 lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , en vertu de l'égalité

$$\operatorname{Re} \left( -\frac{i\pi}{\tau} \left( m^2 + 2m \left( x - \frac{1}{2} \right) \right) \right) = -\frac{\pi \operatorname{Im}(\tau_0)}{\epsilon |\tau_0|^2} \left( m^2 + 2m \left( u - \frac{1}{2} - v \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \right)$$

et de majorations aisées. On en déduit les estimations suivantes :

1) Pour  $z \in \Omega$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on a, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  :

$$\Theta_q(q^\alpha z) \sim \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-(i\pi/\tau)(x-\frac{1}{2})^2 + 2i\pi(\alpha+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}.$$

2) Si de plus  $\beta \in \mathbb{C}$  :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\Theta_q(q^\alpha z)}{\Theta_q(q^\beta z)} = (-z)^{\alpha-\beta}.$$

Cette dernière notation désigne bien sûr  $e^{(\alpha-\beta) \log(-z)}$ .

Ces conclusions demeurent si l'on perturbe les hypothèses au premier ordre :

1) Si  $z_0 \in \Omega$  et, si, pour  $j = 1, 2$ ,  $z_j = z_0(1 - 2i\pi\tau_0\alpha_j\epsilon + o(\epsilon))$ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Theta_q(z_2)/\Theta_q(z_1) = (-z)^{\alpha_2-\alpha_1}.$$

2) Si  $c = 1 - 2i\pi\tau_0\alpha\epsilon + o(\epsilon)$  et si  $z = z_0 + o(\epsilon)$ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_{q,c}(z) = (-z)^\alpha.$$

L'assertion (ii) de la proposition découle du deuxième point ci-dessus, qui découle du premier, lequel est conséquence du

LEMME. — On suppose que  $z_1$  et  $z_2$  tendent vers  $z_0 \in \Omega_0 = \mathbb{S} - q_0^{\overline{\mathbb{R}^+}} = \mathbb{C} - q_0^{\mathbb{R}^+}$ . On suppose de plus que  $z_2/z_1 = 1 + o(\epsilon)$ . Alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(z_2; p)_\infty}{(z_1; p)_\infty} = 1 \quad (\text{cf. (0.1) pour cette notation}).$$

Soit en effet  $u_q = z_1 - z_2$  : c'est un  $o(\epsilon)$ . On part de l'égalité :

$$\frac{(z_2; p)_\infty}{(z_1; p)_\infty} = \prod_{r \geq 0} \left( 1 + \frac{q^{-r} u_q}{1 - q^{-r} z_1} \right).$$

Il existe un disque ouvert  $\overset{\circ}{D}(z_0, \rho)$  sur lequel, quel que soit  $\lambda \geq 0$ ,  $|1 - z/q_0^\lambda| \geq \delta > 0$ . Pour  $q$  proche de 1,  $z_1$  et  $z_2$  sont dans ce disque et

$$\left| \log \frac{(z_2; p)_\infty}{(z_1; p)_\infty} \right| \leq \sum_{r \geq 0} \left| \frac{q^{-r} u_q}{1 - q^{-r} z_1} \right| \leq \frac{|u_q|}{\delta} \frac{|q|}{|q| - 1}.$$

Ce dernier majorant est un  $O(u_q/(q - 1))$  uniformément en  $q$ . Comme  $u_q = o(\epsilon)$  et  $q - 1 \sim -2i\pi\tau_0\epsilon$ , cette estimation est suffisante pour achever la preuve du lemme.

Pour démontrer l’assertion (i) de la proposition, on introduit

$$\tilde{L}_\tau(x) = \ell_q(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{\tilde{\Theta}'_x(\tau, x)}{\tilde{\Theta}(\tau, x)}.$$

Dérivant logarithmiquement l’équation fonctionnelle déjà invoquée, on trouve que

$$-\tau \tilde{L}_\tau(x) = \tilde{L}_{-1/\tau} \left( -\frac{x}{\tau} \right) + x - \frac{1}{2}(\tau + 1).$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,  $(q - 1)\ell_q(z)$  est équivalent à  $-2i\pi\tau \tilde{L}_\tau(x)$ . On choisit  $x \in ]0; 1[ + \mathbb{R}\tau_0$  ( $x$  n’est déterminé qu’à un entier près et  $z \in \Omega$ ). Le même argument de convergence normale que précédemment, appliqué à la série qui définit  $\tilde{L}_{-1/\tau}(-x/\tau)$  :

$$\tilde{L}_{-1/\tau} \left( -\frac{x}{\tau} \right) = \sum_{r \geq 1} \frac{e^{2i\pi \frac{x-r}{\tau}}}{1 - e^{2i\pi \frac{x-r}{\tau}}} - \sum_{r \geq 0} \frac{e^{2i\pi \frac{-x-r}{\tau}}}{1 - e^{2i\pi \frac{-x-r}{\tau}}}$$

(dérivée logarithmique de la formule du triple produit de Jacobi), permet de montrer que ce terme tend vers 0; la conclusion est alors immédiate.  $\square$

On peut ajouter une interprétation géométrique. Le lieu polaire de  $e_{q,c}$  est la spirale discrète  $cq^{\mathbb{Z}}$ , c’est-à-dire l’image par  $x \mapsto e^{2i\pi x}$  du réseau translaté  $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) + \gamma(q)\epsilon$  (ici,  $c = q^{\gamma(q)}$  et  $\gamma(q) \rightarrow \gamma$ ). Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , celui-ci se condense en le sous-groupe fermé  $\mathbb{Z} + \mathbb{R}\tau_0$  de  $\mathbb{C}$ , dont l’image dans  $\mathbb{C}^*$  est la spirale logarithmique continue  $q_0^{\mathbb{R}}$  : la *barrière de pôles (discrète) se transforme en coupure*. Du point de vue numérique,  $\Theta_q$  a un comportement « chaotique » le long de la barrière des pôles (dans le plan des  $x$  : le réseau  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ), lorsque celle-ci se condense en une coupure spirale (dans le plan des  $x$  : le sous-groupe fermé non discret  $\mathbb{Z} + \mathbb{R}\tau_0$ ). Il est raisonnable de conjecturer que toutes les conclusions de cette section et de la suivante demeurent valides si l’on impose simplement à  $q$  de tendre vers 1 en respectant cette géométrie, c’est-à-dire tangentiellement à une spirale logarithmique.

### 3.2. Comportement des solutions canoniques.

Supposons maintenant le système différentiel (2) (défini au §0.3) fuchsien sur  $\mathbb{S}$  et non résonnant en 0 (deux valeurs propres de  $\tilde{B}(0)$  ne peuvent différer d'un entier non nul). On notera  $\tilde{X}^{(0)}$  la solution canonique de (2) obtenue en appliquant la méthode de Frobenius en 0, avec, pour fonctions de base,  $(-z)^\gamma$  comme solution<sup>(4)</sup> de  $\delta f = \gamma f$  et  $\log(-z)$  comme solution de  $\delta f = 1$  (mêmes déterminations que ci-dessus). Notons enfin  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$  les pôles de  $\tilde{B}$  (ils sont simples et dans  $\mathbb{C}^*$ ).

Nous allons déployer (2) en une famille de systèmes aux  $q$ -différences (1) soumis aux contraintes suivantes :

1)  $A = A_\epsilon = I_n + (q - 1)B_\epsilon$ , où  $B_\epsilon$  converge vers  $\tilde{B}$  uniformément sur tout compact de l'ouvert simplement connexe  $\tilde{\Omega}_0 = \mathbb{C} - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j \mathbb{R}^+$  ; cette hypothèse peut d'ailleurs être affaiblie (voir [23], [24]).

2) Une trigonalisation  $\tilde{J} = \tilde{Q}^{-1} \tilde{B}(0) \tilde{Q}$  se déploie en une trigonalisation  $J_\epsilon = Q_\epsilon^{-1} B_\epsilon(0) Q_\epsilon$ , où  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} Q_\epsilon = \tilde{Q}$ .

Cette dernière condition n'est pas automatiquement vérifiée, comme le montre l'exemple suivant :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\epsilon = \epsilon \begin{pmatrix} \cos^2 \epsilon^{-1} & -\sin \epsilon^{-1} \cos \epsilon^{-1} \\ -\sin \epsilon^{-1} \cos \epsilon^{-1} & \sin^2 \epsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

On voit ici que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} B_\epsilon = \tilde{B}$ . Mais  $B_\epsilon/\epsilon$  est la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur de coordonnées  $(\cos 1/\epsilon, -\sin 1/\epsilon)$ . Toute trigonalisation de  $B_\epsilon$  sera donc obtenue dans une base tournant infiniment vite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , et l'on ne peut déployer aucune trigonalisation de  $\tilde{B}$  en une trigonalisation de  $B_\epsilon$ .

**THÉORÈME.** — Pour  $\epsilon$  proche de 0, le système (1) est non résonnant en 0. Soit  $X_\epsilon^{(0)} = M_\epsilon e_{q, A_\epsilon(0)}$  la solution canonique donnée par le théorème de 1.1. Alors, sur tout compact de  $\tilde{\Omega}'_0 = \tilde{\Omega}_0 - q_0^{\mathbb{R}}$ ,  $X_\epsilon^{(0)}$  est holomorphe pour  $\epsilon$  assez petit et elle y tend vers  $\tilde{X}^{(0)}$ .

Pour le prouver, on traite séparément la partie holomorphe  $M_\epsilon$  et la partie log-car  $e_{q, A_\epsilon(0)}$ .

1) Pour étudier  $M_\epsilon$ , on la caractérise par les conditions :

$$(\sigma_q M_\epsilon) A_\epsilon(0) = A_\epsilon M_\epsilon, \quad M_\epsilon(0) = I_n.$$

<sup>(4)</sup> Rappelons que  $\delta$  désigne l'opérateur différentiel  $z d/dz$ .

De même,  $\tilde{X}^{(0)} = \tilde{M}(-z)\tilde{B}^{(0)}$ , où  $\tilde{M}$  est caractérisé par les conditions :

$$\delta\tilde{M} = \tilde{B}\tilde{M} - \tilde{M}\tilde{B}(0), \quad \tilde{M}(0) = I_n.$$

Ces équations *matricielles* peuvent être considérées comme des équations *vectorielles* dans  $M_n(\mathbb{C})$  avec condition initiale (en 0) indépendante du paramètre  $\epsilon$ . C'est donc un cas particulier du théorème. Il est traité au paragraphe 3.3.

2) Le comportement de  $e_{q,A\epsilon(0)}$  résulte encore d'un cas particulier du théorème, celui où le système (1) est à coefficients constants (dépendant de  $\epsilon$ ). Cela revient donc à supposer que, pour chaque valeur de  $q$ ,  $B$  appartient à  $M_n(\mathbb{C})$ . On note

$$A = I_n + (q-1)B$$

et l'on se propose de préciser le comportement de  $e_{q,A}$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$  et que  $B \rightarrow \tilde{B}$  avec sa triangularisation. On reprend les notations précédentes.

Soit  $\bar{D} + \bar{N}$  la décomposition de Dunford additive de  $B$ . La décomposition de Dunford multiplicative  $DU$  de  $A$  s'obtient en prenant

$$D = I_n + (q-1)\bar{D}, \quad U = I_n + (q-1)D^{-1}\bar{N}.$$

Alors la matrice diagonale  $\Delta = SDS^{-1}$  et la matrice diagonale  $\bar{\Delta} = S\bar{D}S^{-1}$  (qui est la partie diagonale de  $T$ ) sont liées par la relation  $\Delta = I_n + (q-1)\bar{\Delta}$ .

Soient  $\tilde{D} + \tilde{N}$  la décomposition de Dunford additive de  $\tilde{B}$  et  $\tilde{\Delta} = \tilde{S}\tilde{D}\tilde{S}^{-1}$  la partie diagonale de  $\tilde{T}$ . Donc  $(\Delta - I_n)/(q-1)$  tend vers  $\tilde{\Delta}$ . Il est alors immédiat, d'après les résultats de 3.1, que  $e_{q,\Delta}$  tend vers  $(-z)^{\tilde{\Delta}}$  et donc  $e_{q,D}$  tend vers  $(-z)^{\tilde{D}}$ .

Comme  $D^{-1}\bar{N}$  tend vers  $\tilde{N}$ , il résulte pareillement de 3.1 que  $U^{\ell_q} = (I_n + (q-1)D^{-1}\bar{N})^{\ell_q}$  tend vers  $(-z)^{\tilde{N}}$  : cela revient en effet à dire que  $(q-1)^k \ell_q^{(k)}$  tend vers  $(\log(-z))^k/k!$ .

On voit donc que  $e_{q,A}$  tend vers  $(-z)^{\tilde{B}}$ .

Modulo le résultat de 3.3, ceci achève la preuve du théorème.  $\square$

### 3.3. Comportement des solutions à valeur initiale fixe.

On considère le système aux  $q$ -différences à coefficients rationnels fuchsien en 0, « avec conditions initiales » :

$$\sigma_q X = AX, \quad X(0) = X_0.$$

Ici,  $X_0$  est un vecteur fixé non nul de  $\mathbb{C}^n$  et  $A$  est fonction de  $q$ . On veut faire confluer ce système vers le système différentiel à coefficients rationnels avec conditions initiales

$$\delta \tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}, \quad \tilde{X}(0) = X_0.$$

Selon les conventions précédentes,  $q$  tend vers 1 le long d'une spirale logarithmique, autrement dit,  $q = q_0^\epsilon$  et  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Nous supposons que la matrice  $B = (A - I_n)/(q - 1)$  tend, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , vers la matrice à coefficients rationnels  $\tilde{B} \in M_n(\mathbb{C}(z))$  et nous n'indiquons pas explicitement les dépendances en  $q$  et en  $\epsilon$ .

Nous imposons en outre les conditions suivantes :

1) Notons  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$  les pôles de  $\tilde{B}$ . Ce sont donc des éléments de  $\mathbb{C}^*$  (le système différentiel étant fuchsien). On suppose que «les pôles de  $A$  tendent vers ceux de  $\tilde{B}$ », c'est-à-dire que, quel que soit  $z \notin \{\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r\}$ ,  $A$  est définie en  $z$  pour  $\epsilon$  assez petit. Ceci donne un sens à l'hypothèse  $B \rightarrow \tilde{B}$ .

2) Quel que soit  $q$ ,  $X_0$  est point fixe de  $A(0)$ .

3) Le système différentiel  $\delta \tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$  est fuchsien sur  $\mathbb{S}$  et non résonnant en 0, autrement dit  $\text{Sp}(\tilde{B}(0)) \cap (\mathbb{N}^* + \text{Sp}(\tilde{B}(0))) = \emptyset$ . On verra que cette condition entraîne que, pour  $\epsilon$  assez petit,  $\text{Sp}(A(0)) \cap q^{\mathbb{N}^*} \text{Sp}(A(0)) = \emptyset$  :  $A$  est non résonnante en 0.

Sous des hypothèses précisées de convergence, nous prouverons alors que l'unique solution  $X$  du système aux  $q$ -différences tend vers l'unique solution  $\tilde{X}$  du système différentiel. Nous procéderons en deux étapes :

- Étude locale : il s'agit de reprendre la résolution formelle et la preuve de convergence «en famille», et, en parallèle, l'algorithme correspondant pour le système différentiel.

- Étude globale : on sort d'un voisinage de 0 (dans lequel la convergence a été établie) le long de demi-spirales  $q_0^{\mathbb{R}^+}$ . Ceci nous ramène à un problème de variable réelle (on pose  $z = z_0 q_0^t$ ) et équivaut à l'emploi de la méthode d'Euler pour approcher les solutions d'une équation différentielle.

Nous notons dorénavant  $\tilde{\Omega}_0$  l'ouvert simplement connexe

$$\mathbb{C} - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}^+}.$$

3.3.1. *Étude locale.*

Il découle des hypothèses précédentes, que  $\tilde{B}$  est holomorphe en 0, ainsi que  $B$  pour  $\epsilon$  assez petit : on écrit donc

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1 z + \dots \quad \text{et} \quad B = B_0 + B_1 z + \dots$$

(les  $B_i$  dépendent donc de  $q$ ). On suppose en outre que la convergence de  $B$  vers  $\tilde{B}$  est normale dans un disque ouvert non vide  $\mathring{D}(0, \rho) \subset \tilde{\Omega}_0$ .

La résolution formelle des deux systèmes se mène en parallèle : leurs solutions respectives sont

$$X = X_0 + zX_1 + \dots \quad \text{et} \quad \tilde{X} = \tilde{X}_0 + z\tilde{X}_1 + \dots,$$

où  $\tilde{X}_0 = X_0$  est une donnée et où les autres termes se calculent par récurrence :

$$\begin{aligned} X_m &= (q^m I_n - A_0)^{-1} (A_1 X_{m-1} + \dots + A_m X_0), \\ \tilde{X}_m &= (m I_n - \tilde{B}_0)^{-1} (\tilde{B}_1 \tilde{X}_{m-1} + \dots + \tilde{B}_m \tilde{X}_0). \end{aligned}$$

Mais la première relation se réécrit :

$$X_m = ((q^m - 1)/(q - 1) I_n - B_0)^{-1} (B_1 X_{m-1} + \dots + B_m X_0).$$

On voit donc par récurrence que, quel que soit  $m$ ,  $\tilde{X}_m$  tend vers  $X_m$  sur  $\tilde{\Omega}_0$ .

Par ailleurs, on peut borner uniformément

$$((q^m - 1)/(q - 1) I_n - B_0)^{-1} \quad \text{et} \quad (m I_n - \tilde{B}_0)^{-1}$$

pour  $\epsilon$  assez petit et  $m \geq 1$ . La combinaison de l'hypothèse de convergence normale et de la méthode des majorants permet alors de conclure :

PROPOSITION. —  $X$  converge uniformément vers  $\tilde{X}$  sur un disque ouvert non vide  $\mathring{D}(0, r) \subset \tilde{\Omega}_0$ . □

3.3.2. *Étude globale.*

On va maintenant sortir du disque  $\mathring{D}(0, r)$  le long de segments de spirales de la forme  $q_0^{[a; b]}$  qui ne rencontrent pas les pôles  $\tilde{z}_i$ . On suppose dorénavant que  $B$  converge vers  $\tilde{B}$  uniformément sur tout tel segment (c'est par exemple le cas si la convergence est uniforme sur tout compact de  $\tilde{\Omega}_0$ ).

Fixons un point  $z_1 \in \tilde{\Omega}_0$  où l'on veut démontrer que  $X \rightarrow \tilde{X}$ . Pour un certain  $\lambda > 0$ , et un certain  $\alpha > 0$ ,  $z_0 = q_0^{-\lambda} z_1 \in \overset{\circ}{D}(0, r)$  et  $q_0^{[-\infty; \alpha]} z_0 \subset \overset{\circ}{D}(0, r)$  (c'en est un compact). On passe aux variables réelles en posant  $z = q_0^t z_0$  et  $Y_\epsilon(t) = X(z)$ ,  $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(z)$ . Notre but est donc de démontrer que  $Y_\epsilon(\lambda) \rightarrow \tilde{Y}(\lambda)$ .

On note  $C_\epsilon(t) = (q - 1)/\epsilon B(z)$  et  $\tilde{C}(t) = -2i\pi\tilde{B}(z)$ . Ainsi,  $C_\epsilon$  converge uniformément vers  $\tilde{C}$  sur  $[0; \lambda]$ .

On peut maintenant traduire le système différentiel  $\tilde{Y}'(y) = \tilde{C}(t)\tilde{Y}(t)$  et le système aux  $q$ -différences  $Y_\epsilon(t + \epsilon) = (I_n + \epsilon C_\epsilon(t))Y_\epsilon(t)$ . Nous n'aurons pas besoin des conditions initiales. La proposition ci-dessus implique que  $Y_\epsilon(t)$  converge vers  $\tilde{Y}(t)$  uniformément sur  $[0; \alpha]$ .

On invoquera maintenant la méthode d'Euler pour la résolution approchée d'équations différentielles linéaires (vectorielles, d'ordre 1), dans sa version multiplicative et à pas non constant. Faute d'une référence exactement appropriée à nos besoins, nous invoquerons [18] (problème d'analyse, III.5 et IV.1).

THÉORÈME. — Soit  $\mathcal{A} \in \mathcal{C} ]a; b[, M_n(\mathbb{C})$  et soient  $t_0 < t_1$  dans  $]a; b[$ . On se donne, pour  $p$  entier  $\geq 1$ , une subdivision

$$t_0 = s_0^{(p)} < s_1^{(p)} < \dots < s_{p-1}^{(p)} < s_p^{(p)} = t_1$$

de diamètre  $\epsilon_p := \max_{0 \leq i \leq p-1} \Delta s_i^{(p)}$  (on note  $\Delta s_i^{(p)} = s_{i+1}^{(p)} - s_i^{(p)}$ ). On suppose que  $\lim_{p \rightarrow \infty} \epsilon_p = 0$ . Alors, la résolvante du système différentiel  $\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X}$  est donnée par la formule :

$$U(t_1, t_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} (I_n + \mathcal{A}(s_{p-1}^{(p)})\Delta s_{p-1}^{(p)}) \cdots (I_n + \mathcal{A}(s_0^{(p)})\Delta s_0^{(p)}).$$

Appliquons ce théorème pour calculer la résolvante  $\tilde{U}(\lambda, \mu)$  du système différentiel  $\tilde{Y}' = \tilde{C}\tilde{Y}$  : nous aurons donc  $\tilde{Y}(\lambda) = \tilde{U}(\lambda, 0)\tilde{Y}(0)$ . On subdivise  $[0; \lambda]$  avec le pas  $\nu\epsilon$  puis  $N$  fois le pas  $\epsilon$ , où  $N = E(\frac{\lambda}{\epsilon})$  et  $\nu = \lambda/\epsilon - N$ . On trouve :

$$\tilde{U}(\lambda, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (I_n + \epsilon\tilde{C}(\lambda - \epsilon)) \cdots (I_n + \epsilon\tilde{C}(\lambda - N\epsilon))(I_n + \nu\epsilon\tilde{C}(0)).$$

Mais nous voulons utiliser  $C$  et non  $\tilde{C}$ . Nous remplacerons donc [18], III.6 par une version améliorée que l'on déduit du

LEMME. — Soient  $A_1, \dots, A_m, E_1, \dots, E_m$  des éléments de  $M_n(\mathbb{C})$  et notons  $A'_1 = A_1 + E_1, \dots, A'_m = A_m + E_m$ . Alors

$$\begin{aligned} & \| (I_n + A_1) \cdots (I_n + A_m) - (I_n + A'_1) \cdots (I_n + A'_m) \| \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^m \|E_i\| \right) \exp \left( \sum_{i=1}^m (\|A_i\| + \|E_i\|) \right). \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — Soient  $(A_{p,i})$  et  $(B_{p,i})$  deux familles de matrices indexées par des couples d'entiers  $(p, i)$  tels que  $1 \leq i \leq p$ . On considère les suites de terme général  $U_p = (I_n + A_{p,1}) \cdots (I_n + A_{p,p})$  et  $V_p = (I_n + B_{p,1}) \cdots (I_n + B_{p,p})$ . On suppose que, lorsque  $p \rightarrow \infty$  :

- (i) la suite de terme général  $\sum_{1 \leq i \leq p} \|A_{p,i}\|$  est bornée;
- (ii) la suite de terme général  $\sum_{1 \leq i \leq p} \|A_{p,i} - B_{p,i}\|$  converge vers 0.

Alors  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|U_p - V_p\| = 0$ .

Nous utiliserons ce corollaire avec pour matrices  $A_{p,i}$  et  $B_{p,i}$  les valeurs respectives de  $\tilde{C}$  et  $C$  aux points de la subdivision introduite plus haut. La preuve du lemme est immédiate, ainsi que celles du corollaire et du fait que les conditions de celui-ci sont remplies dans notre situation. On conclut donc que  $Y_\epsilon(\lambda) \rightarrow \tilde{Y}(\lambda)$ , ce qui achève la preuve. □

### 4. Comportement de la matrice de connexion lorsque $q \rightarrow 1$ , et monodromie.

On ajoute maintenant les conditions analogues en  $\infty$ . Le système (2) y est supposé non-résonnant ; de plus :

- (i')  $B_\epsilon$  converge vers  $\tilde{B}$  uniformément sur tout compact de

$$\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{S} - \{0\} - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}^-}.$$

- (ii') Une trigonalisation de  $\tilde{B}(\infty)$  se déploie en une trigonalisation de  $B_\epsilon(\infty)$ . Ces hypothèses sont par exemple réalisées si l'on prend  $B_\epsilon = \tilde{B}, A_\epsilon = I_n + (q - 1)\tilde{B}$ .

Notant  $X_\epsilon^{(\infty)}$  et  $\tilde{X}^{(\infty)}$  les solutions canoniques de (1) et de (2) en  $\infty$ , on déduit du théorème 1 que  $P_\epsilon = (X_\epsilon^{(\infty)})^{-1} X_\epsilon^{(0)}$  tend vers  $\tilde{P} = (\tilde{X}^{(\infty)})^{-1} \tilde{X}^{(0)}$  sur

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}'_0 \cap \tilde{\Omega}'_\infty = \mathbb{C}^* - \bigcup_{0 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}}$$

(on a posé  $\tilde{z}_0 = 1$  pour simplifier les notations). La matrice  $\tilde{P}$  est holomorphe sur  $\tilde{\Omega}$  et  $\delta\tilde{P} = 0$  : elle y est localement constante.

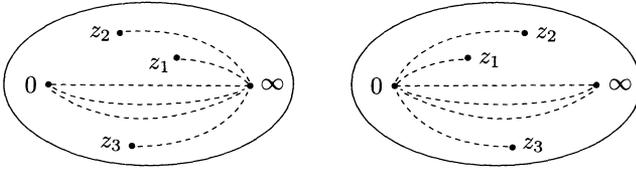


Figure 1. Singularités de  $X^{(0)}$  (à gauche) et de  $X^{(\infty)}$  (à droite)

Pour interpréter ses valeurs sur les composantes connexes de  $\tilde{\Omega}$ , on va supposer que *les coupures ne se superposent pas*, autrement dit, que les  $(r + 1)$  spirales  $\tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}}$  ( $0 \leq j \leq r$ ) sont deux à deux disjointes. C'est le cas pour un choix générique de  $q_0$ . Nous choisissons de plus l'indexation de sorte qu'un cercle positif autour de 0 rencontre les spirales  $\tilde{z}_0 q_0^{\mathbb{R}}, \dots, \tilde{z}_r q_0^{\mathbb{R}}$  dans cet ordre. Les composantes connexes de  $\tilde{\Omega}$  sont alors des ouverts  $\tilde{U}_0, \dots, \tilde{U}_r$  où  $\tilde{U}_j$  a sur sa frontière  $\tilde{z}_j$  et  $\tilde{z}_{j+1}$ . Soit  $\tilde{P}_j \in GL_n(\mathbb{C})$  la valeur de  $\tilde{P}$  sur  $\tilde{U}_j$ .

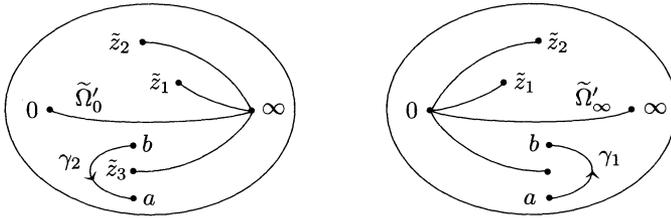


Figure 2. Domaine de définition de  $\tilde{X}^{(0)}$  (à gauche) et de  $\tilde{X}^{(\infty)}$  (à droite)

Considérons un petit lacet positif  $\gamma$  autour de  $\tilde{z}_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) de base  $a \in \tilde{U}_{j-1}$  ; on peut le supposer composé d'un chemin  $\gamma_1$  dans  $\tilde{\Omega}_\infty$  partant de  $a$  et arrivant en  $b \in \tilde{U}_j$ , suivi d'un chemin  $\gamma_2$  dans  $\tilde{\Omega}_0$  partant de  $b$  et arrivant en  $a$ . Le prolongement analytique le long de  $\gamma_1$  transforme  $\tilde{X}^{(0)}$  en  $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}_{j-1}$  ; celui le long de  $\gamma_2$  transforme  $\tilde{X}^{(\infty)}$  en  $\tilde{X}^{(0)}\tilde{P}_j^{-1}$  et donc  $\tilde{X}^{(\infty)}\tilde{P}_{j-1}$  en  $\tilde{X}^{(0)}\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1}$ .

THÉORÈME. — La matrice de monodromie de (2) autour de  $\tilde{z}_j$  dans la base  $\tilde{X}^{(0)}$  est  $\tilde{P}_j^{-1}\tilde{P}_{j-1}$ . □

Rappelons les hypothèses de ce théorème. On part de l'équation différentielle fuchsienne non-résonnante en 0 et en  $\infty$  :  $\delta\tilde{X} = \tilde{B}\tilde{X}$  où

$\tilde{B} \in M_n(\mathbb{C}(z))$ , que l'on « déploie » en une famille de systèmes aux  $q$ -différences de matrices  $A_\epsilon \in M_n(\mathbb{C}(z))$  dont les coefficients dépendent de  $q = q_0^\epsilon$ , telles que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (A_\epsilon - I_n)/(q - 1) = \tilde{B}$  et de plus soumises aux contraintes suivantes :

- (a) les pôles de  $A_\epsilon$  tendent vers les pôles  $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_r$  de  $\tilde{B}$ ;
- (b) la convergence est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{C}^* - \bigcup_{1 \leq j \leq r} \tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}}$ ;

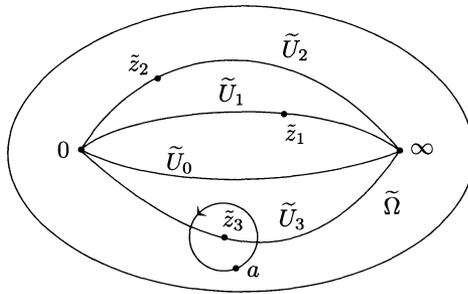


Figure 3. Domaine de définition de  $\tilde{P}$

(c) La convergence en 0 et en  $\infty$  a lieu à structure de Jordan constante, avec matrice de passage continue. On suppose enfin que les coupures ne se superposent pas, autrement dit, que les spirales  $\tilde{z}_j q_0^{\mathbb{R}}$  ( $0 \leq j \leq r$ ) sont deux à deux disjointes (on a noté  $\tilde{z}_0 = 1$ ). Le système aux  $q$ -différences de matrice  $A_\epsilon$  admet alors des solutions canoniques  $X_\epsilon^{(0)}$  et  $X_\epsilon^{(\infty)}$  et la matrice de connexion correspondante  $P_\epsilon = (X_\epsilon^{(\infty)})^{-1} X_\epsilon^{(0)}$  tend vers une matrice localement constante  $\tilde{P}$  dont les valeurs  $\tilde{P}_j$  satisfont aux conclusions du théorème ci-dessus.

Bien sûr, comme dans le cas différentiel, la monodromie en 0 et en  $\infty$  ne se tire pas de la description combinatoire mais des structures de Jordan en 0 et en  $\infty$ .

Ce phénomène est lié à des propriétés galoisiennes. On introduit dans [24] et [25] une matrice

$$\check{P} = \Psi^{(\infty)} P (\Psi^{(0)})^{-1}$$

obtenue en « tordant »  $P$  par des matrices déduites des structures de Jordan de  $A(0)$  et de  $A(\infty)$  et telles que, lorsque  $q \rightarrow 1$ , pour  $a$  fixé,  $\Psi^{(0)}(a)$  et  $\Psi^{(\infty)}(a)$  tendent vers des éléments  $\tilde{\Psi}^{(0)}(a)$  et  $\tilde{\Psi}^{(\infty)}(a)$  (que l'on sait calculer) des groupes de galois locaux de (2) en 0 et en  $\infty$ .

On interprète alors les  $\check{P}(a)^{-1}\check{P}(b)$  comme des automorphismes d'un certain foncteur fibre en 0 dans la catégorie tensorielle des systèmes fuchsien. Avec d'autres automorphismes déduits des structures de Jordan, et qui expriment la monodromie en 0 et  $\infty$ , ils forment une partie Zariski-dense du groupe de Galois de l'équation : on a donc un analogue du théorème de densité de Schlesinger (voir [26], [4], [8]), mais à condition de pouvoir interpréter les  $\check{P}(a)^{-1}\check{P}(b)$  comme des opérateurs de monodromie. Dans le cas où les structures de Jordan sont triviales ( $A(0) = A(\infty) = I_n$ ), cela correspond aux résultats de Etingof (voir [11]). Le lien entre nos résultats et ceux de van der Put et Singer (voir [19]) est discuté dans [24] et [25].

Remarquons que, des conditions imposées à  $\tilde{B}$ , on n'utilise la fuchsianité qu'en 0. Les résultats ci-dessus s'appliqueraient donc aussi bien à l'équation différentielle  $df/dz = e^{1/(z-1)}f$  par exemple. Nous donnons en 5.3 un exemple plus significatif. Les équations aux  $q$ -différences fuchsien sont donc sans doute beaucoup moins régulières que leurs analogues différentielles.

### 5. Trois exemples.

Nous combinerons, pour simplifier, équations et systèmes associés.

#### 5.1. Déformation de la fonction hypergéométrique.

La série hypergéométrique (voir [29], [14])

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} z^n, \quad (x)_n = \prod_{0 \leq k \leq n-1} (x+k) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

est solution de l'équation différentielle à coefficients rationnels :

$$\delta^2 F - \tilde{\lambda} \delta F + \tilde{\mu} F = 0$$

avec

$$\tilde{\lambda} = \frac{(\alpha + \beta)z + (1 - \gamma)}{1 - z}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\alpha\beta z}{1 - z}.$$

Les singularités de cette équation sont 0,1 et  $\infty$  et elles sont fuchsien. La méthode de Frobenius en fournit des système fondamentaux de solutions en 0 et en  $\infty$  :

$$\begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma; z), \\ z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1/z)^\alpha F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; 1/z), \\ (1/z)^\beta F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; 1/z). \end{cases}$$

Ces fonctions, *a priori* multivaluées, sont respectivement rendues uniformes par les coupures  $[1, \infty]$  et  $[-\infty, 0]$  de la sphère de Riemann.

Lorsque  $q \rightarrow 1$ , la série hypergéométrique basique (voir introduction) tend vers la précédente coefficient par coefficient. Notre méthode attribue à son équation les systèmes fondamentaux de solutions canoniques en 0 et en  $\infty$  :

$$\begin{cases} \Phi(a, b, c; q, z), \\ e_{q/c}(z)\Phi(aq/c, bq/c, q^2/c; q, z); \\ e_a(1/z)\Phi(a, aq/c, aq/b; q, cq/abz), \\ e_b(1/z)\Phi(b, bq/c, bq/a; q, cq/abz). \end{cases}$$

On emploie ici une famille *quelconque* de caractères  $e_a$ , fait que l'on pourra exploiter (voir *infra*).

Le système différentiel correspondant à l'équation hypergéométrique classique de paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  a pour matrice

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\mu} & \tilde{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Nous le déformerons donc par le système aux  $q$ -différences correspondant à l'équation hypergéométrique basique de paramètres  $a = q^\alpha, b = q^\beta$  et  $c = q^\gamma$ , de matrice

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & q - 1 \\ -(\mu - \lambda + 1)/(q - 1) & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,  $(A_\epsilon - I_n)/(q - 1) \rightarrow \tilde{B}$ . Toutes nos autres conditions sont d'ailleurs satisfaites.

Les formules de connexion de Barnes-Mellin-Watson (voir [12], p. 106) relient les deux systèmes fondamentaux de solutions :

$$\begin{aligned} \Phi(a, b; c; q, z) &= \Phi\left(\frac{c}{b}, a; c; q, q\right) \frac{\Theta_q(bz/cq)}{\Theta_q(abz/cq)} \Phi\left(a, \frac{aq}{c}, \frac{aq}{b}; q, \frac{cq}{abz}\right) \\ &+ \Phi\left(\frac{c}{a}, b; c; q, q\right) \frac{\Theta_q(az/cq)}{\Theta_q(abz/cq)} \Phi\left(b, \frac{bq}{c}, \frac{bq}{a}; q, \frac{cq}{abz}\right). \end{aligned}$$

Elles permettent de déduire la matrice de connexion

$$P_\epsilon = (D_\epsilon^{(\infty)})^{-1} M_\epsilon D_\epsilon^{(0)},$$

où :

$$D_\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{q,q/c}(z) \end{pmatrix}, \quad D_\epsilon^{(\infty)} = \begin{pmatrix} e_{q,a}(1/z) & 0 \\ 0 & e_{q,b}(1/z) \end{pmatrix}$$

et où la matrice  $M_\epsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \Phi(c/b, a; c; q, q)\Theta_q(bz/cq)/\Theta_q(abz/cq), \\ \mathcal{B} &= \Phi(q/b, aq/c; q^2/c; q, q)\Theta_q(bz/q^2)/\Theta_q(abz/cq), \\ \mathcal{C} &= \Phi(c/a, b; c; q, q)\Theta_q(az/cq)/\Theta_q(abz/cq), \\ \mathcal{D} &= \Phi(q/a, bq/c; q^2/c; q, q)\Theta_q(az/q^2)/\Theta_q(abz/cq). \end{aligned}$$

Du lemme on déduit la valeur de la matrice

$$\widetilde{M} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} M_\epsilon = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{A}} & \widetilde{\mathcal{B}} \\ \widetilde{\mathcal{C}} & \widetilde{\mathcal{D}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}} &= (-z)^{-\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha), \\ \widetilde{\mathcal{B}} &= (-z)^{\gamma-\alpha+1}\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \gamma + \beta), \\ \widetilde{\mathcal{C}} &= (-z)^{-\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta), \\ \widetilde{\mathcal{D}} &= (-z)^{\gamma-\beta+1}\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\alpha - \beta)/\Gamma(1 - \beta)\Gamma(1 - \gamma + \alpha). \end{aligned}$$

Ces formules sont *indépendantes du choix d'une famille particulière de caractères*. Pour éviter la superposition des coupures, on remplacera les caractères utilisés jusque là par  $\Theta_q(-z)/\Theta_q(-c^{-1}z)$ , dont il est aisé de voir que les propriétés sont les mêmes. On trouve alors  $\widetilde{D}^{(0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_\epsilon^{(0)}$  et  $\widetilde{D}^{(\infty)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_\epsilon^{(\infty)}$  sur  $\mathbb{S} - [-\infty, 0]$  :

$$\widetilde{D}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{1-\gamma} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} z^{-\alpha} & 0 \\ 0 & z^{-\beta} \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $\widetilde{P} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P_\epsilon = (\widetilde{D}^{(\infty)})^{-1}\widetilde{M}\widetilde{D}^{(0)}$  prend les valeurs

$$\widetilde{P}^+ = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ & \mathcal{F}_+ \\ \mathcal{G}_+ & \mathcal{H}_+ \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{P}^- = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_- & \mathcal{F}_- \\ \mathcal{G}_- & \mathcal{H}_- \end{pmatrix}$$

sur le demi-plan de Poincaré et sur son opposé, avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ &= e^{i\pi\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha), \\ \mathcal{F}_+ &= e^{i\pi(\alpha-\gamma+1)}\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\beta - \alpha)/\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \gamma + \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_+ &= e^{i\pi\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta), \\
\mathcal{H}_+ &= e^{i\pi(\beta-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha); \\
\mathcal{E}_- &= e^{-i\pi\alpha}\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha), \\
\mathcal{F}_- &= e^{-i\pi(\alpha-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)/\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\beta), \\
\mathcal{G}_- &= e^{-i\pi\beta}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta), \\
\mathcal{H}_- &= e^{-i\pi(\beta-\gamma+1)}\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma+\alpha).
\end{aligned}$$

La matrice de monodromie en le pôle 1 est  $(\tilde{P}^+)^{-1}\tilde{P}^-$ , ce qui est la valeur classique (voir [14], p. 111–114)<sup>(5)</sup>.

### 5.2. Déformation de $\log(1 - z/z_0)$ .

On va à présent traiter un système où la monodromie est unipotente, mais qui rentre tout de même dans le cas non-résonnant. L'équation différentielle de départ est

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{z_0 - z} \frac{df}{dz} \iff \delta^2 f = \frac{1}{1 - z/z_0} \delta f.$$

Les singularités de cette équation sont  $z_0$  et  $\infty$  et elles sont fuchsienne. La méthode de Frobenius en fournit des systèmes fondamentaux de solutions en 0 et en  $\infty$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \\ z_0 \log(1 - z/z_0); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ -\log(1 - w/w_0) + \log(-w). \end{array} \right.$$

On a posé  $w = 1/z$  et  $w_0 = 1/z_0$ .

On les déformera à l'aide de la fonction  $\ell_q^+(z) = z(\Theta_q^+)'(z)/\Theta_q^+(z)$ , où l'on a posé

$$\Theta_q^+(z) = (z; p)_\infty = \prod_{0 \leq k} (1 - zq^{-k}).$$

La fonction  $\ell_q^+(z)$  vérifie l'équation aux  $q$ -différences fuchsienne :

$$\delta_q^2 f = \frac{1}{1 - q^2 z/z_0} \delta_q f, \quad \delta_q = \frac{\sigma_q - \text{Id}}{q - 1}.$$

<sup>(5)</sup> Il faut cependant prendre garde à une erreur de signe : avec la base canonique utilisée, définie p. 38 de *loc. cit.*, on a bien la formule de connexion 4.6.3, p. 111 ; mais, avec le choix des chemins de la figure 2.5, p. 78, l'expression de  $A_\infty$  dans la formule 4.6.12, p. 114 devrait faire intervenir  $\epsilon(\alpha)$  et  $\epsilon(\beta)$  au lieu de  $\epsilon(-\alpha)$  et  $\epsilon(-\beta)$ .

Les systèmes fondamentaux canoniques de solutions en 0 et en  $\infty$  sont

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \\ (q-1)z_0 \ell_q^+(z/z_0); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ (q-1)(\ell_q(w) - \ell_q^+(w/qw_0)). \end{array} \right.$$

La matrice de connexion est donc

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & (q-1)z_0(1 - \ell_q(z) + \ell_q(z/z_0)) \\ 0 & -z_0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer sa limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , on invoque les estimations suivantes, aisément obtenues de façon analogue à celles de 3.1 :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Theta_q^+(z_2)/\Theta_q^+(z_1) &= (1-z)^{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (q-1)\ell_q^+(z) &= \log(1-z_0). \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} 1 & z_0(\log(-z/z_0) - \log(-z)) \\ 0 & -z_0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est localement constante sur la sphère de Riemann privée de la coupure  $[0; \infty] \cup [0; z_0] \cup [z_0; \infty]$ . Ses deux déterminations  $\tilde{P}_0$  et  $\tilde{P}_1$  satisfont

$$(\tilde{P}_1)^{-1}\tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & z_0(a_0 - a_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a_1$  et  $a_0$  sont les valeurs de la fonction  $(\log(-z/z_0) - \log(-z))$ , qui est localement constante  $(\log(-z/z_0) - \log(-z))$  sur les ouverts correspondants : donc  $a_0 - a_1 = 2i\pi$  et l'on obtient la matrice de la monodromie autour de  $z_0$  :

$$(\tilde{P}_1)^{-1}\tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2i\pi z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 5.3. Un exemple irrégulier.

L'exemple qui suit m'a été suggéré par Marius van der Put, avec d'autres, qui sont étudiés dans [24]. Il s'agit en fait d'une équation aux  $q$ -différences singulière régulière, qui conflue selon les contraintes des paragraphes 3 et 4 vers une équation différentielle; mais celle-ci présente

une singularité *irrégulière*. Bien que ce cas ait été exclu du champ du théorème, on ne s'est pas servi de ce fait dans la démonstration et la matrice de connexion doit encore converger vers une matrice localement constante qui permet de calculer la monodromie de l'équation différentielle  $y$  compris en la singularité irrégulière. Ce qui reste hors d'atteinte, pour le moment, c'est la possibilité de calculer la « monodromie sauvage » c'est-à-dire d'autres automorphismes de Galois (Stokes, *etc.*). Je pense toutefois que des estimations asymptotiques plus fines (voir ci-dessous) et quelques astuces géométriques devraient permettre de les atteindre (ce qui est encore plus hors d'atteinte des méthodes d'analyse élémentaire utilisées ici, c'est le cas d'équations aux  $q$ -différences irrégulières).

On considère l'équation  $\sigma_q y = a_q y$ , avec

$$a_q = 1 + (q - 1)b, \quad \text{où } b(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)^2}.$$

Il s'agit donc d'une équation aux  $q$ -différences *régulière*. Le théorème doit s'appliquer dans ce cas. Nous montrons au 5.3.1 comment en obtenir (en dimension 1) une version explicite lorsque l'équation différentielle limite est fuchsienne. Dans le cas contraire, les estimations asymptotiques du chapitre 3 ne permettent pas à elles seules un calcul explicite. En effet, dans notre cas (par exemple), le numérateur de  $a_q(z)$  a deux racines qui tendent vers  $i$  et deux racines qui tendent vers  $-i$ . Mais, en cas de convergence vers des racines multiples, le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas tel quel et l'on n'a pas de développement limité des racines en fonction de  $\eta := q - 1$  : il y a un développement *ramifié* qui commence en  $\pm i(1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}i\eta})$ . Nous devons donc, en 5.3.2, peaufiner les résultats antérieurs.

### 5.3.1. Calculs explicites en dimension 1.

Soit l'équation  $\sigma_q y = ay$ . De façon générale, le calcul se conduit comme suit. On écrit :

$$a(z) = a_0 \prod_{i=1}^r \frac{1 - u_i^{-1}z}{1 - v_i^{-1}z} = a_\infty \prod_{i=1}^r \frac{1 - u_i w}{1 - v_i w},$$

d'où le *nombre* de connexion :

$$p(z) = \frac{e_{q,a_0}(z)}{e_{q,a_\infty^{-1}}(w)} \prod_{i=1}^r \frac{u_i \Theta_q(z/u_i)}{v_i \Theta_q(z/v_i)}.$$

Par exemple, dans un cas *régulier* à deux zéros et deux pôles, on a

$$a(z) = \frac{(z - \alpha)(z - \beta)}{(z - \gamma)(z - \delta)}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont non nuls et vérifient  $\alpha\beta = \gamma\delta$ .

On peut alors écrire la solution locale en 0 :

$$\prod_{r \geq 1} a(q^{-r}z) = \prod_{r \geq 1} \frac{(1 - q^{-r}z/\alpha)(1 - q^{-r}z/\beta)}{(1 - q^{-r}z/\gamma)(1 - q^{-r}z/\delta)}$$

De même, la solution locale en  $\infty$  :

$$\prod_{r \geq 0} a(q^r z)^{-1} = \prod_{r \geq 0} \frac{(1 - q^{-r}\gamma/z)(1 - q^{-r}\delta/z)}{(1 - q^{-r}\alpha/z)(1 - q^{-r}\beta/z)}$$

d'où le nombre de connexion :

$$p(z) = \frac{\Theta_q(z/\alpha)\Theta_q(z/\beta)}{\Theta_q(z/\gamma)\Theta_q(z/\delta)}$$

Comme  $\alpha\beta = \gamma\delta$ , c'est bien une fonction elliptique.

Si  $a = a_q$  est donnée dépendant de  $q$  avec  $(a_q - 1)/(q - 1) \rightarrow \tilde{b}$  lorsque  $q$  tend vers 1, les racines seront fonctions de  $q$  et les limites des solutions locales et du nombre de connexion s'obtiendront à l'aide des estimations du chapitre 3.

### 5.3.2. Amélioration des estimations de $\Theta$ .

Le point de départ est encore l'équation fonctionnelle :

$$\tilde{\Theta}(\tau, x) = \frac{\sqrt{i/\tau}}{e^{(i\pi/\tau)(x - \frac{1}{2}(\tau+1))^2}} \tilde{\Theta}\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{x}{\tau}\right).$$

On suppose encore  $\tau = \tau_0\epsilon$ ,  $\text{Im}(\tau_0) > 0$  et  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Supposons que  $x = x_\epsilon$  soit doté d'un « développement limité ramifié » :

$$x_\epsilon = x_0 + \epsilon^{1/\mu}x_1 + \epsilon^{2/\mu}x_2 + \dots + \epsilon x_\mu + o(\epsilon).$$

Le facteur  $\tilde{\Theta}(-1/\tau, -x/\tau)$  vérifie la même analyse qu'au § 3 et tend donc (rapidement) vers 1.

Le facteur d'automorphie de l'équation fonctionnelle est équivalent à :

$$\sqrt{i/\tau} e^{-(i\pi/\tau)(x - \frac{1}{2})^2} e^{2i\pi(x - \frac{1}{2})}$$

Si l'on note  $[-]$  la troncature à  $o(\epsilon)$ , il est donc équivalent à :

$$\sqrt{i/\tau} e^{2i\pi(x - \frac{1}{2})} e^{-(i\pi/\tau)[(x - \frac{1}{2})^2]}$$

Ce facteur seul n'a pas d'équivalent très simple. On peut tout au plus déduire de ces estimations :

LEMME. — *Dans ces conditions, on a l'équivalence :*

$$\frac{\tilde{\Theta}(\tau, x_\epsilon)}{\tilde{\Theta}(\tau, x_0)} \sim e^{-(i\pi/\tau)[(x_\epsilon - \frac{1}{2})^2 - (x_0 - \frac{1}{2})^2]}. \quad \square$$

Nous appliquerons ce calcul à plusieurs valeurs  $x_\epsilon^{(i)}$  tendant vers la même limite  $x_0$  ayant chacune un développement limité ramifié comme ci-dessus, ces développements étant tels qu'il y a des compensations entre parties ramifiées :

$$\sum_i \left( \left( x_\epsilon^{(i)} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( x_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = A + B\epsilon + o(\epsilon).$$

On peut considérer cela comme une « formule abélienne » par analogie avec la méthode d'Abel dans l'étude des intégrales de fonctions algébriques. Cela se produira toujours dans le cas d'un bouquet de racines convergeant vers une racine multiple (je ne l'ai pas démontré, mais je pense que c'est facile avec la théorie de Galois). Cependant, nous n'avons pas affaire directement à ces racines, mais à leurs relèvements dans le plan des  $x$  (via  $e^{2i\pi x} = z$ ); je pense que ceux-ci satisfont aussi une formule abélienne. Ce sera le cas dans l'exemple ci-dessous.

PROPOSITION. — *Dans ces conditions, on a une équivalence :*

$$\prod_i \frac{\tilde{\Theta}(\tau, x_\epsilon^{(i)})}{\tilde{\Theta}(\tau, x_0)} \sim e^{-(i\pi/\tau_0)B} e^{-(i\pi/\tau_0)A/\epsilon}. \quad \square$$

En particulier, si  $A = 0$ , il y a une limite finie non nulle.

### 5.3.3. Application à l'exemple.

Le numérateur de  $a(z)$  est ici

$$P_\epsilon(z) = (z^2 + 1)^2 + \eta z.$$

Il tend vers le dénominateur (qui, lui, ne bouge pas) :

$$Q(z) = (z^2 + 1)^2.$$

Les racines qui convergent vers  $i$  ont pour développements limités ramifiés :

$$z'_\epsilon = i + \sqrt{\frac{i\eta}{4}} + o(\eta), \quad z''_\epsilon = i - \sqrt{\frac{i\eta}{4}} + o(\eta).$$

En vue des développements analogues des relèvements dans le plan des  $x$ , on réécrit :

$$\begin{aligned} z'_\epsilon &= e^{2i\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{2i^2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}i\eta} - \frac{1}{4i^3\pi}\frac{i\eta}{4} + o(\eta))}, \\ z''_\epsilon &= e^{2i\pi(\frac{1}{4} - \frac{1}{2i^2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}i\eta} - \frac{1}{4i^3\pi}\frac{i\eta}{4} + o(\eta))}. \end{aligned}$$

On en tire les arguments de  $\tilde{\Theta}$  :

$$\begin{aligned} x'_\epsilon &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{i\eta}{4}} + \frac{1}{16\pi}\eta + o(\eta), \\ x''_\epsilon &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{i\eta}{4}} + \frac{1}{16\pi}\eta + o(\eta). \end{aligned}$$

Voici les calculs analogues au voisinage de  $-i$  (avec une légère ambiguïté, puisque l'on utilise les mêmes notations) :

$$\begin{aligned} z'_\epsilon &= e^{2i\pi(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2i^2\pi}\sqrt{-\frac{1}{4}i\eta} - \frac{1}{4i^3\pi}\frac{-i\eta}{4} + o(\eta))}, \\ z''_\epsilon &= e^{2i\pi(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2i^2\pi}\sqrt{-\frac{1}{4}i\eta} - \frac{1}{4i^3\pi}\frac{-i\eta}{4} + o(\eta))}, \\ x'_\epsilon &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-i\eta}{4}} - \frac{1}{16\pi}\eta + o(\eta), \\ x''_\epsilon &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-i\eta}{4}} - \frac{1}{16\pi}\eta + o(\eta). \end{aligned}$$

Le calcul de la « formule abélienne » au voisinage de  $i$  donne :

$$\begin{aligned} \left(x - x'_\epsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - x''_\epsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ = \left(2\left(x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{-2}{16\pi} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{2i}{4}\right)\eta \end{aligned}$$

d'où la limite correspondante d'une composante du nombre de connexion :

$$\left(\frac{\Theta_q(z/z'_\epsilon)}{\Theta_q(z/z_0)}\right)\left(\frac{\Theta_q(z/z''_\epsilon)}{\Theta_q(z/z_0)}\right) \longrightarrow e^{\frac{\pi}{2}(x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{4}i}.$$

Voici les calculs analogues au voisinage de  $-i$  :

$$\begin{aligned} \left(x - x'_\epsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - x''_\epsilon - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ = \left(2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{2}{16\pi} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{-2i}{4}\right)\eta \end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{\Theta_q(z/z'_\epsilon)}{\Theta_q(z/z_0)}\right)\left(\frac{\Theta_q(z/z''_\epsilon)}{\Theta_q(z/z_0)}\right) \longrightarrow e^{-\frac{\pi}{2}(x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2})} e^{\frac{1}{4}i}.$$

La limite du nombre de connexion est donc le produit de ces deux limites, soit  $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ . C'est une constante (et non seulement une fonction localement constante) : il n'y a pas de monodromie autour des pôles intermédiaires  $\pm i$ .

### Annexe A. Relations algébriques dans les corps de solutions.

Notons  $\mathbb{K}_0 = \mathcal{M}(\mathbb{C})(\ell_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbb{C}^*})$  et  $\mathbb{K}'_0 = \mathbf{k}'_0(\ell_q, (e_{q,c})_{c \in \mathbb{C}^*})$ , où  $\mathbf{k}'_0 = \mathbb{C}(\{z\})$  est le corps des séries de Laurent (corps des fractions de l'anneau des séries convergentes  $\mathbb{C}\{z\}$ ). Ce sont des extensions de notre corps de base  $\mathbf{k}_0 = \mathbb{C}(z)$ . Nous résumons ici quelques propriétés algébriques des corps  $\mathbb{K}_0$  et  $\mathbb{K}'_0$ .

1)  $\Theta_q$  est transcendant sur  $\mathbb{K}'_0$  (et donc sur  $\mathbb{K}_0$ ).

Itérant l'équation fonctionnelle, on trouve

$$\Theta_q(q^{-n}z) = (-1/z)^n q^{n(n-1)/2} \Theta_q(z).$$

Par ailleurs, pour un élément  $f \in \mathbb{K}'_0$  et un  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  convenable fixé, la suite des  $f(q^{-n}z_0)$  a une croissance au pire simplement exponentielle, comme on le voit en considérant séparément les séries de Laurent des éléments de  $\mathbf{k}'_0$ , des caractères  $e_{q,c}$  et de  $\ell_q$ . Si  $\Theta_q$  était algébrique sur  $\mathbb{K}'_0$ , on aurait  $\Theta_q \in \mathbb{K}'_0[\Theta_q^{-1}]$ , et, fixant  $z_0 \in \mathbb{C}^* - q^{\mathbb{Z}}$ , la relation écrite plus haut entraînerait  $q^{n^2} = O(q^{Cn})$  pour une certaine constante  $C$ , ce qui ne se peut.  $\square$

2) Les  $\ell_q^{(k)}$  ( $k \geq 0$ ) sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{k}'_0$ ; autrement dit,  $\ell_q$  est transcendant sur  $\mathbf{k}'_0$ .

Supposons donnée une relation  $\ell_q^{(k+1)} = f_0 \ell_q^{(0)} + \dots + f_k \ell_q^{(k)}$ , où  $f_0, \dots, f_k \in \mathbf{k}'_0$  et où  $k$  est minimum. On applique  $\sigma_q - \text{Id}$  aux deux membres de cette égalité, et l'on trouve :

$$\ell_q^{(k)} = \sum_{0 \leq i \leq k} ((\sigma f_i - f_i) \ell_q^{(i)} + \sigma f_i \ell_q^{(i-1)}).$$

Par minimalité de  $k$ ,  $\sigma_q f_k - f_k = 1$  (sinon, on en tirerait une écriture de  $\ell_q^{(k)}$  comme  $\mathbf{k}'_0$ -combinaison linéaire des  $\ell_q^{(i)}$ ,  $i < k$ ). Mais cette équation est impossible avec  $f_k \in \mathbf{k}'_0$ .  $\square$

Ce fait sert à la résolution des systèmes à coefficients constants dans le cas unipotent (cf. 1.1.2), et permet en outre de prouver :

3) *Les seuls caractères de  $\mathbf{k}'_0(\ell_q)$  sont les  $cz^n$  ( $c \in \mathbb{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).*

Un élément  $f \in \mathbf{k}'_0(\ell_q)^*$  s'écrit, de façon unique,  $f = uA(\ell_q)/B(\ell_q)$ , où  $u \in \mathbf{k}'_0^*$ , et où  $A, B \in \mathbf{k}'_0[X]$  sont des polynômes unitaires et premiers entre eux. Si maintenant  $\sigma_q f = cf$  ( $c \in \mathbb{C}^*$ ), la transcendance de  $\ell_q$  sur  $\mathbf{k}'_0$  entraîne la relation formelle

$$(\sigma_q u)A^{\sigma_q}(X + 1)/B^{\sigma_q}(X + 1) = cuA^{\sigma_q}(X)/B^{\sigma_q}(X)$$

( $P^{\sigma_q}$  désigne le résultat de l'application de  $\sigma_q$  aux coefficients de  $P \in \mathbf{k}'_0[X]$ ). Vu les hypothèses sur  $A$  et  $B$ , on a alors

$$\sigma_q u = cu, \quad A^{\sigma_q}(X + 1) = A(X) \quad \text{et} \quad B^{\sigma_q}(X + 1) = B(X).$$

La première égalité montre que  $u \in \mathbb{C}^*z^n$  et  $c = q^n$  pour un  $n \in \mathbb{Z}$  (car  $u$  est une série de Laurent  $\sum u_k z^k$  et il s'agit d'identifier terme à terme  $\sum u_k q^k z^k = \sum cu_k z^k$ ). On n'a donc plus qu'à prouver que la deuxième égalité entraîne que  $A = 1$ , le cas de  $B$  étant le même. Mais, si  $A = X^d + aX^{d-1} + \dots$ , où  $d \geq 1$ , on voit que  $\sigma_q a = a + d$ , ce qui est tout à fait impossible pour un élément  $a$  de  $\mathbf{k}'_0$  (l'identification des séries de Laurent donnerait, pour les termes de degré 0,  $a_0 = a_0 + d$ ).  $\square$

Cette propriété est la clé des théorèmes du 2.1 et donc de la classification. Elle permet en outre de décrire toutes les relations entre les caractères :

4) *Soient  $f_1, \dots, f_r$  des fonctions méromorphes non nulles sur un voisinage épointé de 0 dans  $\mathbb{C}^*$ . Soient  $c_1, \dots, c_r$  des éléments de  $\mathbb{C}^*$  deux à deux non congrus modulo le sous-groupe  $q^{\mathbb{Z}}$ . On suppose que  $\sigma_q f_i = c_i f_i$  (et donc  $f_i \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$ ), pour  $1 \leq i \leq r$ . Alors les  $f_i$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{k}'_0(\ell_q)$ .*

Dans le cas contraire, on aurait une relation

$$P_1(\ell_q)f_1 + \dots + P_r(\ell_q)f_r = 0,$$

les  $P_i$  étant des éléments non tous nuls de  $\mathbf{k}'_0[X]$ . Si  $r = 1$ , la conclusion est triviale, si  $r = 2$ , elle découle du lemme précédent. Dans le cas général,

on peut supposer la relation de taille minimale et les  $P_i$  tous non nuls. Appliquant  $\sigma_q$ , on en tire une nouvelle relation

$$P_1(\ell_q + 1)c_1f_1 + \cdots + P_r(\ell_r + 1)c_rf_r = 0$$

nécessairement proportionnelle à la première (sinon on en obtiendrait une plus courte par élimination). Mais ceci signifie exactement que, pour  $1 \leq i < j \leq r$ ,  $((P_i/P_j)(\ell_q))^{\sigma_q} = (c_j/c_i)(P_i/P_j)(\ell_q)$  et entraîne, d'après le lemme 1, que  $c_i \equiv c_j \pmod{q^{\mathbb{Z}}}$ , contredisant l'hypothèse.  $\square$

5) *Supposons  $\lambda e_{q,c_1} \cdots e_{q,c_r} = e_{q,d_1} \cdots e_{q,d_s}$ , où, pour  $1 \leq i \leq r$  et  $1 \leq j \leq s$ , on a  $c_i \neq 1$ ,  $d_j \neq 1$  et  $c_i \neq d_j$ . Alors,  $r = s$ , et, à réindexation près,  $d_i = q^{m_i} c_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), avec  $m_1 + \cdots + m_r = 0$ .*

La considération des diviseurs de zéros et de pôles montre que

$$\sum_{1 \leq i \leq r} ([0] - [c_i]) = \sum_{1 \leq j \leq s} ([0] - [d_j]),$$

d'où  $r = s$  et, à réindexation près,  $d_i = q^{m_i} c_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ). On prouve alors par récurrence, à partir des relations données au 1.1.2, que  $e_{q,q^m c} = (-cz)^m q^{m(m-1)/2} e_{q,c}$ , d'où l'on tire  $e_{q,d_i}/e_{q,c_i} = (-c_i z)^{m_i} q^{m_i(m_i-1)/2}$ . L'égalité  $m_1 + \cdots + m_r = 0$  vient alors immédiatement.  $\square$

Réciproquement, on voit que ces relations entraînent l'égalité de départ avec  $\lambda = q^{\sum_{1 \leq i \leq r} m_i^2/2} \prod_{1 \leq i \leq r} c_i^{-m_i}$ .

À l'opposé, la forte indépendance des  $e_{q,c}$  a pour conséquence que le corps des constantes est égal au corps des fonctions elliptiques. Pour être précis :

6) *Le corps des constantes est  $(\mathbb{K}_0)^{\sigma_q} = (\mathbb{K}'_0)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbb{E})$ .*

En effet, les inclusions  $(\mathbb{K}_0)^{\sigma_q} \subset (\mathbb{K}'_0)^{\sigma_q} \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$  sont évidentes et l'identification  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q} = \mathcal{M}(\mathbb{E})$  a déjà été justifiée. Mais la théorie des fonctions elliptiques (voir [29], [15]) dit que les  $e_{q,c} e_{q,d}/e_{q,cd} = \Theta_q \Theta_{q,cd}/\Theta_{q,c} \Theta_{q,d}$  (on a posé  $\Theta_{q,c}(z) = \Theta_q(c^{-1}z)$ ) engendrent le corps des fonctions elliptiques; et ce sont manifestement des éléments de  $(\mathbb{K}_0)^{\sigma_q}$ .  $\square$

On peut prouver que, quel que soit le choix de la famille des caractères  $e_{q,c}$  (supposés méromorphes *uniformes* sur  $\mathbb{C}^*$ ), le corps des constantes est une extension transcendante de  $\mathbb{C}$ . Il est aussi facile de voir que c'est un corps de fonctions algébriques de genre 0 ou 1. Je pense qu'il est nécessairement de genre 1 mais ne sais pas le prouver.

### Annexe B. Équations et systèmes.

L'étude *analytique* des solutions d'équations aux  $q$ -différences (voir [1], [2], [27], [5] [21], [16]) porte en général sur les *équations scalaires d'ordre  $n$*  :

$$(E_a) \quad \sigma_q^n f + a_1 \sigma_q^{n-1} f + \dots + a_n f = 0$$

plutôt que sur les systèmes (1). Nous précisons dans cet annexe la relation entre les deux points de vue.

En accord avec le cadre de l'article, nous supposons que  $a_1, \dots, a_n$  appartiennent à  $\mathbb{C}(z)$ ,  $a_n \neq 0$ . Nous poserons par commodité  $a_0 = 1$ . Comme nous nous intéressons à la résolution locale en 0, ce qui suit serait essentiellement généralisable au cas où  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}(\{z\})$ . En fait, le point crucial est l'existence d'une valuation discrète, ici la valuation  $z$ -adique  $v_0$ .

#### B.1. Passage des équations aux systèmes.

À l'équation  $(E_a)$ , on associe le système :

$$(E'_a) \quad \sigma_q X = A_a X, \quad A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

obtenu en vectorisant les solutions, c'est-à-dire en posant

$$X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \dots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det A_a = (-1)^n a_n$ , le système  $(E'_a)$  est fuchsien en 0 si et seulement si  $v_0(a_1), \dots, v_0(a_{n-1}) \geq 0$  et  $v_0(a_n) = 0$ .

Dans [1], [2], [21], [16], intervient le *polygone de Newton* de l'équation  $(E_a)$ ; notons-le  $PN_a$ . C'est l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^2$  de

$$\{(i, j) \mid 0 \leq i \leq n, a_i \neq 0, j \geq v_0(a_i)\}.$$

Le cas classiquement considéré comme à *singularité régulière* ou *fuchsienne* en 0 est celui où le polygone  $PN_a$  admet une seule pente finie et que celle-ci est nulle. C'est donc le cas où le système  $(E'_a)$  est fuchsien.

### B.2. Passage des systèmes aux équations.

Nous allons prouver que tout système aux  $q$ -différences (linéaire, à coefficients rationnels) est rationnellement équivalent à un système de la forme  $(E'_a)$ . Ceci peut être fait dans le formalisme plus intrinsèque et algébrique des modules aux  $q$ -différences (voir [19] ainsi que [24], II.1.1) et l'on peut y démontrer un analogue du lemme du vecteur cyclique tel qu'on le trouve par exemple dans [10], [4], [8]. Nous adapterons plutôt la jolie démonstration de Birkhoff dans [7].

Dire que  $(\sigma_q F)AF^{-1}$  est de la forme  $A_a$ , c'est dire que les lignes  $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$  de  $F$  sont linéairement indépendantes et que  $\sigma_q f^{(i)}A = f^{(i+1)}$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . Nous cherchons donc  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}(z)^n$  tel que, en posant

$$f^{(1)} = f, \quad f^{(i+1)} = \sigma_q f^{(i)}A \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1,$$

on obtienne une base  $(f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$  de  $\mathbb{C}(z)^n$ .

On choisit pour cela  $z_0 \in \mathbb{C}^* - q^{-\{0, \dots, n-1\}}\mathcal{S}(A)$ , autrement dit, tel que  $A(z_0), \dots, A(q^{n-1}z_0) \in GL_n(\mathbb{C})$  et l'on impose les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_1(z_0), \dots, f_n(z_0)) = e_1, \\ (f_1(qz_0), \dots, f_n(qz_0)) = e_2 A(z_0)^{-1}, \\ \dots \\ (f_1(q^{n-1}z_0), \dots, f_n(q^{n-1}z_0)) = e_n A(z_0)^{-1} A(qz_0)^{-1} \dots A(q^{n-1}z_0)^{-1} \end{array} \right.$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}(z)^n$ . Ces conditions sont évidemment réalisables avec  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}(z)$ . Elles signifient que la matrice  $F \in M_n(\mathbb{C}(z))$  de lignes  $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$  vérifie  $F(z_0) = I_n$ , donc que  $F \in GL_n(\mathbb{C}(z))$ . On en déduit :

**THÉORÈME.** — *Tout système aux  $q$ -différences (linéaire, à coefficients rationnels) de rang  $n$  est rationnellement équivalent au système associé à une équation aux  $q$ -différences (linéaire, à coefficients rationnels) d'ordre  $n$ .  $\square$*

### B.3. Équations singulières régulières.

Nous montrons ici que le système  $(E'_a)$  est singulier régulier en 0 (au sens de notre article) si et seulement si l'équation  $(E_a)$  est fuchsienne en 0 (au sens de C.1). Nous utilisons pour cela un résultat de Adams (voir [1], [2]) sur l'existence de « solutions convergentes » associées à la première pente du polygone de Newton, même pour une équation non fuchsienne.

Soit  $\mu \in \mathbb{Q}$  cette première pente. Adams fait intervenir la fonction

$$\Psi_\mu(z) = q^{\frac{1}{2} \log_q(z)(\log_q(z)-1)},$$

qui vérifie  $\sigma_q \Psi_\mu = z^\mu \Psi_\mu$ . La transformation de jauge  $f = \Psi_\mu g$  annule la première pente et ramène à un cas similaire au cas fuchsien, c'est-à-dire où il y a une solution de la forme (caractère)  $\times$  (série convergente).

Nous ne disposons, dans nos briques de base, d'aucun substitut pour  $\Psi_\mu$  si  $\mu \notin \mathbb{Z}$ . Nous commencerons donc par éliminer une éventuelle ramification comme suit. Soit  $r \in \mathbb{N}$  un dénominateur de  $\mu$  et notons  $\bar{q}$  un complexe tel que  $\bar{q}^r = q$ . À tout système aux  $q$ -différences de matrice  $A$ , on associe le système aux  $\bar{q}$ -différences de matrice  $\bar{A}(z) = A(z^r)$ . On vérifie aisément les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ fuchsienne} &\iff \bar{A} \text{ fuchsienne,} \\ (\sigma_q F)^{-1} A F = B &\iff (\sigma_{\bar{q}} \bar{F})^{-1} \bar{A} \bar{F} = \bar{B}, \\ A \text{ singulière régulière} &\implies \bar{A} \text{ singulière régulière,} \end{aligned}$$

(j'ignore si la réciproque est vraie, mais nous n'en avons pas besoin)

$$A = A_q \iff \bar{A} = \bar{A}_{\bar{q}}.$$

Enfin, dans ce dernier cas, le polygone de Newton  $PN_{\bar{q}}$  est l'image de  $PN_q$  par l'affinité  $(x, y) \mapsto (x, ry)$ . En particulier, sa première pente  $\bar{\mu} = r\mu$  est entière. De tout ceci s'ensuit que l'on peut supposer  $\mu \in \mathbb{Z}$ , ce que nous ferons donc.

Supposons maintenant le système  $(E'_q)$  singulier régulier en 0. Alors  $v_0(a_n) = 0$ . En effet, l'égalité  $(\sigma_q F)^{-1} A F = B$  entraîne  $\det B = \det A \cdot \sigma_q(\det F) / \det F$  et donc  $v_0(\det B) = v_0(\det A)$ .

Puisque  $\mu \in \mathbb{Z}$ , nous pouvons prendre  $\Psi_\mu = \Theta_q^\mu$ , qui vérifie  $\sigma_q \Psi_\mu = (-q)^\mu z^\mu \Psi_\mu$ . La transformation de jauge  $f = \Psi_\mu g$  annule donc encore la première pente du polygone de Newton, et il résulte de [1], [2] qu'il y a une solution  $g$  de la forme  $e_{q,c} u$  où  $c \in \mathbb{C}^*$  est une racine de «l'équation caractéristique associée à la première pente» et où  $u \in \mathbb{C}\{z\}$ ,  $u(0) = 1$ . Alors

$$X = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \dots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix} = \Psi_\mu e_{q,c} \begin{pmatrix} u \\ cz^\mu \sigma_q u \\ \dots \\ (cz^\mu)^{n-1} \sigma_q^{n-1} u \end{pmatrix}$$

est une solution de  $(E'_a)$  méromorphe uniforme sur  $\mathbb{C}^*$ . D'après le § 1, on peut donc écrire  $X = X^{(0)}V$  où  $X^{(0)} \in \text{GL}_n(\mathbb{K}_0)$  et où  $V$  est à coefficients elliptiques. Ainsi  $\Theta^\mu = \Psi_\mu \in \mathbb{K}_0$ . D'après l'annexe A, cela n'est possible que si  $\mu = 0$ . Comme on sait déjà que  $v_0(a_n) = 0$ , cela veut dire que  $PN_a$  admet une seule pente finie et que celle-ci est nulle.

THÉORÈME. — *Une équation aux  $q$ -différences linéaire, à coefficients rationnels d'ordre  $n$  dont le système associé est singulier régulier en 0 est fuchsienne.* □

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.R. ADAMS, On the Linear Ordinary  $q$ -Difference Equations, *Ann. Math.*, série 2, 30, n° 2 (1929), 195–205.
- [2] C.R. ADAMS, Linear  $q$ -Difference Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (1931), 361–399.
- [3] V.I. ARNOLD, Ordinary Differential Equations, in *Dynamical Systems, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 1, Springer-Verlag, 1980.
- [4] D. BERTRAND, Groupes algébriques linéaires et théorie de Galois différentielle, Cours 3<sup>e</sup> cycle, Université Paris VI, 1986.
- [5] J.-P. BÉZIVIN, Sur les équations fonctionnelles aux  $q$ -différences, *Aequationes Math.*, 43 (1992), 159–176.
- [6] G.D. BIRKHOFF, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and  $q$ -difference equations, *Proc. Amer. Acad.*, 49 (1913), 521–568.
- [7] G.D. BIRKHOFF, Formal Theory of Irregular Linear Difference Equations, *Acta Math.*, 54 (1930), 205–246.
- [8] J. CANO, J.-P. RAMIS, Théorie de Galois différentielle, livre en préparation, 1999.
- [9] R.D. CARMICHAEL, The General Theory of Linear  $q$ -difference Equations, *Amer. J. Math.*, 34 (1912), 147–168.
- [10] P. DELIGNE, Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 163 (1970).
- [11] P.I. ETINGOF, Galois Groups and Connection Matrices of  $q$ -difference Equations, *Electronic Research Announcements of the A.M.S.*, vol. 1, issue 1 (1995).
- [12] G. GASPER, M. RAHMAN, Basic hypergeometric series, *Encyclopedia of Mathematics*, vol. 35, Cambridge University Press, 1990.
- [13] E.L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1956.
- [14] K. IWASAKI, H. KIMURA, S. SHIMOMURA, M. YOSHIDA, *From Gauss to Painlevé*, Braunschweig, Vieweg, 1991.
- [15] S. LANG, *Elliptic Functions*, Springer-Verlag, 1987.
- [16] F. MAROTTE, C. ZHANG, Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux  $q$ -différences linéaire analytique, article en préparation, 1999.

- [17] D. MUMFORD, *Tata Lectures on Theta*, vol I, Birkhäuser, 1983.
- [18] G. POURCIN (éd.), *Rapport du jury de l'agrégation de mathématiques*, Ministère de l'Éducation Nationale, Centre National de Documentation Pédagogique, 1994.
- [19] M. VAN DER PUT, M.F. SINGER, *Galois theory of difference equations*, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1666 (1997).
- [20] S. RAMANUJAN, *Collected Works*, Chelsea, 1927.
- [21] J.-P. RAMIS, *About the growth of entire functions solutions to linear algebraic  $q$ -difference equations*, *Annales Fac. Sciences de Toulouse*, 6, vol. I, n° 1 (1992), 53-94.
- [22] J.-P. RAMIS, *Fonctions  $\theta$  et équations aux  $q$ -différences*, non publié, Strasbourg, 1990.
- [23] J. SAULOY, *Matrice de connexion d'un système aux  $q$ -différences confluant vers un système différentiel et matrices de monodromie*, Preprint, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.
- [24] J. SAULOY, *Théorie de Galois des équations aux  $q$ -différences fuchsienues*, thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1999.
- [25] J. SAULOY, *Galois Theory of Fuchsian  $q$ -differences Equations*, article en préparation, 2000.
- [26] L. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Teubner, 1895.
- [27] W.J. TRJITZINSKY, *Analytic Theory of Linear  $q$ -Difference Equations*, *Acta Math.*, 61 (1933), 1-38.
- [28] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1965.
- [29] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, *A course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 1927.

Manuscrit reçu le 5 janvier 1999,  
révisé le 4 octobre 1999,  
accepté le 17 janvier 2000.

Jacques SAULOY,  
Université Paul Sabatier  
Laboratoire Émile Picard  
118 route de Narbonne  
31062 Toulouse cedex (France).  
sauloy@picard.ups-tlse.fr