

APPROXIMATION DE FONCTIONS HOLOMORPHES D'UN NOMBRE INFINI DE VARIABLES

par László LEMPert

Introduction.

Dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, le théorème de Runge–Oka–Weil joue un rôle central, notamment dans la théorie des espaces de Stein. Il est probable que les approximations joueront un rôle analogue dans l'étude des fonctions d'un nombre infini de variables. Un prototype de problèmes d'approximation très facile à formuler est le suivant :

Soit X un espace de Banach complexe et $B(R) \subset X$ la boule de rayon R centrée en 0. Étant donné $0 < r < R$, $\varepsilon > 0$ et une fonction f holomorphe dans $B(R)$, existe-t-il toujours une fonction g , holomorphe dans X , telle que $|f - g| < \varepsilon$ sur $B(r)$?

Malgré un grand nombre de travaux consacrés à l'approximation polynomiale en dimension infinie (voir [D1], Appendix 1, pour un aperçu des développements jusqu'à 1981, cf. aussi [D2]), le problème ci-dessus est resté ouvert. Notons toutefois qu'en général le problème ne peut pas être résolu avec g polynomiale. En effet, chaque polynôme est borné sur $B(r)$, tandis qu'il y a des fonctions holomorphes dans $B(R)$, non bornées sur $B(r)$.

L'auteur a bénéficié d'un contrat de NSF.

Mots-clés : Fonctions holomorphes – Espaces de Banach.

Classification math. : 46G20 – 32A05.

Dans cet article on se propose de résoudre le problème lorsque X est l'espace l^1 des suites sommables. On s'est déjà servi d'un théorème analogue, bien que plus faible, dans une étude de l'équation $\bar{\partial}$ sur l^1 (voir [L]). La solution que nous présentons ici s'inspire de l'approche de [L]. On développe f en une série monomiale

$$f(z_1, z_2, \dots) = \sum_k a_{k_1 k_2 \dots} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots = \sum_k a_k z^k,$$

et avec une suite $\epsilon_k > 0$ on considère l'ensemble \mathcal{K} des multiindices k tels que $|a_k| \geq \epsilon_k$. Alors on peut montrer qu'avec un choix convenable des ϵ_k , la série $\sum_{k \in \mathcal{K}} a_k z^k$ représente la fonction g cherchée.

Notre résultat principal est formulé au chapitre 4 d'une façon plus générale : à la place des boules on considère certaines variétés fibrées en boules, (cf. théorème 4.1). Une telle formulation sera profitable pour un travail ultérieur sur $\bar{\partial}$. En passant, au chapitre 3, on étudie des séries monomiales sur des variétés fibrées en boules. Notons que dans ce qui suit, nous allons traiter des applications à valeurs dans un espace localement convexe V , car c'est le cadre naturel pour les problèmes à considérer; cependant le lecteur peut prendre pour V un espace de Banach ou même \mathbb{C} : les difficultés ainsi que les idées principales de notre approche sont déjà présentes dans ce cas spécial.

Dans cet article tous les espaces localement convexes sont supposés séparés, complexes et séquentiellement complets. On note $\mathcal{O}(M, M')$ l'ensemble des applications holomorphes entre deux variétés complexes M, M' ; si $M' = \mathbb{C}$, on écrit $\mathcal{O}(M)$. Pour les notions fondamentales de l'analyse complexe en dimension infinie se reporter à [D1], [N].

1. Un premier résultat.

Bien que la plupart de nos résultats soit spécifique aux espaces l^1 , on considère ici un problème d'approximation dans un espace localement convexe quelconque. Soient X, V des espaces localement convexes; la topologie de X (resp. V) est donnée par la famille $\Psi = \{\psi\}$ (resp. $P = \{p\}$) des semi-normes continues. Supposons que M est une variété de Stein (lisse), on a donc $\dim M < \infty$. Soit $K \subset M$ un compact, convexe par rapport à $\mathcal{O}(M)$ et $G \subset M$ un voisinage ouvert précompact de K .

THÉOREME 1.1. — *Étant donnés $f \in \mathcal{O}(G \times X, V)$, un sous-ensemble borné $B \subset X$, $p_0 \in P$ et $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{O}(M \times X, V)$ telle que $\sup_{K \times B} p_0(f - g) < \varepsilon$.*

Démonstration. — (a) On commence par le cas où $M = \mathbb{C}^n$, K et G sont des polydisques centrés à l'origine, de rayons $a < b$. Évidemment, il est permis de supposer $a < 1 < b$. Pour chaque $\zeta \in G$ on développe $f(\zeta, \cdot)$ en série homogène

$$(1.1) \quad f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} ; \quad f_{\nu}(\zeta, z) = \int_0^1 e^{-2\pi i \nu t} f(\zeta, e^{2\pi i t} z) dt.$$

Donc $f_{\nu} \in \mathcal{O}(G \times X, V)$ est homogène de degré ν sur X ; on sait que (1.1) converge localement uniformément sur $G \times X$ (voir [D1] ou [N], Chapitre 1). Si l'on note $D \subset \mathbb{C}^n$ le polydisque-unité et $\partial_0 D$ son bord distingué, on a donc, en raison de la formule de Cauchy,

$$(1.2) \quad f(\zeta, z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\omega \in \partial_0 D} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_j f_{\nu}(\omega, z) \frac{\zeta^j d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_n}{\omega^{j+1}}, \quad \zeta \in D, z \in X.$$

Ici $j = (j_s)_{s=1}^n$ parcourt les multiindices non négatifs, et $j + 1$ désigne $(j_s + 1)_{s=1}^n$.

Soient $\psi_0 \in \Psi$ et C tels que

$$p_0(f(\zeta, z)) \leq C, \quad \text{si } \zeta \in \overline{D}, \psi_0(z) \leq 1.$$

Avec (1.1), il en est de même pour f_{ν} ; donc, par homogénéité, on a

$$(1.3) \quad p_0(f_{\nu}(\zeta, z)) \leq C \psi_0(z)^{\nu}, \quad \zeta \in \overline{D}, z \in X.$$

On choisit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1.4) \quad \sup_B \psi_0 \leq a^{1-\alpha},$$

et avec un $d \in \mathbb{N}$ dont la valeur sera précisée plus loin, on définit

$$(1.5) \quad g(\zeta, z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\omega \in \partial_0 D} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\max j_s < \alpha \nu + d} f_{\nu}(\omega, z) \frac{\zeta^j d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_n}{\omega^{j+1}}.$$

Or la somme dans (1.5) est convergente si $(\zeta, \omega, z) \in \mathbb{C}^n \times \partial_0 D \times X$. En effet, soit $p \in P$, $\zeta^* = (\zeta_s^*) \in \mathbb{C}^n$, $z^* \in X$, $r = \max_s |\zeta_s^*| + 2$. Puisque le disque $E = \{\lambda z^* : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq r^{2n\alpha}\}$ est compact, $p(f)$ est borné dans un

voisinage de $\bar{D} \times E$, soit $p(f) \leq c$. Il en est de même pour f_ν en utilisant (1.1); d'où par homogénéité

$$p(f_\nu(\omega, z)) \leq cr^{-2n\alpha\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots,$$

si $\omega \in \partial_0 D$, et z est dans un voisinage de z^* (qui dépend de p mais non pas de ν). Pour de tels ω, z , et pour ζ proche de ζ^* , la série (1.5) converge normalement selon la semi-norme p , car

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\max j_s < \alpha\nu+d} p(f_\nu(\omega, z)\zeta^j/\omega^{j+1}) \\ & \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\max j_s < \alpha\nu+d} cr^{-2n\alpha\nu}|\zeta^j| \leq c \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{-2n\alpha\nu}(\alpha\nu+d)^n r^{n(\alpha\nu+d)} < \infty. \end{aligned}$$

On conclut non seulement que la somme dans (1.5) converge, mais encore qu'elle représente une application continue sur $\mathbb{C}^n \times \partial_0 D \times X$; de plus, cette application est holomorphe par rapport aux variables $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times X$. Par conséquent, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \times X, V)$.

Il nous reste à estimer $p_0(f(\zeta, z) - g(\zeta, z))$, si $(\zeta, z) \in K \times B$. Grâce à (1.2), (1.5), on est ramené à estimer des sommes du type $\sum_{\max_s j_s \geq J} |\zeta^j|$.

Or, pour chaque $s = 1, \dots, n$ fixe et $\zeta \in K$

$$\sum_{j: j_s \geq J} |\zeta^j| = |\zeta_s|^J \prod_{m=1}^n (1 - |\zeta_m|)^{-1} \leq a^J (1 - a)^{-n},$$

d'où

$$\sum_{\max_s j_s \geq J} |\zeta^j| \leq na^J (1 - a)^{-n}.$$

Avec (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5) on a donc

$$\begin{aligned} p_0(f(\zeta, z) - g(\zeta, z)) & \leq \sum_{\nu} \sup_{\partial_0 D \times B} p_0(f_\nu) na^{\alpha\nu+d} (1 - a)^{-n} \\ & \leq Cn(1 - a)^{-n} \sum_{\nu} a^{(1-\alpha)\nu} a^{\alpha\nu+d} \leq Cna^d (1 - a)^{-n-1}, \end{aligned}$$

lorsque $(\zeta, z) \in K \times B$, ce qui est effectivement inférieur à ε si l'on choisit d suffisamment grand.

(b) Cas général. On va se servir d'une variante d'un résultat de Bungart.

Considérons une sous-variété fermée N du polydisque-unité $D \subset \mathbb{C}^n$, l'espace $C(\bar{N})$ des fonctions complexes continues dans \bar{N} , $A(\bar{N}) \subset C(\bar{N})$ le sous-espace des fonctions qui sont holomorphes sur N , et \mathfrak{M} , l'espace

dual de $C(\overline{N})$, muni de la topologie faible*. Donc \mathfrak{M} est constitué de mesures de Radon finies sur \overline{N} . Alors il existe une application continue $\mu : D \rightarrow \mathfrak{M}$ telle que pour tout $\varphi \in A(N)$, la fonction $\Phi(\zeta) = \int_{\overline{N}} \varphi d\mu_\zeta$
 $\zeta \mapsto \mu_\zeta$
 représente un prolongement holomorphe de φ à D .

Bungart considère le cas des fonctions bornées sur N , non nécessairement continues sur \overline{N} ; mais la démonstration du théorème 18.1 dans [B1], voir également [B2], donne aussi le résultat ci-dessus. Pour vérifier le cas général du théorème 1.1 plongeons proprement G dans un voisinage du polydisque-unité \overline{D} par une application ι qui est holomorphe sur M , de telle façon que $\iota(K) \subset D$; c'est possible, car K est supposé $\mathcal{O}(M)$ -convexe. On pose $N = \iota(G) \cap D$ et

$$\varphi(\zeta, z) = f(\iota^{-1}\zeta, z), \quad (\zeta, z) \in \overline{N} \times X.$$

Donc φ est continue, et holomorphe sur $N \times X$. Avec μ_ζ comme plus haut, on pose

$$\Phi(\zeta, z) = \int_{\overline{N}} \varphi(\cdot, z) d\mu_\zeta, \quad (\zeta, z) \in D \times X.$$

L'intégrale existe bien au sens de Riemann–Stieltjes, puisque l'intégrand est continu sur \overline{N} , μ_ζ est finie et V est séquentiellement complet. On note que d'après le théorème de Banach–Steinhaus la variation totale de μ_ζ est localement bornée dans D , d'où on tire facilement que Φ est continue sur $D \times X$. De plus, en raison de la propriété caractéristique de μ , pour n'importe quelle $w \in V'$, la fonction

$$w\Phi(\zeta, z) = \int_{\overline{N}} (w\varphi(\cdot, z)) d\mu_\zeta$$

est holomorphe en ζ . Elle l'est aussi en z , donc $w\Phi \in \mathcal{O}(D \times X)$; par conséquent $\Phi \in \mathcal{O}(D \times X, V)$. Il est clair que $w\Phi|_N = w\varphi$, ce qui implique $\Phi|_N = \varphi$.

En vertu de la partie (a) de cette démonstration on trouve $\Theta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \times X, V)$ telle que $\sup_{\iota(K) \times B} p_0(\Phi - \Theta) < \varepsilon$; en posant $g(\omega, z) = \Theta(\iota\omega, z)$ on obtient l'application g cherchée.

2. Préliminaires sur l^1 .

Si Γ est un ensemble quelconque, soit

$$l^1(\Gamma) = \left\{ z: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \|z\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |z(\gamma)| < \infty \right\},$$

c'est un espace de Banach. On va noter

$$B(R) = B_\Gamma(R) = \{z \in l^1(\Gamma) : \|z\| < R\}, \quad 0 < R < \infty.$$

On dit que $k \in l^1(\Gamma)$ est un *multiindice* si $k(\gamma)$ est un entier non négatif pour chaque $\gamma \in \Gamma$. S'il en est ainsi, la cardinalité de l'ensemble $\{\gamma : k(\gamma) \neq 0\}$ sera notée $\#k < \infty$. Dans cet article le symbole k représentera toujours un *multiindice*.

Avec $q \in \mathbb{C}$, $z \in B(1)$, posons

$$(2.1) \quad \Delta(q, z) = \sum_k \frac{\|k\|^{\|k\|}}{k^k} |q|^{\#k} |z^k|,$$

où $z^k = \prod_\gamma z(\gamma)^{k(\gamma)}$, et, bien entendu, $0^0 = 1$.

THÉORÈME 2.1. — (a) La série (2.1) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \times B(1)$, et Δ est continue dans $\mathbb{C} \times B(1)$.

(b) Pour $0 < \theta < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Delta(q, z)$ soit bornée lorsque $|q| \leq \varepsilon$, $\|z\| \leq \theta$.

Démonstration. — Dans [L], Lemma 4.1, nous avons déjà démontré (a) si $\Gamma = \mathbb{N}$; la même démonstration donne l'énoncé pour Γ quelconque. Reste (b). On va se servir des inégalités

$$(2.2) \quad s! \leq s^s \leq e^s s! \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$(2.3) \quad (e\eta)^s s! \leq s^s \quad , \quad s = 0 \text{ ou } s > s_\eta,$$

pour tout $0 < \eta < 1$ si s_η est suffisamment grand. On déduit (2.3) de la formule de Stirling, (2.2) se démontrant par récurrence.

Étant donné $\theta < 1$, choisissons $\theta < \eta < 1$ et s_η comme dans (2.3). Si k est un multiindice, notons $F = \{\gamma \in \Gamma : k(\gamma) = 0 \text{ ou } k(\gamma) > s_\eta\}$. On a, en vertu de (2.2), (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\|k\|^{\|k\|}}{k^k} |q|^{\#k} |z^k| &\leq \frac{e^{\|k\|} \|k\|! |q|^{\#k} |z^k|}{\prod_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma)! \prod_{\gamma \in F} e^{k(\gamma)} \eta^{k(\gamma)}} \\ &\leq \frac{\|k\|! e^{\sum_{\gamma \notin F} k(\gamma)}}{\prod_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma)! \eta^{\|k\|}} |q|^{\#k} |z^k| \leq \frac{\|k\|! |q| e^{s_\eta} |z^{\#k}|}{\prod_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma)! \eta^{\|k\|}} |z^k|. \end{aligned}$$

Donc si $|q| \leq e^{-s_\eta}$, $|z| \leq \theta$

$$\Delta(q, z) \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{\|k\|=n} \frac{\|k\|!}{\prod_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma)!} \frac{|z^k|}{\eta^{\|k\|}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\|z\|^n}{\eta^n} \leq \left(1 - \frac{\theta}{\eta}\right)^{-1}, \text{ c.q.f.d.}$$

On va se servir plus loin d'une caractérisation simple des précompacts de $l^1(\Gamma)$. Notons S le semi-groupe multiplicatif des applications $\sigma: \Gamma \rightarrow]0, +\infty[$ telles que $\{\gamma: \sigma(\gamma) > \varepsilon\}$ soit fini pour tout $\varepsilon > 0$; soit

$$(2.4) \quad S_1 = \{\sigma \in S: \sigma(\gamma) < 1 \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\}.$$

Les éléments σ de S , et donc ceux de S_1 , opèrent sur $l^1(\Gamma)$ par la multiplication ponctuelle $z \mapsto \sigma z$. L'image d'un sous-ensemble $A \subset l^1(\Gamma)$ par l'opération de σ sera notée σA .

PROPOSITION 2.2. — *Si $\sigma \in S_1$, alors $\sigma B(R) \subset B(R)$ est précompact. Réciproquement, pour chaque $K \subset B(R)$ précompact, il existe un précompact $L \subset B(R)$ et $\sigma \in S_1$ tels que $K = \sigma L$.*

En effet, c'est une conséquence immédiate de [DS], IV.8.18.

3. Développement des applications holomorphes.

Soit M une variété complexe, localement biholomorphe à un espace de Fréchet. Mais le lecteur peut aussi supposer que M est de dimension finie, ou un ouvert dans un espace de Fréchet, ou les deux.

DÉFINITION 3.1. — *Si $R: M \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, on dira que la sous-variété ouverte*

$$(3.1) \quad \Omega = \{(\zeta, z) \in M \times l^1(\Gamma): \|z\| < R(\zeta)\}$$

de $M \times l^1(\Gamma)$ est une variété de type (B) , à base M .

Si $N \subset M$ et $A \subset \Omega$, on va écrire $A|_N$ pour $(N \times l^1(\Gamma)) \cap A$.

Dans ce chapitre, on va étudier des développements de fonctions holomorphes dans une variété de type (B) . Notons $T = T(\Gamma)$ le tore $T = \{t: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$. Muni de la topologie produit, T est un groupe compact qui opère continûment sur $l^1(\Gamma)$ selon la formule

$$\bar{\rho}_t(z)(\gamma) = e^{2\pi i t(\gamma)} z(\gamma), \quad t \in T, z \in l^1(\Gamma), \gamma \in \Gamma.$$

Cette opération induit une opération ρ de T sur $M \times l^1(\Gamma)$ et sur Ω , donnée par

$$\rho_t(\zeta, z) = (\zeta, \bar{\rho}_t(z)).$$

Notons dt la mesure de Haar sur T normalisée de sorte que le volume de T soit 1.

Considérons un espace localement convexe V dont la topologie est donnée par une famille de semi-normes $P = \{p\}$ et une application continue $f: \Omega \rightarrow V$ telle que $f(\zeta, z)$ soit holomorphe en z pour chaque $\zeta \in M$. L'espace de ces applications sera noté $C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$. On associe à f la série

$$(3.2) \quad f \sim \sum_k f_k, \quad f_k = \int_T e^{-2\pi i \langle k, t \rangle} \rho_t^* f dt,$$

où $\langle k, t \rangle = \sum_{\gamma} k(\gamma)t(\gamma)$. Alors $f_k \in C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$ satisfait à $\rho_t^* f_k = e^{2\pi i \langle k, t \rangle} f_k$, d'où on tire que f_k est de la forme $f_k(\zeta, z) = a_k(\zeta)z^k$, avec $a_k \in C(M, V)$. On dira que (3.2) est le développement monomial de f , et les a_k sont les coefficients monomiaux. Si f est holomorphe, les coefficients a_k le sont aussi.

Il est facile de voir que $f = \sum f_k$ sur un sous-ensemble dense de Ω . En effet, si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est fini, le sous-espace

$$E(\Gamma_0) = \{z \in l^1(\Gamma) : z(\gamma) = 0 \text{ si } \gamma \notin \Gamma_0\} \subset l^1(\Gamma)$$

s'identifie à \mathbb{C}^n ; pour $\zeta \in M$ fixe et $z \in E(\Gamma_0)$, la série $\sum f_k(\zeta, z)$ correspond au développement de Taylor de l'application $F(\zeta, z)$, donc converge vers $f(\zeta, z)$ lorsque $z \in B(R(\zeta)) \cap E(\Gamma_0)$. Puisque $\bigcup_{\Gamma_0} E(\Gamma_0)$ est dense dans $l^1(\Gamma)$, on a bien $f = \sum f_k$ sur un sous-ensemble dense de Ω .

THÉORÈME 3.3. — (a) *Le développement monomial d'une $f \in C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$ quelconque converge uniformément vers f sur tout compact de Ω . Les coefficients monomiaux satisfont, pour chaque précompact $N \subset M$, pour chaque semi-norme $p \in P$ et $\sigma \in S_1$ (cf. (2.4)), à*

$$(3.3) \quad \alpha = \sup_k \sup_{\zeta \in N} k^k \|k\|^{-\|k\|} \sigma^k R(\zeta)^{\|k\|} p(a_k(\zeta)) < \infty.$$

(b) *Réciproquement, si des $a_k \in C(M, V)$ satisfont à (3.3) pour chaque précompact $N \subset M$, chaque semi-norme $p \in P$ et $\sigma \in S_1$, alors*

$$(3.4) \quad \sum_k a_k(\zeta)z^k$$

converge vers une fonction $g \in C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$, uniformément sur tout compact de Ω . Le développement monomial de g est (3.4). Si $a_k \in \mathcal{O}(M, V)$ pour tout k , alors $g \in \mathcal{O}(\Omega, V)$.

Lorsque $V = \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{N}$ et M se réduit à un point, ce théorème a été obtenu dans [L], Theorem 4.5; le cas des fonctions holomorphes sur tout $l^1(\Gamma)$ ayant été résolu antérieurement dans [R].

Démonstration. — (b) N'importe quel compact de Ω peut être recouvert par un nombre fini de compacts de la forme $N \times K$, où $N \subset M$ et $K \subset B(r)$ sont compacts, et $N \times B(r) \subset \Omega$. Donc, pour démontrer la convergence de (3.4) sur un compact quelconque de Ω , il suffit de supposer que le compact est de la forme $N \times K$ comme ci-dessus. En vertu de la proposition 2.2, on trouve un compact $L \subset B(r)$ et $\sigma \in S_1$ tels que $\sigma L \supset K$. Si $(\zeta, z) \in N \times K$, on choisit $w \in L$ tel que $\sigma w = z$; à l'aide de (3.3) on a la majoration

$$p(a_k(\zeta)z^k) \leq \alpha \|k\|^{\|k\|} k^{-k} |(w/r)^k|.$$

Donc, d'après le théorème 2.1(a), (3.4) converge uniformément sur $N \times K$. La somme g de (3.4) est dans $C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$ et même holomorphe si $a_k \in \mathcal{O}(M, V)$ par [N], Théorème 1.2.10, (cf. aussi [L], Propositions 2.1, 2.2); en effet, un calcul immédiat dit que (3.4) est le développement monomial de g .

(a) Étant donnés $f \in C_{\mathcal{O}}(\Omega, V)$, $p \in P$, $\sigma \in S_1$, posons $s = \max_{\gamma} \sqrt{\sigma(\gamma)} < 1$ et $\tau(\gamma) = \sigma(\gamma)/s$. Donc τ est dans S_1 . Puisque n'importe quel précompact de M peut être recouvert par un nombre fini de compacts $N \subset M$ tels que $\min_N R > s \max_N R$, il suffira de démontrer (3.3) pour un tel N . D'après la proposition 2.2, la fonction $\varphi(\zeta, z) = f(\zeta, \tau z)$ est bornée pour $(\zeta, z) \in N \times B(r)$, $r = s \max_N R$. On pose $\sup_{N \times B(r)} p(\varphi) = \mu$.

Si $\sum \varphi_k(\zeta, z) = \sum a_k(\zeta) \tau^k z^k$ est le développement monomial de φ , on a $\sup_{N \times B(r)} p(\varphi_k) \leq \mu$, donc pour $\zeta \in N$,

$$\begin{aligned} \mu &\geq p(\varphi_k(\zeta, r k / \|k\|)) = k^k \|k\|^{-\|k\|} \tau^k r^{\|k\|} p(a_k(\zeta)) \\ &\geq k^k \|k\|^{-\|k\|} \sigma^k R(\zeta)^{\|k\|} p(a_k(\zeta)), \end{aligned}$$

ce qui vérifie (3.3). Donc, selon (b), le développement monomial de f converge uniformément sur tout compact de Ω . La somme de la série est bien f puisqu'elle l'est sur un sous-ensemble dense de Ω .

COROLLAIRE 3.4. — *Si les coefficients monomiaux de $f \in \mathcal{O}(\Omega, V)$ satisfont (3.3) pour chaque précompact $N \subset M$, chaque semi-norme $p \in P$ et $\sigma \in S$, alors f se prolonge analytiquement à $M \times l^1(\Gamma)$.*

En effet, si (3.3) est satisfaite pour chaque $\sigma \in S$, elle le sera encore si on remplace R par λR , $\lambda \in]0, +\infty[$ arbitraire. Par suite, le développement monomial converge sur $\{(\zeta, z) : \|z\| < \lambda R(\zeta)\}$, donc aussi sur $M \times l^1(\Gamma)$.

4. Théorème d'approximation.

Considérons une variété de Stein lisse M , donc de dimension finie, un compact $K \subset M$ convexe par rapport à $\mathcal{O}(M)$ et un voisinage ouvert $M' \subset M$ de K . Soient $r, R : M' \rightarrow]0, +\infty[$ des fonctions continues telles que $r(\zeta) < R(\zeta)$ pour tout $\zeta \in M'$, et posons

$$\Omega = \{(\zeta, z) \in M' \times l^1(\Gamma) : \|z\| < R(\zeta)\}, \quad A = \{(\zeta, z) \in \Omega : \|z\| \leq r(\zeta)\}.$$

Soit V un espace localement convexe, P la famille des semi-normes continues sur V .

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega, V)$, $p_0 \in P$ et $\varepsilon > 0$ il existe $g \in \mathcal{O}(M \times l^1(\Gamma), V)$ tel que $\sup_{A|_K} p_0(f - g) < \varepsilon$.*

La démonstration se fera à l'aide de deux propositions auxiliaires.

PROPOSITION 4.2. — *Si les nombres $c_k \in [0, +\infty[$ satisfont à $\sup_k c_k \sigma^k < \infty$ pour chaque $\sigma \in S_1$, et $Q \geq 1$, alors $\sup_k c_k \sigma^k Q^{\#k} < \infty$, $\sigma \in S_1$.*

Démonstration. — Étant donné $\sigma \in S_1$, on définit $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \sigma(\gamma) \geq 1/Q\}$ et $\tau \in S_1$ par

$$\tau(\gamma) = \begin{cases} \sigma(\gamma) & \text{si } \gamma \in \Gamma_0 \\ Q\sigma(\gamma) & \text{si } \gamma \notin \Gamma_0. \end{cases}$$

Notons par n la cardinalité de Γ_0 . Alors $\#k \leq n + \sum_{\gamma \notin \Gamma_0} k(\gamma)$, donc

$$\sup_k c_k \sigma^k Q^{\#k} \leq \sup_k c_k \sigma^k Q^{n + \sum_{\gamma \notin \Gamma_0} k(\gamma)} = \sup_k Q^n c_k \tau^k < \infty.$$

PROPOSITION 4.3. — *Soit $\theta \in]0, 1[$ et soit \mathcal{K} un ensemble de multiindices k . Supposons que des nombres $c_k \in]0, +\infty[$, $k \in \mathcal{K}$, satisfont à*

$$(4.1) \quad \inf_{\mathcal{K}} c_k \theta^{\|k\|} > 0; \quad \text{et}$$

$$(4.2) \quad \sup_{\mathcal{K}} c_k \sigma^k < \infty$$

pour tout $\sigma \in S_1$. Alors (4.2) est satisfaite pour tout $\sigma \in S$.

Démonstration. — Voir [L], Lemma 8.2. Bien que dans [L] la proposition ne soit énoncée que pour $\Gamma = \mathbb{N}$, la même démonstration suffit pour Γ arbitraire.

Démonstration du théorème 4.1. — Développons f en une série monomiale $\sum a_k(\zeta)z^k$. Choisissons un voisinage ouvert précompact $G \subset M'$ de K et $\theta \in]0, 1[$ tels que $r(\zeta) < \theta^2 R(\zeta)$, si $\zeta \in G$. Avec $\delta > 0$ et $Q > 1$ dont les valeurs seront précisées plus loin, posons pour $p \in P$

$$(4.3) \quad c_k(p) = k^k \|k\|^{-\|k\|} \sup_{\zeta \in G} R(\zeta)^{\|k\|} p(a_k(\zeta)), \quad c'_k(p) = c_k(p) Q^{\#k},$$

$$(4.4) \quad \mathcal{K} = \{k: c'_k(p_0) \theta^{\|k\|} \geq \delta\}, \quad h(\zeta, z) = \sum_{k \in \mathcal{K}} a_k(\zeta) z^k.$$

On se propose de montrer que $h \in \mathcal{O}(G \times l^1(\Gamma), V)$. Avec le corollaire 3.4 ceci revient à vérifier

$$(4.5) \quad \sup_{\mathcal{K}} c_k(p) \sigma^k < \infty, \quad p \in P, \sigma \in S.$$

Or, quitte à remplacer p par $p + p_0$, on peut supposer $p \geq p_0$. Alors $\inf_{\mathcal{K}} c'_k(p) \theta^{\|k\|} > 0$, et, à l'aide du théorème 3.3(a) et de la proposition 4.2, on a $\sup_{\mathcal{K}} c'_k(p) \sigma^k < \infty$, $\sigma \in S_1$. La proposition 4.3 donne immédiatement (4.5); donc h est bien holomorphe dans $G \times l^1(\Gamma)$.

Ensuite, on note que si $\zeta \in G$, $k \notin \mathcal{K}$

$$p_0(a_k(\zeta)) \leq \|k\|^{\|k\|} k^{-k} R(\zeta)^{-\|k\|} Q^{-\#k} c'_k(p_0) \leq \|k\|^{\|k\|} k^{-k} (\theta/r(\zeta))^{\|k\|} Q^{-\#k} \delta$$

par (4.3), (4.4); donc si $(\zeta, z) \in A|_{\mathcal{K}}$

$$p_0(f(\zeta, z) - h(\zeta, z)) \leq \sum_{k \notin \mathcal{K}} p_0(a_k(\zeta)) |z^k| \leq \delta \sum_k \|k\|^{\|k\|} k^{-k} |\theta z/r(\zeta)|^k Q^{-\#k}$$

et

$$\sup_{A|_{\mathcal{K}}} p_0(f - h) \leq \delta \sup_{\|w\| \leq \theta} \Delta(Q^{-1}, w).$$

En vertu du théorème 2.1(b), en choisissant Q suffisamment grand et δ petit, on obtient $\sup_{A|_{\mathcal{K}}} p_0(f - h) < \varepsilon/2$. On achève la démonstration en

observant que le théorème 1.1 donne une fonction $g \in \mathcal{O}(M \times l^1(\Gamma), V)$ avec $\sup_{A|_{\mathcal{K}}} p_0(h - g) < \varepsilon/2$, d'où $\sup_{A|_{\mathcal{K}}} p_0(f - g) < \varepsilon$, c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] L. BUNGART, Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 111 (1964), 317-344.
- [B2] L. BUNGART, Errata to volume 111, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 113 (1964), 547.

- [D1] S. DINEEN, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [D2] S. DINEEN, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, Berlin, 1999.
- [DS] N. DUNFORD, T. SCHWARTZ, *Linear Operators I.*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [L] L. LEMPert, The Dolbeault complex in infinite dimensions, II, à paraître, *J. Amer. Math. Soc.*
- [N] P. NOVERRAZ, *Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [R] R.A. RYAN, Holomorphic mappings in l^1 , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302 (1987), 797–811.

Manuscrit reçu le 23 juillet 1998,
accepté le 1er décembre 1998.

László LEMPert,
Purdue University
Department of Mathematics
West Lafayette IN 47907 (USA).