Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 1 (1997), 139–153

SOLUTIONS CLASSIQUES GLOBALES DES ÉQUATIONS D'EULER POUR UN FLUIDE PARFAIT COMPRESSIBLE

par Denis SERRE(*)

INTRODUCTION

On considère le système des équations d'Euler pour un gaz parfait polytropique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, avec $d \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= 0, \\ \partial_t \left(\frac{1}{2}\rho |u|^2 + \rho e\right) + \operatorname{div}_x \left((\frac{1}{2}\rho |u|^2 + \rho e + p)u\right) &= 0, \end{aligned}$$

où la pression est donnée par la loi $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Comme on ne considère que les solutions classiques, il est équivalent d'écrire, au moins en dehors du vide,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x) u + \rho^{-1} \nabla_x p &= 0, \\ \partial_t e + u \cdot \nabla_x e + \rho^{-1} p \operatorname{div}_x u &= 0. \end{aligned}$$

Comme notre intérêt va vers les écoulements dont la masse totale est finie, le système n'est pas uniformément strictement hyperbolique ; il est même franchement singulier là où ρ s'annule. En utilisant l'entropie $S = \log e - (\gamma - 1) \log \rho$ et la variable $\Pi = p^{(\gamma-1)/2\gamma}$, Makino, Ukai et Kawashima [6] ont obtenu une forme symétrique hyperbolique du système et Chemin [2]

(*) Membre de l'Institut Universitaire de France.

Mots-clés : Dynamique des gaz – EDPs hyperboliques non linéaires.
Classification math. : 35L45 – 35L60 – 35L65 – 35Q35 – 76N15.

a montré que le problème de Cauchy admet une solution locale en temps, dès que les conditions initiales pour $\rho^{(\gamma-1)/2}$, u et S sont dans $H^m(\mathbb{R}^d)$ pour[(1)] $m > 1 + d/2$. Plus précisément,

$$\rho^{(\gamma-1)/2}, u, S \in \bigcap_{j=0}^{m} C^j([0,T]; H^{m-j}(\mathbb{R}^d)),$$

pour $T > 0$ qui dépend de la condition initiale.

On développe à la section 1 un outil, lié aux relations de dispersion découvertes par Chemin [2] : certaines transformations des variables (t, x, ρ, v, e) préservent *grosso modo* la structure des équations d'Euler[(2)]. Mais, surtout, elles transforment le demi-axe des temps (voire l'axe entier) en un intervalle borné. Cette remarque est exploitée à la section 3, où on obtient un théorème d'existence globale en temps de solutions classiques pour des données initiales convenables. Le résultat principal de cet article est le théorème 3.1. La section 2 est consacrée au cas, relativement simple, du gaz mono-atomique. On notera que l'hypothèse de proximité, entre u_0 et un champ linéaire $x \mapsto A_0 x$ où A_0 n'a pas de valeur propre réelle négative, n'empêche pas le gaz de se comprimer pendant un certain temps (si $d \geqslant 2$) : il est assez raréfié pour que l'interaction des molécules ne puisse compenser l'inertie.

En complément de ces résultats sur le problème de Cauchy, on donne des estimations de dispersion, dans l'esprit du travail de Chemin, pour les équations d'Euler et celles de Navier-Stokes à la section 4.

1. TRANSFORMATIONS

Soit $A_0 \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice dont le spectre $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. L'équation différentielle de Ricatti matricielle

$$\frac{dA}{dt} + A^2 = 0, \quad A(0) = A_0$$

(1) Chemin a en fait une hypothèse plus faible, où la régularité H^m est locale, mais uniformément en x.

(2) Pour un gaz mono-atomique, on construit même des transformations de Bäcklund, analogues à ce qui existe pour l'équation de Schrödinger avec une nonlinéarité $|u|^{4/d}u$.

admet une solution définie pour tout $t \geqslant 0$, donnée par $A(t) = (I_d + tA_0)^{-1}A_0$. Les valeurs propres de $A(t)$ sont les nombres

$$\lambda_k(t) = \frac{\alpha_k}{1 + t\alpha_k},$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt} \log \det A = -\mathrm{Tr}\ A$$

et $\det A(t) \sim t^{-d}$, $\mathrm{Tr}\ A \sim d/t$, quand $t \to +\infty$. On notera $\Delta := \det A$ et

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\Delta^{-2/d}(A - \frac{1}{d}(\mathrm{Tr}\ A)I_d), \\ B &= \Delta^{-2/d}A\,{}^tA. \end{aligned}$$

Les matrices A_1, B et B^{-1} sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}^+$, avec

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} A_1 &= 2\left(\frac{1}{d}(\mathrm{Tr}\ A^{-1})I_d - A^{-1}\right), \\ \lim_{t \to +\infty} B &= I_d. \end{aligned}$$

Enfin, B est symétrique définie positive.

Soit $u_A(t,x) = A(t)x$. On a donc $\partial_t u_A + (u_A \cdot \nabla_x)u_A = 0$. Étant donnée une solution classique (ρ, u, e) des équations d'Euler, on définit $v := u - u_A$, de sorte que

$$\begin{aligned} (\partial_t + u_A \cdot \nabla_x)\rho + \mathrm{div}\,_x \rho v + \rho \mathrm{Tr}\ A &= 0, \\ (\partial_t + u_A \cdot \nabla_x)v + (v \cdot \nabla_x)v + Av + \frac{1}{\rho}\nabla_x p &= 0, \\ (\partial_t + u_A \cdot \nabla_x)e + v \cdot \nabla_x e + \frac{p}{\rho}(\mathrm{div}\,_x v + \mathrm{Tr}\ A) &= 0. \end{aligned}$$

On opère le changement de coordonnées $(t,x) \mapsto (s,y) := (t, A(t)x)$. On a les formules

$$\nabla_x = {}^tA\nabla_y, \quad \mathrm{div}\,_x q = \mathrm{div}\,_y Aq, \quad \partial_s = \partial_t + u_A \cdot \nabla_x\,.$$

Posant $W = \Delta^{-2/d}Av$, $R = \Delta^{-1}\rho$, $E = \Delta^{-2/d}e$, $K = 1 - \gamma + 2/d \in [0, 2/d[$ et

$$\sigma(s) = \int_0^s \Delta(\xi)^{2/d} d\xi,$$

il vient, en dehors du vide

$$
(1)\quad \begin{aligned}
&\partial_\sigma R + \operatorname{div}{}_y RW = 0,\\
&\partial_\sigma W + (W\cdot\nabla_y)W + A_1 W + \frac{\gamma-1}{R} B\nabla_y RE = 0,\\
&\partial_\sigma E + W\cdot\nabla_y E + (\gamma-1)E\operatorname{div}{}_y W = K\, E\Delta^{-2/d}\mathrm{Tr}\, A.
\end{aligned}
$$

Le point le plus important est que le temps modifié σ parcourt un intervalle borné $[0,\sigma^*[$ si t parcourt $\mathbb{R}^+$, avec

$$\sigma^* = \int_0^{+\infty} \Delta(\xi)^{2/d} d\xi.$$

On a de plus $\sigma^* - \sigma \sim 1/s$.

Le système (1) est très proche des équations d'Euler elles-même. Il n'en diffère que par la présence de termes sources, d'ordre inférieur à la partie principale, et par celle de la matrice B devant le gradient de pression. Le terme $A_1 W$ est *a priori* sans danger puisque $\sigma \mapsto A_1$ est $\mathcal{C}^\infty$ bornée. Pour un gaz mono-atomique, K est nul. Dans les autres cas, le terme $KE\Delta^{-2/d}\mathrm{Tr}\, A$ réclame un traitement délicat, puisqu'il équivalent à $KE/(\sigma^*-\sigma)$. Enfin, la matrice B ne nous empêchera pas de symétriser le système dans le même esprit que [6].

2. CAS MONO-ATOMIQUE ($\gamma = 1 + 2/d$)

Pour l'instant, $K = 0$. Voyons d'abord le cas où A_0 est une homothétie. Alors $B \equiv I_d$ et $A_1 \equiv 0_d$. On a donc

PROPOSITION 2.1. — *Pour un gaz mono-atomique et $\alpha > 0$, le changement de variables*

$$(x,t,\rho,u,e) \mapsto \left(\frac{\alpha x}{1+t\alpha}, \frac{t\alpha^2}{1+t\alpha}, \left(t+\frac{1}{\alpha}\right)^d \rho, \frac{t\alpha+1}{\alpha}u - x, \left(\frac{t\alpha+1}{\alpha}\right)^2 e\right)$$

préserve l'ensemble des solutions des équations d'Euler et change l'intervalle de temps $[0,+\infty[$ en $[0,\alpha[$.

Cette propriété est tout à fait analogue à celle d'invariance conforme, due à J. Ginibre, pour l'équation de Schrödinger non linéaire pour l'exposant particulier $1 + 4/d$:

$$(2)\qquad i\partial_t u = \Delta u + |u|^{4/d} u.$$

Pour l'équation (2), l'invariance conforme permet de construire des solutions qui explosent en temps fini, à partir de solutions stationnaires. C'est encore possible pour l'équation d'Euler mais dans un contexte beaucoup moins intéressant puisque les solutions stationnaires des équations d'Euler dans $\mathbb{R}^d$ ont une masse infinie. Nous allons plutôt raisonner en sens inverse, pour déduire l'existence globale pour le problème de Cauchy, à partir de résultats locaux.

Utilisant le théorème de Chemin, on obtient immédiatement l'existence globale de solutions de classe H^m, $m > 1 + d/2$, pour certaines données initiales. En effet, si $X_0 = (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \alpha I_d, S_0 - \bar{S})$ est dans $H^m(\mathbb{R}^d)$, alors la donnée initiale pour le système (1) est dans $H^m(R^d)$, donc produit une solution classique pour $\sigma \in [0, T(X_0)[$; de plus,

$$\lim_{\|X_0\|_m \to 0} T(X_0) = +\infty.$$

Il s'ensuit que $T(X_0) \geqslant \alpha = \sigma^*$ si $\|X_0\|_m$ est assez petit. Cela signifie que (ρ, u, S) est une solution classique pour tout $t \geqslant 0$.

On traite de la même façon le cas d'une matrice A_0 générale. Il suffit d'appliquer la symétrisation qu'on verra à la section suivante et de remarquer que les résultats d'existence locale pour les systèmes symétriques hyperboliques restent vrais en présence de termes sources et lorsque les matrices qui interviennent sont des fonctions régulières des variables d'espace et de temps (ici, seulement du temps).

Comme les matrices A_1 et B sont prolongeables analytiquement pour $\sigma > \sigma^*$, on peut même avoir $T(X_0) > \sigma^*$ si $\|X_0\|_m$ est assez petit. Dans ce cas, on en déduit une description asymptotique lorsque $t \to +\infty$ de la solution des équations d'Euler :

$$\begin{aligned}
\rho(t,x) &= t^{-d}(R_1(x/t) + O(1/t)),\\
u(x,t) &= A(t)x + t^{-1}(W_1(x/t) + O(1/t)),\\
e(x,t) &= t^{-2}(E_1(x/t) + O(1/t)),
\end{aligned}$$

où R_1, W_1 et E_1 sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^d$ et où les restes sont uniformes par rapport à x. De plus, R_1 et E_1 sont à support compact si ρ_0 l'est, car (R_1, W_1, E_1) est la solution, à l'instant $\sigma = \sigma^*$, du problème de Cauchy pour le système hyperbolique (1) (dans lequel $K = 0$).

3. CAS GÉNÉRAL, $1 < \gamma < 1 + 2/d$

Pour établir l'existence d'une solution du système transformé (1) sur un intervalle de «temps» $[0, \sigma^*[$, on réécrit ce système sous une forme symétrique :

$$S^0(\sigma; U)\frac{\partial U}{\partial \sigma} + \sum_{\alpha=1}^{d} S^\alpha(\sigma; U)\frac{\partial U}{\partial y_\alpha} = g(\sigma; U),$$

où les matrices S^j sont symétriques, fonctions régulières de leurs arguments, S^0 étant de plus définie positive. Il est alors classique (ce résultat remonte au moins à Gårding et Leray [3] ; voir également [7]) qu'à une condition initiale dans $H^m(\mathbb{R}^d)$ avec $m > 1 + d/2$ correspond une solution unique, locale en temps, dans

$$\bigcup_{j=0}^{m} C^j([0, \sigma_\infty[; H^{m-j}(\mathbb{R}^d)).$$

Si de plus le temps maximal d'existence σ_∞ est strictement inférieur à σ^*, alors on a

$$\limsup_{\sigma \to \sigma_\infty} (\|U(\sigma)\|_{L^\infty} + \|\nabla_y U(\sigma)\|_{L^\infty}) = +\infty.$$

Il suffit donc d'établir une majoration explicite

$$\|U(\sigma)\|_{H^m} \leqslant f(\sigma), \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_\infty[,$$

où $f : [0, \sigma^*[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, pour conclure que $\sigma_\infty = \sigma^*$.

À peu de choses près, la symétrisation est celle de Makino-Ukai-Kawashima. On choisit $U = (P, W, S)$ avec

$$P := \left(RE\Delta^K\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad S := \log E - (\gamma - 1)\log R + K \log \Delta.$$

L'expression S est bien l'entropie spécifique du fluide : $S = \log e - (\gamma - 1)\log \rho$. Pour les solutions régulières, même en présence de vide, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma P + W \cdot \nabla_y P + \frac{\gamma - 1}{2} P \operatorname{div}_y W = 0, \\ (3) \qquad &\partial_\sigma W + (W \cdot \nabla_y)W + 2\gamma\Delta^{-K}e^{S/\gamma}PB\nabla_y P = -A_1 W, \\ &\partial_\sigma S + W \cdot \nabla_y S = 0. \end{aligned}$$

C'est la forme symétrique cherchée, à condition de multiplier la seconde équation par la matrice symétrique définie positive

$$S^{0W}(\sigma; S) := \frac{\gamma - 1}{4\gamma} \Delta(\sigma)^K e^{-S/\gamma} B(\sigma)^{-1}.$$

Énonçons d'abord les résultats essentiels de cet article.

LEMME 3.1. — *Soit $\gamma \in]1, 1 + 2/d]$, $m > 1 + d/2$, soit $A_0 \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est réelle négative et soit $\bar{S}$ une constante. Il existe $\eta > 0$ tel que, si*

$$\|(P(0), W(0), S(0) - \bar{S})\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \leqslant \eta,$$

alors la solution du problème de Cauchy pour (3) existe et reste régulière sur $\mathbb{R}^d \times [0, \sigma^*[$.

Autrement dit, on a $\sigma_\infty = \sigma^*$. On en déduit

THÉORÈME 3.1. — *Sous les hypothèses du lemme 3.1, il existe $\beta > 0$ tel que, si*

$$\|(\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, S_0 - \bar{S})\|_{H^m(\mathbb{R}^d)} \leqslant \beta,$$

avec $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, alors la solution classique des équations d'Euler est définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$.

Remarques. — Cet énoncé est à première vue surprenant parce que les résultats connus antérieurement expriment plutôt l'explosion en temps fini des dérivées premières de la solution :

– Sideris [9] montre l'explosion en temps fini pour un gaz parfait en dimension $d = 3$ sous des hypothèses assez générales, mais pour une densité proche d'une constante non nulle, ce qui est très différent du cas abordé ici. Dans un contexte semblable, avec des données axisymétriques, Alinhac [1] a obtenu une estimation précise du temps de vie des solutions régulières.

– Si $d = 1$ et si l'entropie initiale est constante, alors les équations d'Euler se réduisent à un système 2×2 dont les champs caractéristiques sont vraiment non linéaires. D'après Lax [4], les dérivées premières explosent en temps fini, sauf si les invariants de Riemann $w_\pm$ sont, à l'instant initial, monotones avec le «bon» sens de variation. C'est exactement ce qui arrive ici. En effet $w_\pm = u \pm c(\rho)$, où c désigne la vitesse du son. L'hypothèse sur la condition initiale assure que $w_\pm$ est proche, dans H^m et donc dans C^1, de $x \mapsto a_0 x$, où $a_0 > 0$. Ainsi $w_\pm$ est monotone croissant et aucun choc ne peut apparaître.

Au paragraphe précédent, on avait $K = 0$ et le lemme était la conséquence directe de résultats connus puisque les matrices S^0, $(S^0)^{-1}$, S^α et le champ g étaient des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornées ainsi que leurs dérivées à tous ordres. Dans le cas général, la présence du facteur Δ^K dans S^{0W}, qui tend vers zéro quand $\sigma \to \sigma^*$, nécessite un traitement particulier.

Soit $\sigma \in [0, \sigma^\infty[$ et $(X, Y, Z) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ un champ de carré intégrable. On définit une norme de (X, Y, Z) par

$$[X, Y, Z; \sigma]^2 := \int_{\mathbb{R}^d} (X^2 + Z^2 + {}^tY S^{0W}(\sigma; S(y, \sigma))Y)\, dy,$$

où (P, W, S) est la solution régulière de (3). Comme $\|S\|_\infty = \|S_0\|_\infty$, cette norme est équivalente à celle de $L^2(\mathbb{R}^d)^{d+2}$, mais cette équivalence n'est pas uniforme par rapport à σ. En fait,

$$C^{-1}[X, Y, Z; \sigma] \leqslant \|X\|_2 + \|Z\|_2 + \Delta^{K/2}\|Y\|_2 \leqslant C[X, Y, Z; \sigma],$$

où $C = C(A_0, S_0) > 0$ ne dépend pas de σ_∞ ni de $\sigma \in [0, \sigma_\infty[$.

Pour $q \in \mathbb{N}$, nous définissons

$$E_q(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| = q} [D^\alpha P(\sigma), D^\alpha W(\sigma), D^\alpha Z(\sigma); \sigma]^2, \quad F_q(\sigma) = \sum_{r=0}^{q} E_r(\sigma),$$

où

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial y_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Estimations. — Calculons la dérivée de E_q, en utilisant la convention de sommation des indices répétés :

$$\begin{aligned}\frac{dE_q}{d\sigma} &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(D^\alpha P D^\alpha \partial_\sigma P + D^\alpha S D^\alpha \partial_\sigma S + D^\alpha W \cdot S^{0W} \cdot D^\alpha \partial_\sigma W \\ &\quad + D^\alpha W \left(\frac{\partial S^{0W}}{\partial \sigma} - \frac{1}{\gamma} S^{0W} \partial_\sigma S \right) \cdot D^\alpha W \Big)\, dy \\ &=: I_P + I_S + I_W + I_\partial.\end{aligned}$$

Comme il existe $\sigma_0 \in [0, \sigma^*[$ tel que Tr $A \geqslant 0$ pour $\sigma \geqslant \sigma_0$, on majore

$$\frac{\partial S^{0W}}{\partial \sigma} = -K(\operatorname{Tr} A) S^{0W} + O(S^{0W}) \leqslant c S^{0W}$$

uniformément sur $[0,\sigma^*[$. Ainsi,

$$I_\partial \leqslant c(1+\|W\cdot\nabla S\|_\infty)E_q(\sigma) \leqslant c(1+\Delta^{-K/2}F_m)E_q.$$

Traitons les trois autres termes :

$$\begin{aligned} I_P + I_S + I_W = -\int_{\mathbb{R}^d} \Big(& D^\alpha P D^\alpha (W\cdot\nabla P + \frac{\gamma-1}{2}P\mathrm{div}\, W) \\ & + D^\alpha S D^\alpha (W\cdot\nabla S) + D^\alpha W\cdot S^{0W}\cdot D^\alpha\{(W\cdot\nabla)W \\ & + A_1 W + \frac{\gamma-1}{2}P(S^{0W})^{-1}\nabla P\}\Big)\, dy. \end{aligned}$$

Classiquement, les termes d'ordre le plus élevé, à savoir

$$\begin{aligned} & (D^\alpha P)W\cdot\nabla D^\alpha P + (D^\alpha S)W\cdot\nabla D^\alpha S \\ & +\frac{\gamma-1}{2}P((D^\alpha P)\mathrm{div}\, D^\alpha W + D^\alpha W\cdot\nabla D^\alpha P) + D^\alpha W\cdot S^{0W}\cdot(W\cdot\nabla)D^\alpha W \end{aligned}$$

sont réduits, par intégration par parties, à des termes de la forme $C(U)\nabla U$: $(D^\alpha U, D^\alpha U)$, bilinéaires en $D^\alpha U$. Voyons cela en détail. Tout d'abord,

$$I_S = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{\frac{1}{2}|D^\alpha S|^2 \mathrm{div}\, W + D^\alpha S\cdot(W\cdot\nabla D^\alpha S - D^\alpha(W\cdot\nabla S))\right\} dy.$$

Les inégalités de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg nous donnent la majoration suivante (voir le lemme 3.6.2 de [8]) :

$$I_S \leqslant c\|D^q S\|_2(\|D^q S\|_2\|\nabla W\|_\infty + \|D^q W\|_2\|\nabla S\|_\infty) \leqslant c\Delta^{-K/2}E_q F_m^{1/2}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} I_P = & \int_{\mathbb{R}^d} \left\{\frac{1}{2}|D^\alpha P|^2 \mathrm{div}\, W + D^\alpha P\cdot(W\cdot\nabla D^\alpha P - D^\alpha(W\cdot\nabla P))\right\} dy \\ & + \frac{\gamma-1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha P\{\nabla P\cdot D^\alpha W + P\mathrm{div}\, D^\alpha W - D^\alpha(P\mathrm{div}\, W)\}\, dy \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha W\cdot\big(P\nabla D^\alpha P - S^{0W}\cdot D^\alpha(P(S^{0W})^{-1}\nabla P)\big)\, dy. \end{aligned}$$

Les deux premières lignes sont traitées comme on l'a fait pour I_S. Dans le dernier terme, qui ne contient que des dérivées d'ordre inférieur ou égal à q, les puissances de Δ dans S^{0W} et son inverse se neutralisent. On obtient donc de même

$$\begin{aligned} I_P & \leqslant c\|D^q P\|_2(\|D^q P\|_2\|\nabla W\|_\infty + \|D^q W\|_2\|\nabla P\|_\infty) \\ & \quad + c\|D^q W\|_2(\|D^q P\|_2 + \|D^q S\|_2)(1+\|P\|_\infty + \|\nabla P\|_\infty + \|\nabla S\|_\infty)^{q+1} \\ & \leqslant c\Delta^{-K/2}E_q(1+F_m)^{\frac{q+1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin

$$I_W = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha W \cdot S^{0W} \cdot \{(W\cdot\nabla)D^\alpha W - D^\alpha((W\cdot\nabla)W)\}\,dy$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{({}^tD^\alpha W\cdot S^{0W}\cdot D^\alpha W)\mathrm{div}\, W - \frac{W\cdot\nabla S}{\gamma}\,{}^tD^\alpha W\cdot S^{0W}.D^\alpha W\right\}dy$$
$$+\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha W\cdot S^{0W}\cdot A_1 W\,dy.$$

Des considérations analogues fournissent la majoration

$$\begin{aligned} I_W &\leqslant c\Delta^K\|D^qW\|_2^2\|\nabla W\|_\infty + c\Delta^K\|D^qW\|_2\|W\|_2 \\ &\leqslant c\Delta^{-K/2}E_qF_m^{1/2} + c\sqrt{E_qE_0}. \end{aligned}$$

Rassemblant les quatre majorations, nous obtenons

$$E_q' \leqslant cE_q\left(1+\Delta^{-K/2}(F_m + F_m^{\frac{q+1}{2}})\right) + c\sqrt{E_qE_0},$$

d'où

$$F_m' \leqslant cF_m\left(1+\Delta^{-K/2}(F_m^{3/2} + F_m^{\frac{q+3}{2}})\right). \tag{4}$$

Conclusion. Soit $G_m(\sigma) = F_m(\sigma)\exp(-c\sigma)$. Alors

$$G_m' \leqslant c_1\left(G_m^{3/2} + G_m^{\frac{q+3}{2}}\right)\Delta^{-K/2},$$

où $c_1 = c_1(c,\sigma^*)$. Posons

$$H(G) := \int_1^G \frac{dg}{g^{3/2} + g^{\frac{q+3}{2}}},$$

de sorte que $H(0) = -\infty$. L'inégalité ci-dessus montre que, sur l'intervalle d'existence de la solution, on a

$$H(G_m(\sigma)) \leqslant H(G_m(0)) + c_1\int_0^\sigma \Delta^{-K/2}d\xi.$$

Cependant, $\Delta(\sigma) \sim (\sigma^* - \sigma)^d$ lorsque $\sigma \to \sigma^*$. Comme $\gamma > 1$, on a aussi $K < 2/d$. Finalement, $\Delta^{-K/2} \sim (\sigma^* - \sigma)^{-Kd/2}$, où l'exposant est strictement supérieur à -1 : l'intégrale

$$\int_0^{\sigma^*} \Delta^{-K/2}d\xi$$

converge. Ainsi

$$H(G_m(\sigma)) \leqslant H(G_m(0)) + C_2(A_0, \|S_0\|_\infty). \tag{4}$$

Lorsque $\|(P(0), W(0), S(0)-\bar{S})\|_{H^m}$ est assez petit, on a $H(G_m(0))+C_2 < H(+\infty)$ et l'inégalité (5) fournit une majoration explicite de $G_m(\sigma)$, donc de $\|(P(\sigma), W(\sigma), S(\sigma)-\bar{S})\|_{H^m}$. Si $\sigma_\infty < \sigma^*$, cette majoration montre que (P, W, S) est borné dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times [0, \sigma_\infty[)$, ce qui contredit la maximalité de σ_∞. Donc $\sigma_\infty = \sigma^*$ et le lemme est démontré.

4. ESTIMATIONS DE DISPERSION

4.1. Fluide parfait.

On choisit ici $A(t) = t^{-1}I_d$, qui est bien solution de $A' + A^2 = 0$. Le fait que $A(0)$ ne soit pas défini n'a pas d'importance pour ce qui suit. On a $\Delta = t^{-d}$, $B = I_d$ et $A_1 = 0_d$. Puis $W = tu - x$, $R = t^d\rho$ et $E = t^2 e$. Combinant les équations de (1), il vient

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma R + \operatorname{div}{}_y RW &= 0,\\
\partial_\sigma(RW) + \operatorname{div}{}_y(RW\otimes W) + (\gamma-1)\nabla_y(RE) &= 0,\\
\partial_\sigma\left(\frac{1}{2}R|W|^2 + RE\right) + \operatorname{div}{}_y\left((\frac{1}{2}R|W|^2 + \gamma RE)W\right) &= dKtRE.
\end{aligned}$$

Comme la transformation $(t, x, \rho, u, e) \mapsto (\sigma, y, R, W, E)$ est linéaire par rapport aux variables dépendantes et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport aux variables indépendantes, on constate que le système ci-dessus est satisfait par (R, W, E), même lorsque (ρ, u, e) est une solution faible. En effet, les équations ci-dessus sont des combinaisons linéaires, à coefficients réguliers, des équations d'Euler. De plus, comme la transformation $(t, x) \mapsto (\sigma, y)$ préserve le sens du temps, (R, W, E) satisfait la condition d'entropie lorsque c'est le cas pour (ρ, u, e).

Considérons une masse finie de fluide, concentrée dans un domaine compact et qui s'étale dans $\mathbb{R}^d$ par exemple. Intégrant la dernière équation, il vient

$$\frac{d}{d\sigma}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}R|W|^2 + RE\right)dy = dKt\int_{\mathbb{R}^d} RE\,dy,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\rho|tu-x|^2 + t^2\rho e\right)dx = dKt\int_{\mathbb{R}^d}\rho e\,dx. \tag{6}$$

Commençons par donner une démonstration plus courte d'une majoration de l'énergie interne, due à Chemin [2]. Notons

$$I(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}\rho|tu - x|^2 + t^2 \rho e \right) dx.$$

De (6), on tire

$$\frac{d}{dt}(t^{-dK} I) + \frac{K}{2} t^{-1-dK} \int_{\mathbb{R}^d} \rho|tu - x|^2 dx = 0.$$

Cas $\gamma \in]1, 1 + 2/d]$**.**

On en déduit $I(t) \leqslant Ct^{dK}$, qui contient la majoration anoncée :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho e \, dx \leqslant Ct^{dK-2},$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho|tu - x|^2 dx \leqslant Ct^{dK},$$

où l'exposant $dK - 2$ est strictement négatif. Pour un gaz mono-atomique, il s'agit d'une égalité, mais si $\gamma < 1 + 2/d$, on obtient un renseignement complémentaire :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{R}^d} t^{-dK} \rho|tu - x|^2 dx < +\infty.$$

Cas $\gamma > 1 + 2/d$**.**

On a simplement

$$I'(t) + |K| t \int_{\mathbb{R}^d} \rho e \, dx = 0,$$

de sorte que I est borné :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho e \, dx \leqslant \frac{1}{2t^2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)|x|^2 dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho|tu - x|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)|x|^2 dx.$$

On obtient de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{R}^d} t^2 \rho e \, dx \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)|x|^2 dx.$$

Remarque. — Dans chaque cas, on obtient qu'une certaine fonction bornée appartient à $L^1(t^{-1}dt)$, mais la quantité dont il s'agit dépend de la position de γ par rapport à $1 + 2/d$. Il semble qu'on ait, quand $t \to +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho \left| u - \frac{x}{t} \right|^2 dx << \int_{\mathbb{R}^d} \rho e \, dx$$

lorsque $\gamma < 1 + 2/d$. L'analyse faite ci-dessus montre que le théorème 2 de Chemin [2] ne peut pas être étendu au cas non physique $\gamma > 1 + 2/d$; on s'attend alors à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho e \, dx << \int_{\mathbb{R}^d} \rho \left| u - \frac{x}{t} \right|^2 dx.$$

4.2. Fluide visqueux calorifère

Nous prenons en compte maintenant la viscosité du fluide ainsi que la conduction de la chaleur. Les équations d'Euler sont complétées ainsi :

$$\begin{aligned} \rho_t + \text{div } \rho u &= 0, \\ (\rho u)_t + \text{div } (\rho u \otimes u) + \nabla p &= \text{Div}\, T, \\ \left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e\right)_t + \text{div } \left((\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e + p)u\right) &= \text{div } (Tu) + \text{div } q. \end{aligned}$$

Le tenseur de viscosité est donné par la loi de Newton

$$T_{ij} = \alpha(\rho)(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \beta(\rho)(\text{div } u)\delta_i^j.$$

Le but est à nouveau d'établir des majorations du type «inégalités de dispersion». Le calcul habituel donne le bilan suivant :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}\rho|tu - x|^2 + t^2 \rho e\right) dx = t \int_{\mathbb{R}^d} (2\rho e - dp + \text{Tr } T) \, dx.$$

Introduisons une fonction $\rho \mapsto g$, satisfaisant $\rho g' - g = 2\alpha + \beta$. On a alors, pour une solution classique,

$$\text{Tr } T = (2\alpha + \beta)\text{div } u = -g(\rho)_t - \text{div } (g(\rho)u)$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \text{Tr } T \, dx = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} g(\rho) \, dx. \tag{7}$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\rho|tu-x|^2+t^2\rho e+tg(\rho)\right)dx=\int_{\mathbb{R}^d}(t(2\rho e-dp)+g(\rho))\,dx.$$

Cas $p=(\gamma-1)\rho e$, $2\alpha+\beta=C\rho^\delta$, avec $\gamma\leqslant 1+2/d$, et $\delta>1$.

On a alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\rho|tu-x|^2+t^2\rho e+ct\rho^\delta\right)dx=\int_{\mathbb{R}^d}(dKt\rho e+c\rho^\delta)\,dx.$$

Notons

$$\mathcal{E}(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\rho|tu-x|^2+t^2\rho e+ct\rho^\delta\right)dx$$

et $k:=\max(dK,1)$. Il vient

$$(t^{-k}\mathcal{E})'+t^{-1-k}\int_{\mathbb{R}^d}((k-dK)t^2\rho e+(k-1)ct\rho^\delta+\frac{k}{2}\rho|tu-x|^2)\,dx=0.$$

On en déduit d'abord

$$\int_{\mathbb{R}^d}\rho e\,dx\leqslant Ct^{k-2},\qquad \int_{\mathbb{R}^d}\rho^\delta dx\leqslant Ct^{k-1},\qquad \int_{\mathbb{R}^d}\rho\left|u-\frac{x}{t}\right|^2dx\leqslant Ct^{k-2},$$

ainsi que

$$\int^{+\infty}\frac{dt}{t^{k+1}}\int_{\mathbb{R}^d}\rho|tu-x|^2dx<+\infty.$$

Enfin, si $dK<1$ (c'est-à-dire $\gamma>1+1/d$), on a

$$\int^{+\infty}dt\int_{\mathbb{R}^d}\rho e\,dx<+\infty,$$

tandis que si $dK>1$, il vient

$$\int^{+\infty}\frac{dt}{t^{dK}}\int_{\mathbb{R}^d}\rho^\delta dx<+\infty.$$

Remarque. — On peut se demander si le calcul qui mène à la formule (7) reste correct pour une solution faible, puisque c'est une combinaison non-linéaire des équations du mouvement. Cependant, la viscosité a pour effet d'empêcher le développement d'ondes de choc, ne laissant subsister que des «discontinuités de contact». Le calcul est donc justifié pour une solution régulière par morceaux. Il l'est aussi sans doute pour les écoulements isentropiques construit par P.-L. Lions [5], car sa démonstration de la stabilité est basée sur des identités telles que (7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux, Inventiones Mathematicae, vol 111 (1993), 627-678.

[2] J.-Y. CHEMIN, Dynamique des gaz à masse totale finie, Asymptotic Analysis, vol 3 (1990), 215-220.

[3] L. GÅRDING, Problèmes de Cauchy pour les systèmes quasi-linéaires d'ordre un strictement hyperboliques, in Les équations aux dérivées partielles, Colloques internationaux du CNRS, vol 117, 33-40, Paris 1963.

[4] P. D. LAX, Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations, J. Math. Phys., vol 5 (1964), 611-613.

[5] P.-L. LIONS, Existence globale de solutions pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol 316 (1993), 1335-1340 et : Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol 317 (1993), 115-120.

[6] T. MAKINO, S. UKAI et S. KAWASHIMA, Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible, Japan J. Appl. Math., vol 3 (1986), 249-257.

[7] A. MAJDA, Compressible fluid flows and systems of conservation laws in several space variables, Appl. Math. Sci. Ser., vol 53. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] D. SERRE, Systèmes de lois de conservation, Diderot, Paris, 1996.

[9] T. SIDERIS, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, Commun. Math. Phys., vol 101 (1985), 475-485.

Manuscrit reçu le 8 février 1996,
accepté le 14 juillet 1996.

Denis SERRE,
École Normale Supérieure de Lyon
(CNRS UMR #128)
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).