ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDELKADER KHELLADI

Colorations généralisées, graphes biorientés et deux ou trois choses sur François

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 3 (1999), p. 955-971

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_3_955_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 3 (1999), 955–971

COLORATIONS GÉNÉRALISÉES
GRAPHES BIORIENTÉS
ET DEUX OU TROIS CHOSES SUR FRANÇOIS

par Abdelkader KHELLADI

Introduction.

Mes relations avec François ont débuté au cours d'un premier contact avec le Laboratoire de Grenoble en 1978. Elles ont vite évolué vers des relations personnelles et scientifiques très fortes. Pendant vingt ans, j'ai eu l'occasion de vérifier sa gentillesse et sa disponibilité, qui nous ont permis de développer trois grands axes de travaux communs. La généralisation des nombres chromatiques $\chi_n(G)$ de Stahl a été un premier thème de travail et a abouti à l'introduction de la notion de colorations généralisées et leurs nombres chromatiques associés, $\chi_n^{p,q}(G)$. Cette nouvelle notion a permis d'une part d'infirmer, avec Payan, une conjecture posée par Brigham et Dutton et d'autre part d'étendre de manière naturelle la formule de récurrence de Stahl aux nombres chromatiques $\chi_n^{0,q}(G)$. Cette relation s'exprime comme

$$\chi_n^{0,q}(G) \geq \chi_{n-1}^{0,q}(G) + 2.$$

La conjecture de Bouchet sur les *6-flots non-nuls* dans les graphes biorientés a constitué une préoccupation importante de travaux communs avec François. Une approche fondée sur l'étude de la structure matroïdale des graphes biorientés a permis de prouver le résultat important suivant :

Mots-clés : Graphe – Coloration – Homomorphisme – Biorientation – m-isthme – Flot non nul – Matroïdes – Circuits.
Classification math. : 05C99.

THÉORÈME (1984). — *Soit $G = (V, E)$ un graphe biorienté non m-équilibré. Si G est sans m-isthme et sans arêtes parallèles de même signe, alors G admet un q-flot non-nul avec*

$q = 6$ si G est 3-connexe et sans circuits de type (iii);

$q = 18$ si G est 4-connexe;

$q = 30$ si G est 3-connexe et sans triangle équilibré.

Cette période fut aussi celle où les potentiels et tensions dans les graphes biorientés ont aidé à dégager la problématique générale de l'Héritage, pour laquelle François a montré une extrême sensibilité. Une thèse de magistère est en préparation sur ce thème à Alger.

D'autres travaux ont été abordés dès le milieu des années 80, en particulier une approche algébrique de problèmes de graphes, basée sur des considérations structurelles inspirées des méthodes de la Topologie Algébrique. François a été d'une aide appréciable pour la mise en place du groupe qui a étudié le produit fibré de graphes, tant à Alger qu'à Grenoble. Le problème central est la conjecture de Hedetniemi qui affirme que le produit cartésien de deux graphes *n-chromatiques* est aussi *n-chromatique*. François a fait partie, en mai 1993, du jury de magistère de Semri à Alger qui a étudié le produit fibré et en a dégagé les premières propriétés, en particulier celles du produit fibré de deux cycles impairs. C'était la dernière venue de François à Alger. Il a continué à inspirer cette recherche et la formulation de la conjecture sur le nombre chromatique du produit fibré de deux graphes *n-chromatiques* qui a abouti, en 1995, à la démonstration de la conjecture de Khelladi pour $n = 3$ par Carbonneaux, Gravier et Khelladi.

1. Premières rencontres avec François.

J'ai rencontré François pour la première fois au printemps 1978, lors d'un séjour de prospection pour un sujet de recherche doctorale. Une réunion a été organisée et a regroupé les chercheurs qui sont devenus des amis au fil des ans. Dès cette première réunion, j'ai été accroché par les travaux de François et j'avais passé une bonne partie de cette nuit là à consulter sa thèse en vue d'une autre rencontre le lendemain. Nous avons très vite sympathisé. Je dois, aujourd'hui, reconnaître que c'était l'expression de sa disponibilité et de sa gentillesse naturelles, que j'ai eu de nombreuses occasions de vivre, qui se sont manifestées dès ces premiers moments et ces premières rencontres.

Nous avons eu à développer les thèmes de mon travail de recherche, résumés en trois grandes approches : les colorations généralisées, les q-flots non-nuls dans les graphes biorientés et enfin une approche algébrique de la théorie des graphes. Je présenterai en premier lieu ces trois thèmes.

2. Colorations généralisées.

Les graphes considérés sont simples, c'est-à-dire non orientés, sans boucles ni arêtes multiples. Le lecteur est renvoyé à [1], [2] et [6] pour les résultats standard qui ne sont pas rappelés ici. Les notations suivantes seront utilisées : si m et n sont des entiers, $n \leq m$,

$$I_m = \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{et} \quad I_m^n = \{a \subseteq I_m \mid |a| = n\}$$

où $|a|$ est le cardinal de l'ensemble fini a.

2.1. Colorations généralisées.

2.1.1. Si $G = (V, E)$ est un graphe, une coloration généralisée de G avec m couleurs est une application $c : V \to I_m^n$ avec des conditions supplémentaires sur les sommets adjacents de manière à obtenir diverses notions (qui étendent la coloration usuelle des sommets de G) comme développées par S. Stahl, ensuite par Brigham et Dutton et enfin par Khelladi. Rappelons ces conditions : pour tous sommets adjacents u et v

- Condition de Stalh sur la *n-coloration* dans [12] est :

$$|c(u) \cap c(v)| = 0 \ ;$$

- Condition de Brigham et Dutton sur la *$(n : p)$-coloration* dans [4] est :

$$|c(u) \cap c(v)| = p \ ; \quad p \leq n \leq m \ ;$$

- Condition de Khelladi sur la *$n : (p, q)$-coloration* dans [9] est :

$$p \leq |c(u) \cap c(v)| \leq q \ ; \quad p \leq q \leq n \leq m.$$

2.1.2. Le nombre chromatique généralisé associé à chacune des conditions précédentes généralise le nombre chromatique usuel $\chi(G)$ et est défini comme le plus petit entier m tel que G possède une telle coloration généralisée avec m couleurs. Ces nombres sont respectivement notés :

$\chi_n(G)$ pour le n-nombre chromatique de Stahl;

$\chi_n^p(G)$ pour le $(n:p)$-nombre chromatique de Brigham et Dutton;

$\chi_n^{p,q}(G)$ pour le $n:(p,q)$-nombre chromatique de Khelladi.

2.1.3. Les relations suivantes écrites pour les nombres chromatiques généralisés et signifiant qu'elles sont vérifiées pour tout graphe, sont faciles :

$$\chi_1 = \chi\ ;$$

$$\chi_n^0 = \chi_n \text{ pour tout entier } n \geq 1\ ;$$

$$\chi_n^{p,p} = \chi_n^p \text{ pour tous les entiers } n \text{ et } p, p \leq n.$$

2.2. Graphes de Kneser généralisés.

2.2.1. Rappelons que si $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont des graphes, un homomorphisme de G dans G' est la donnée d'une application f de V dans V' telle que pour toute arête $\{u, v\}$ de G alors $\{f(u), f(v)\}$ est une arête de G'. En d'autres termes, un homomorphisme est une application sur les sommets qui conserve l'adjacence. Il est bien connu que le nombre chromatique usuel d'un graphe G est le plus petit entier m tel qu'il existe un homomorphisme de G dans K_m (le graphe complet sur m sommets).

2.2.2. Pour chacun des nombres chromatiques généralisés précédents, une famille de graphes (qui joue le même rôle que la famille des graphes complets pour le nombre chromatique usuel) est définie. Ce sont les graphes de Kneser généralisés.

Pour les nombres de Stahl, les graphes de Kneser généralisés associés sont définis pour tous entiers m et n tels que $n \leq m$ et sont notés

$$G_n(m) = (I_m^n, E_n(m))$$

où $\{a, b\} \in E_n(m)$ si et seulement si $|a \cap b| = 0$.

Pour les nombres de Brigham et Dutton, les graphes de Kneser généralisés associés sont définis pour tous entiers m, n et p tels que $p \leq n \leq m$ et sont notés

$$G_n^p(m) = \left(I_m^n, E_n^p(m)\right)$$

où $\{a,b\} \in E_n^p(m)$ si et seulement si $|a \cap b| = p$.

Pour les nombres de Khelladi, les graphes de Kneser généralisés associés sont définis pour tous entiers m, n, p et q tels que $p \le q \le n \le m$ et sont notés

$$G_n^{p,q}(m) = \big(I_m^n, E_n^{p,q}(m)\big)$$

où $\{a,b\} \in E_n^{p,q}(m)$ si et seulement si $p \le |a \cap b| \le q$.

2.2.3. Il est clair que certaines relations existent entre ces diverses généralisations des graphes de Kneser. En fait,

$$\begin{aligned} G_0^{0,1}(m) &= K_m \ ; \\ G_0^{0,n} &= G_n(m) \ ; \\ G_n^{p,p}(m) &= G_n^p(m). \end{aligned}$$

2.2.4. La suite infinie des homomorphismes

$$\ldots \longrightarrow K_m \longrightarrow K_{m+1} \longrightarrow \ldots$$

possède des analogues pour les graphes de Kneser généralisés, à savoir

$$\begin{array}{lllllll} \ldots & \longrightarrow & G_n(m) & \longrightarrow & G_n(m+1) & \longrightarrow & \ldots \quad (n \text{ fixé}) \quad ; \\ \ldots & \longrightarrow & G_n^p(m) & \longrightarrow & G_n^p(m+1) & \longrightarrow & \ldots \quad (n \le p \text{ fixés}) \quad ; \\ \ldots & \longrightarrow & G_n^{p,q}(m) & \longrightarrow & G_n^{p,q}(m+1) & \longrightarrow & \ldots \quad (p \le q \le n \text{ fixés}). \end{array}$$

Par exemple, l'homomorphisme $G_n^{p,q}(m) \longrightarrow G_n^{p,q}(m+1)$ est l'application qui envoie $a \in I_m^n$ dans lui-même considéré comme élément de I_{m+1}^n.

2.2.5. Il est maintenant facile de voir que les nombres chromatiques généralisés d'un graphe G (possédant au moins une arête) peuvent être interprétés comme les plus petits entiers m tel qu'il existe un homomorphisme de G dans le graphe de Kneser qui convient.

De manière plus précise :

$\chi_n(G)$ est le plus petit entier m tel qu'il existe un homomorphisme de G dans le graphe $G_n(m)$;

$\chi_n^p(G)$ est le plus petit entier m tel qu'il existe un homomorphisme de G dans le graphe $G_n^p(m)$;

$\chi_n^{p,q}(G)$ est le plus petit entier m tel qu'il existe un homomorphisme de G dans le graphe $G_n^{p,q}(m)$.

2.3. Résultats généraux.

2.3.1. Premiers résultats. Les résultats donnés ci-dessous sur les nombres de Khelladi [8] ont été pour la plupart établis conjointement avec François Jaeger et Charles Payan. Le lecteur pourra consulter [12] pour des résultats sur les nombres de Stahl et [4] pour les nombres de Brigham et Dutton. On remarque d'abord que les cas intéressants sont ceux où

$$0 \leq p \leq q \leq n-1 \leq m-2.$$

2.3.1.1. — Pour tout graphe possédant au moins une arête :

$$\chi_n^{p,q}(G) \geq 2n-q.$$

Sauf mention expresse du contraire, les graphes considérés dorénavant possèdent au moins une arête.

2.3.1.2. — Si $G=(V,V';E)$ est un graphe biparti, alors

$$\chi_n^{p,q}(G) = 2n-q.$$

Les sommets de V sont colorés avec $\{1,2,\ldots,n\}$ alors que ceux de V' le sont avec $\{1,\ldots,q,n+1,\ldots,2n-q\}$.

2.3.1.3. — En général $\chi_n^{p,q} \neq \chi_n^q$. Par exemple,

$$\chi_2^{0,1}(K_4)=4 \text{ alors que } \chi_2^1(K_4)=5.$$

Les quatre sommets de K_4 sont colorés avec $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$ et $\{1,4\}$, ce qui signifie que $\chi_2^{0,1}(K_4) \leq 4$ et l'égalité est vérifiée car il n'est pas possible d'exhiber quatre paires distinctes dans I_3. La relation $\chi_2^1(K_4)=5$ est démontrée dans [4] en colorant les sommets de K_4 avec $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ et $\{1,5\}$

2.3.1.4. — Si $G=(V,E)$ et $G'=(V',E')$ sont des graphes et si f est un homomorphisme de G dans G' alors $\chi_n^{p,q}(G) \leq \chi_n^{p,q}(G')$.

2.3.1.5. Remarque. — Il est facile de voir que l'application de I_m^n dans I_m^{m-n} qui associe à tout sous-ensemble a de I_m^n son complémentaire (considéré comme élément de I_m^{m-n}) définit un isomorphisme de $G_n^{p,q}(m)$ dans $G_{m-n}^{p',q'}(m)$ où

$$p'=\max\{0,m-2n+p\} \text{ et } q'=m-2n+q.$$

En particulier $G_n^p(m)$ est isomorphe à $G_{m-2n+p}^{m-n}(m)$ si $m-2n+p \geq 0$.

2.3.2. Inégalité générale. Le résultat suivant permet d'établir plusieurs relations entre les nombres chromatiques généralisés.

2.3.2.1. PROPOSITION. — *Quels que soient les entiers n, p et q avec $p \leq q \leq n-1$ et les entiers n', p' et q', avec $p' \leq q' \leq n'-1$ posons pour tout entier r*

$$m_0 = \mathrm{Max}\{2n-q, 2n'-q'-r\}.$$

(i) *Si $\chi_{n'}^{p',q'} \leq \chi_n^{p,q} + r$, alors pour tout entier $m \geq m_0$ il existe un homomorphisme de $G_n^{p,q}(m)$ dans $G_{n'}^{p',q'}(m+r)$.*

(ii) *Si pour tout entier $m \geq m_0$ il existe un homomorphisme du graphe $G_n^{p,q}(m)$ dans $G_{n'}^{p',q'}(m+r)$ alors quel que soit le graphe G tel que $\chi_n^{p,q}(G) \geq m_0$ on a*

$$\chi_{n'}^{p',q'}(G) \leq \chi_n^{p,q}(G) + r.$$

Preuve. — Facile par 3.1.4.

La seule remarque qui s'impose porte sur les restrictions dans ces énoncés qui sont justifiées par des cas singuliers qui peuvent se présenter. Par exemple,

1) Si $2n-q \leq m < 2n'-q'-r$ alors la partie (i) de 3.2.1 n'est pas vérifiée parce que $G_{n'}^{p',q'}(m+r)$ est un sommet isolé ce qui n'est pas le cas de $G_n^{p,q}(m)$.

2) La restriction $\chi_n^{p,q}(G) \geq m_0$ de (ii) est faite parce que si $2n-q < 2n'-q'-r$ et si G' est un graphe tel que $2n-q \leq \chi_n^{p,q}(G) < 2n'-q'-r$, on obtiendrait

$$\chi_{n'}^{p',q'}(G') \geq 2n'-q' > \chi_n^{p,q}(G') + r.$$

Par exemple, $G' = G_n^{p,q}(m)$ avec $2n-q \leq m < 2n'-q'-r$ est un tel graphe qui contredit 3.2.1 (ii) puisque $2n-q \leq \chi_n^{p,q}\big(G_n^{p,q}(m)\big) \leq m < 2n'-q'-r$.

2.3.2.2. Conséquences.

(i) Si $p \leq q \leq n-1$, alors $\chi_{n+1}^{p+1,q+1} \leq \chi_n^{p,q} + 1$. Il suffit de noter que l'application $f : I_m^n \to I_{m+1}^{n+1}$ donnée par

$$f(a) = a \cup \{m+1\} \text{ quel que soit } a \in I_m^n$$

définit un homomorphisme $G_n^{p,q}(m) \to G(m)_{n+1}^{p+1,q+1}$. La relation (i) de 3.2.2 découle de 3.2.1.

(ii) *Autres relations :*

$$\chi_n^{0,q} \leq \chi_n^{p,q} \,;$$

$$\chi_n^{0,q} \leq \chi_n \,;$$

et quels que soient les entiers p, p', q, q' et n tels que $0 \leq p \leq p' \leq q' \leq q \leq n-1$

$$\chi_n^{p,q} \leq \chi_{n'}^{p',q'}.$$

Cette dernière inégalité montre que

$$\chi_n^{p,q+1} \leq \chi_n^{p,q} \leq \chi_n^{p+1,q},$$

c'est-à-dire que $\chi_n^{p,q}$ est non décroissant en p et non croissant en q.

2.3.3. Inégalité de Stahl généralisée. Des relations de récurrence reliant les nombres chromatiques généralisés sont clairement utiles et fournissent des outils de calculs et d'estimations effectifs de nombres chromatiques concrets. Une relation intéressante est celle prouvée par Stahl dans [12].

2.3.3.1 Théorème (Stahl [12]). — *Quel que soit l'entier $m \geq 1$*

$$\chi_n \geq \chi_{n-1} + 2.$$

Il peut être démontré que cette inégalité ne peut être étendue aux $(n{:}\,p)-$nombres définis par Brigham et Dutton. Cependant, l'introduction des $n{:}\,(p,q)$ nombres chromatiques permet une extension naturelle de l'inégalité de Stahl comme suit (voir aussi [9]).

2.3.3.2. Proposition (Khelladi, 1985). — *Quels que soient les entiers n, m, p et q tels que $p \leq q \leq n \leq m$ alors*

$$\chi_n^{p,q} \geq \chi_{n-1}^{p-1,q} + 2.$$

En particulier, si $p = 0$, on obtient la relation suivante :

$$\chi_n^{0,q} \geq \chi_{n-1}^{0,q} + 2.$$

Preuve. — On utilise 3.2.1 (ii) en exhibant des homomorphismes adéquats. Désignons les éléments de I_m^n par $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et disons qu'il est $k-$régulier $a_i = i$ pour tous les indices

$i = 1, \ldots, k$ et $a_i > i$ lorsque $i > k$ (où $k \geq 2$ est un entier) ; a est irrégulier si quel que soit $i = 1, \ldots, n$, $a_i > i$. On définit alors un homomorphisme de $G_n^{p,q}(m)$ dans $G_{n-1}^{p-1,q}(m-2)$ par l'application notée f de I_m^n dans I_{m-2}^{n-1} en posant :

– si $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est irrégulier $f(a) = \{a_1 - 2, \ldots, a_n - 2\}$,

– si $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est k–régulier $f(a) = \{1, \ldots, k-1, a_{k+1}-2, \ldots, a_n-2\}$.

Le fait que f est réellement un homomorphisme découle du lemme ci-dessous dont le détail de la preuve est dans [8]. L'inégalité découle alors de 3.2.1.

2.3.3.2.1. LEMME. — *Quels que soient les éléments a et b de I_m^n*

$$|a \cap b| - 1 \leq |f(a) \cap f(b)| \leq |a \cap b|.$$

2.3.3.3. Conséquences. — L'inégalité de Stahl généralisée implique quelques corollaires.

2.3.3.3.1. PROPOSITION. — *Si $0 \leq p \leq q - 1 \leq n - 2$, alors*

$$\chi_n^{p,q} \leq \chi_{n-1}^{p,q-1} - 1.$$

Preuve. — Découle de 3.2.1 et 3.2.2 (i).

2.3.3.3.2. COROLLAIRE. — *Si $0 \leq p \leq q - 1 \leq n - 2$, alors*

$$q + \chi_n^{p,q} \leq p + \chi_n^p \leq \chi_n.$$

Preuve. — La relation 3.3.3.1 utilisée $q - p$ fois et le lemme suivant permettent de démontrer le corollaire 2.3.3.3.2.

LEMME. — *Quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$ on a*

$$n + \chi_n \leq p + \chi_n^p.$$

La preuve du lemme 2 est similaire à celle de 3.3.3.1.

Ce corollaire montre en particulier que si $p \neq 0$ (et $q \neq p$)

$$\chi_n^{p,q} \neq \chi_n^p \quad \text{et} \quad \chi_n^p \neq \chi_n.$$

2.4. Résultats sur les graphes de Kneser généralisés.

Dans [12] Stahl note que la conjecture de Kneser implique pour $1 \le n \le m$,

$$\chi_n(G_m(2m+k)) = 2 + \chi_{n-1}(G_m(2m+k)).$$

Le résultat suivant en constitue une formulation précise.

2.4.1. THÉORÈME (Lovász–Stahl). — *Si k et m sont des entiers, $k \ge 0$ et $1 \le n \le m$, alors $\chi_n(G_m(2m+k)) = 2n+k$.*

Preuve. — Notons que le résultat est démontré dans [10] par Lovász pour $n=1$, par Stahl lorsque $k=1$ dans [12] et est trivial pour $k=0$. Pour achever la preuve nous avons besoin des résultats intermédiaires suivants.

2.4.1.1. LEMME. — *Si $k \ge 1$ alors quels que soient n et m, $1 \le n \le m$*

$$\chi_n(G_m(2m+k)) \ge 2n+k.$$

Preuve du lemme 2.4.1.1. — En fait, pour tout $n \ge 1$ il n'existe pas d'homomorphisme de $G_m(2m+k)$ dans $G_m(2m+(k-1))$ puisque le résultat de Lovász dans [10] impliquerait

$$2+k = \chi\big(G_m(2m+k)\big) \le \chi\big(G_n(2n+(k-1)\big) = 2+(k-1).$$

Par définition, on obtient donc

$$\chi_n\big(G_m(2m+k)\big) > 2n+k-1.$$

Fin de la preuve du théorème 2.4.1. — Le lemme 4 implique

$$\chi_m\big(G_m(2m+k)\big) \ge 2m+k$$

puisque l'inégalité inverse est triviale.

D'un autre côté, l'inégalité de Stahl appliquée $(m-n)$ fois à χ_n donne

$$\chi_n\big(G_m(2m+k)\big) \le \chi_m\big(G_m(2m+k)\big) - 2(m-n)$$

et comme par définition $\chi_m\big(G_m(2m+k)\big) \le 2m+k$

$$\chi_m\big(G_m(2m+k)\big) \le (2m+k) - 2(m-n) = 2n+k.$$

2.4.2. COROLLAIRE. — *Pour tous les entiers k, q, n et m tel que $0 \le q \le n-1 \le m-1$,*

$$\chi_n^{0,q}\big(G_m(2m+k)\big) \le 2n+k-q.$$

Preuve. — C'est une conséquence facile du théorème 4.1 et de la relation

$$q + \chi_n^{0,q} \leq \chi_n.$$

Les résultats suivants illustrent encore les techniques de calculs basées sur les homomorphismes.

2.4.3. PROPOSITION. — *Pour tout entier $n \geq 4$*

$$\chi_n^{n-2}\big(G_n^{n-2}(n+i)\big) = n+i \qquad (i = 2, 3).$$

Preuve. — Le résultat est facile lorsque $i = 2$ car (voir 3.1.1 ci-dessus)

$$n + 2 = 2n - (n-2) \leq \chi_n^{n-2}\big(G_n^{n-2}(n+2)\big) \leq n+2.$$

Si $i = 3$, le résultat est moins évident et nécessite le lemme suivant.

2.4.3.1. LEMME. — *Quel que soit $n \geq 4$, il n'existe pas d'homomorphisme du graphe $G_n^{n-2}(n+3)$ dans $G_n^{n-2}(n+2)$.*

Le lemme 2.4.3.1 implique la proposition puisqu'il donne aussi

$$G_n^{n-2}\big(G_n^{n-2}(n+3)\big) > n+2$$

et la proposition est prouvée car nous avons déjà

$$G_n^{n-2}\big(G_n^{n-2}(n+3)\big) \leq n+3.$$

Preuve du lemme 2.4.3.1. — Posons $m = n+3$, donc $n \geq 4$ devient $m \geq 7$. Nous devons donc montrer que pour tout entier $m \geq 7$ il n'existe pas d'homomorphisme de $G_{m-3}^{m-5}(m)$ dans $G_{m-3}^{m-5}(m-1)$. Par la remarque 3.1.5, les graphes $G_{m-3}^{m-5}(m)$ et $G_{m-3}^{m-5}(m-11)$ sont isomorphes respectivement à $G_3^1(m)$ et $G_2(m-1)$. Nous sommes ramenés à montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme de $G_3^1(m)$ dans le graphe $G_2(m-1)$. Si un tel homomorphisme f existe, on peut supposer, sans perte de généralité, que $f(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$. Soit N le voisinage de $\{1,2,3\}$ de $G_3^1(m)$ (c'est-à-dire le sous-graphe de $G_3^1(m)$ induit par les sommets adjacents à $\{1,2,3\}$) et N' le voisinage de $\{1,2\}$ dans $G_2(m-1)$. Il est clair que f induit un homomorphisme de N dans N', et donc par 3.1.4

$$\chi(N) \leq \chi(N').$$

De plus, il est facile d'identifier N' à $G_2(m-2)$ et si on écrit $m-2 = 4 + (m-6)$ alors le théorème de Lovász [7] donne (lorsque $m \geq 7$)

$$\chi(N') = 2 + (m-6) = m-4. \tag{5}$$

D'autre part, il est prouvé (voir [6], lemme 3.4) que

$$\chi(N) > (m-3). \tag{6}$$

Combinant (5) et (6) on obtient $c(N) > m-3 > m-4 = c(N')$, ce qui contredit la relation $\chi(N) \leq \chi(N')$.

3. q–flots non-nuls et conjecture de Bouchet.

3.1. Définitions.

Les graphes biorientés et les graphes signés sont connus depuis longtemps, et sont apparus respectivement lors des travaux de plongement de graphes orientés dans les surfaces orientées ou non et les travaux de Harary sur les essais d'application de la théorie des graphes aux relations sociales [5]. Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons aux graphes simples. Si $G = (V, E)$ est un graphe, l'ensemble des demi-arêtes de G est l'ensemble $H(G)$ défini comme

$$H(G) = \{(e, v) \in E \times V \mid v \text{ est un sommet de } e\}.$$

Une biorientation de G est la donnée d'une signature des demi-arêtes de G

$$\tau : H(G) \to \{-1, +1\}$$

que l'on étend de manière naturelle à $E \times V$ par 0. Toute biorientation de G induit une signature $\sigma : E \to \{-1, +1\}$ de ses arêtes, définie pour toute arête $e = \{u, v\}$ par

$$\sigma(e) = -\tau(e, u).\tau(e, v).$$

Un graphe biorienté est un couple (G, τ) où τ est une biorientation du graphe G; on le notera simplement G lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Une arête e telle que $\sigma(e) = -1$ (resp. $+1$) est une arête négative (resp. positive).

Un flot, à valeurs dans un anneau unitaire et commutatif A, dans un graphe biorienté G est la donnée d'une valuation des arêtes $f : E \to A$ telle que pour tout sommet v de G

$$\sum_{e \in E} \tau(e, v).f(e) = 0.$$

Cette relation (de type de Kirchoff) exprime que la somme des valeurs du flot sur l'ensemble des arêtes incidentes au sommet v pondérées par la biorientation est nulle.

Un k*−flot non-nul* dans G est un flot à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tel que quelle que soit l'arête e de G on ait

$$|f(e)| < k.$$

Si un tel flot existe on dit que G admet (ou possède) un k*−flot non-nul.*

3.2. La conjecture de Bouchet.

Au début des années quatre vingt, André Bouchet, après avoir démontré qu'il existait des graphes biorientés qui ne possédaient pas de 5*−flot non-nul* (il exhibe [3] une biorientation du graphe de Petersen qui n'admet pas un tel flot) propose la conjecture 3.2.1 ci-dessous. Comme pour la conjecture de Tutte sur l'existence d'un 5*−flot non-nul* dans les graphes usuels, l'absence d'un m*−isthme* (analogue signé d'un isthme usuel) dans G est une condition nécessaire à l'existence d'un flot non-nul. Après avoir prouvé l'existence d'une borne pour les flots non-nuls dans les graphes biorientés [3] (analogue au résultat de Jaeger [7] prouvant l'existence d'un 8−flot non-nul dans les graphes orientés usuels), Bouchet a posé la conjecture suivante.

3.2.1. Conjecture de Bouchet [3] (1982). Tout graphe biorienté sans m*−isthme* possède un 6−flot non-nul.

François m'a proposé de travailler sur cette conjecture en 1982. Avec une grande patience, en s'inspirant de la démarche de Seymour pour démontrer l'existence d'un 6−flot non-nul dans les graphes orientés usuels, François m'a aidé et encouragé à aborder ce problème. Nous avons été amenés à utiliser la structure matroïdale des graphes signés pour en déterminer explicitement la structure. Quelques éléments techniques importants sont rappelés avant d'énoncer le théorème principal obtenu pour illustrer la démarche retenue à cette époque.

3.3. Structure des graphes signés.

Cette notion a pour origine le théorème de Zaslavsky [15] caractérisant les circuits du matroïde $M(G)$ associé à tout graphe signé G (donc tout graphe biorienté). Dans la suite, le terme cycle signifiera cycle élémentaire. Un cycle équilibré (resp. non équilibré) est un cycle ayant un nombre pair (resp. impair) d'arêtes négatives. Si le graphe ne possède pas de cycle impair, alors $M(G)$ est confondu avec le matroïdale usual des cycles de G.

3.3.1. THÉORÈME (Zaslavsky) [15]. — *Un ensemble d'arêtes d'un graphe signé G est un circuit de $M(G)$ si et seulement si il est,*

(i) *soit un cycle équilibré;*

(ii) *soit la réunion de deux cycles non équilibrés ayant exactement un sommet commun;*

(iii) *soit la réunion de deux cycles non équilibrés sans sommets communs et d'une chaîne qui rencontre chacun des deux cycles en exactement un sommet.*

Un *$m-$isthme* dans un graphe signé G est un circuit du matroïde $M(G)$ réduit à une arête.

Le résultat principal obtenu est alors énoncé comme suit :

3.5. THÉORÈME (1984) [8] et [9]. — *Soit $G = (V, E)$ un graphe biorienté non $m-$équilibré. Si G est sans $m-$isthme et sans arêtes parallèles de même signe, alors G admet un $q-$flot non-nul avec*

$q = 6$ *si G est 3-connexe et sans circuits de type (iii);*

$q = 18$ *si G est 4-connexe;*

$q = 30$ *si G est 3-connexe et sans triangle équilibré.*

4. Deux ou trois choses sur François.

Permettez-moi de terminer avec deux ou trois choses que je sais de François.

Durant les vingt années que j'ai eu l'honneur et le plaisir de le côtoyer et de le rencontrer de très nombreuses fois et de manière régulière grâce aux accords de coopérations successifs entre nos deux établissements, j'ai eu à vivre des moments dont la qualité et la profondeur ne m'apparaissent qu'aujourd'hui qu'il n'est plus là. Je lui dois mon introduction à la beauté de la théorie des graphes dont sa maîtrise était telle, que toute question en devenait un plaisir. Sa disponibilité et sa gentillesse ont souvent été mises à rude épreuve par mes questions; mais en avais-je la même conscience qu'aujourd'hui? Il ne m'a jamais repoussé en évoquant un travail urgent à chaque fois que j'ai eu à lui exposer une question sur laquelle j'étais bloqué. Je le vois encore, se levant de son bureau et se placer devant le tableau, impliquant souvent Charles dans nos questionnements. Je ne me souviens pas qu'une seule fois il ait eu un mot blessant ou à double sens. Son respect de la personne humaine et des idées des autres allaient très loin et, j'évoquerai ici, une petite anecdote. J'avais eu l'occasion de parler avec François de religion, en particulier sur les points particuliers de la mienne et qu'il a scrupuleusement respectés. Nous avions évoqué une fois les règles de l'héritage en Islam et je lui avais dit qu'un verset coranique, en plus de la définition précise des règles de partage, recommandait de faire assister des pauvres lors du partage d'un héritage, de leur donner leur part et de leur dire une parole de bien. Quelques mois plus tard, nous avions développé un problème d'optimisation combinatoire que nous avions nommé "Problème de l'Héritage". Dans la modélisation générale, appliquée à des cas particuliers, il était apparu que les solutions entières n'existaient pas toujours. Je lui en fis part lors d'une de nos rencontres de travail, inquiet sur ce point. Et alors, avec un gros sourire, comme il en avait seul le secret, François me répondit : "Abdelkader, ne m'as-tu pas dit que dans l'Héritage Islamique, il était recommandé de donner une part aux pauvres? Pourquoi ne pas essayer d'utiliser cette idée?" J'avoue que l'idée ne m'avait même pas effleuré l'esprit, alors que lui, amicalement, me rappelait un principe qui pourtant faisait partie de ma culture.

Cette relation avec François, qui a démarré au niveau professionnel, s'est mue en une amitié profonde, comme d'ailleurs tous les membres de l'équipe grenobloise avec qui nous avions tissé des relations personnelles et de qui nous avons reçu une aide scientifique importante et appréciable pour développer notre département à Alger.

Une autre fois, après que le résultat principal sur les $q-$flots non-nuls ait été soumis à publication, quatre referees avaient donné un accord, mais demandaient des changements non explicités. J'avais repris la démonstration en détail un week-end, et je trouvais une dernière partie qui utilisait une hypothèse qui n'était pas toujours vérifiée. Je me rendis à la tour de l'IMAG le lundi matin très tôt, cherchant vainement une démonstration correcte. François est arrivé vers 9 heures et demie ce matin, et passant devant la salle 25, me dit bonjour. Je luis fis part du problème et je revois encore aujourd'hui son geste : il n'alla pas à son bureau, enleva prestement son blouson beige, posa son cartable sur une chaise et inquiet de me voir bloqué, me dit : "Allons-y, il faut qu'on trouve une solution". Après plus d'une heure, une démonstration correcte et dont il eut l'idée, fut mise au point. Je dois dire que, encore à cet instant, je suis encore très touché de la façon dont il a dirigé mon travail de thèse.

François s'inquiétait régulièrement des conditions de travail et de vie à Alger. Nous allions souvent au restaurant ensemble lors de mes séjours à Grenoble dont il m'a fait connaître de nombreuses spécialités. Le dernier repas que nous prîmes ensemble fut en été 1996. Il était déjà malade, et dans un petit restaurant d'Uriage, dans un parc de verdure estivale, nous n'avions pas évoqué une seule fois, cette fois-ci, les mathématiques, mais pour la première fois, parlé de la vie, de la mort, de l'espoir, du courage et de l'abnégation unique que seul l'être humain peut manifester. Il a été encore une dernière fois, très optimiste, très encourageant sur ce qu'il considérait comme un grand malheur abattu sur mon pays, et son espoir de reprendre une vie normale, pour lui et pour moi, mais pour des raisons différentes, a été le dernier souvenir que je garderai de lui.

C'est en faisant appel à un mot berbère que nous utilisons souvent en Algérie que je terminerai, si vous le permettez, de parler de François, en disant : *"François? Ergaiz!!"* (François? un HOMME!!).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BERGE, Graphes, Dunod, Paris, 1983.

[2] J.A. BONDY and U.S.R. MURTY, Graph Theory with Applications, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.

[3] A. BOUCHET, Nowhere-zero integral flows on a bidirect graph, J. Combin. Theory, Ser. B, 34 (1983), 279–292.

[4] R.C. BRIGHAM, R.D. DUTTON, Generalized k−tuple Colorings of Cycles and other Graphs, J. Combin. Theory, Ser. B, 32 (1982), 90–94.

[5] F. HARARY, On the notion of balance of a signed graph, Michigan Math., J., 2 (1953–54), 143–146.

[6] F. HARARY, Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachussets, 1976.

[7] F. JAEGER, Thèse de Doctorat d'État, USMG, Grenoble, France (juin 1976).

[8] A. KHELLADI, Nowhere-Zero Integral Chains and Flows in Bidirected Graphs, J. Comb. Theory, Ser. B, 43 (1987), 95–115.

[9] A. KHELLADI, Thèse de Doctorat d'État, USTHB, Alger, Algérie, (mai 1985).

[10] L. LOVÁSZ, Kneser Conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Combin. Theory, Ser. A, 25 (1978), 319–324.

[11] P.D. SEYMOUR, Nowhere-zero 6-flows, J. Combin. Theory, Ser. B, 28 (1981), 130–131.

[12] S. STAHL, n−Tuple colorings and associated graphs, J. Combin. Theory, Ser. B, 20 (1976), 185–203.

[13] W.T. TUTTE, A Class of Abelian Groups, Can. J. Math., 8 (1952), 13–28.

[14] W.T. TUTTE, On chain-groups and the factors of graphs, In Algebraic Methods in Graph Theory (Szeged, 1978), vol. 25 of Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 793–818, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[15] T. ZASLAVSKY, Signed Graphs, Discrete Applied Math., 4 (1982), 47–74.

Abdelkader KHELLADI,
USTHB
Institut de Mathématiques
B.P. 32
16111 El Alia, Alger (Algérie).