

ÉDOUARD LEBEAU

**Applications harmoniques entre graphes finis  
et un théorème de superrigidité**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 46, n° 5 (1996), p. 1183-1203

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1996\\_\\_46\\_5\\_1183\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_5_1183_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# APPLICATIONS HARMONIQUES ENTRE GRAPHES FINIS ET UN THÉORÈME DE SUPERRIGIDITÉ

par Édouard LEBEAU

---

## INTRODUCTION

Un théorème de J. Eells et J. Sampson affirme [ES] que toute application continue entre deux variétés riemanniennes compactes  $M$  et  $M'$ , avec  $M'$  à courbure sectionnelle négative ou nulle, est homotope à une application harmonique qui minimise l'énergie dans sa classe d'homotopie. Sous les mêmes hypothèses, P. Hartman a montré de plus [Har] qu'il y a unicité de l'application harmonique minimisante à transport parallèle près.

Dans [GS], M. Gromov et R. Schoen ont obtenu un résultat similaire d'existence et d'unicité d'application harmonique minimisante d'une variété riemannienne à valeurs dans des espaces singuliers, tels que des immeubles de Bruhat-Tits à courbure négative ou nulle.

Dans la première partie de cet article, nous effectuons une étude semblable pour les applications harmoniques minimisantes, dans le cas où le but et la source sont des graphes finis. Nous obtenons alors les résultats suivants.

**THÉORÈME 1.** — *Étant donnés deux graphes métriques finis  $G$  et  $G'$ , toute application continue de  $G$  dans  $G'$  est homotope à une application affine qui minimise l'énergie dans sa classe d'homotopie.*

**THÉORÈME 2.** — *Sous les mêmes hypothèses, on a de plus unicité de l'application harmonique minimisante, à transport parallèle près.*

---

*Mots-clés* : Applications harmoniques – Graphes – Arbres – Superrigidité – Commensurateurs.

*Classification math.* : 05C30 – 20E08 – 58E20.

Une *application affine* est une application dont la vitesse est constante sur chaque arête. Son *énergie* est alors la somme sur les arêtes des carrés des vitesses (éventuellement pondérées par des masses).

Physiquement, une application harmonique minimisante peut s'interpréter ainsi : le graphe  $G$  étant réalisé dans une matière élastique, le graphe  $G'$  est un circuit rigide sur lequel on va poser l'élastique  $G$  selon une certaine classe d'homotopie. Une fois posé, l'élastique  $G$  va coulisser le long des parois du circuit  $G'$ , jusqu'à atteindre une position d'équilibre. Cette position d'équilibre est une application minimisante.

Pour illustrer l'analogie du transport parallèle dans le cas des graphes, étudions quelques exemples.

*Exemple 1.* — Si  $G = G'$  est un graphe cyclique de longueur  $\ell$ , c'est-à-dire isométrique au cercle  $\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ , alors, dans la classe d'homotopie des applications de degré  $n$ , les applications harmoniques minimisantes sont les applications de la forme  $[x] \mapsto [nx + \alpha]$ . Il suffit pour s'en convaincre de passer aux revêtements universels, puis de remarquer que les applications harmoniques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  sont les applications affines. Le coefficient directeur est alors imposé par la classe d'homotopie. Ici, le transport parallèle est une rotation (les applications harmoniques sont les mêmes que lorsque l'on considère le cercle comme une variété riemannienne à courbure négative ou nulle).

*Exemple 2.* — Supposons que  $G$  soit un bouquet de deux cercles, avec un unique sommet  $x_0$ , et deux arêtes  $a$  et  $b$ , que nous prendrons comme générateurs du groupe fondamental de  $(G, x_0)$ . Supposons que  $G'$  soit un graphe à deux sommets  $y$  et  $z$ , reliés par trois arêtes  $A$ ,  $B$  et  $C$ , orientées de  $y$  vers  $z$ . Le groupe fondamental de  $(G', y)$  est engendré par  $AC^{-1}$  et  $BC^{-1}$ . Considérons la classe d'homotopie d'applications de  $G$  dans  $G'$  « qui ressemblent à l'identité », *i.e.* celle qui envoie  $a$  sur  $AC^{-1}$  et  $b$  sur  $BC^{-1}$  (Fig. 1). Alors, les applications harmoniques minimisantes s'obtiennent en choisissant l'image  $u(x_0)$  de  $x_0$  arbitrairement sur le segment  $C$ , puis en envoyant affinement les lacets  $a$  et  $b$  en  $x_0$  sur les lacets correspondants en  $u(x_0)$ . Ici, le transport parallèle est la translation le long du segment  $C$ .

On montre que, dans la plupart des cas, le transport parallèle se réduit précisément à une translation le long d'un sous-intervalle de  $G'$ .

Nous montrerons (proposition 1.10) que les applications harmoniques ont un bon comportement vis-à-vis des revêtements finis à la source.

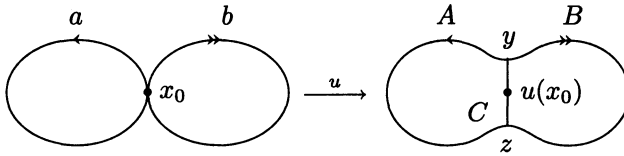


Figure 1. Transport parallèle = translation le long d'un segment

L'objet de la deuxième partie est d'utiliser les résultats d'existence et d'unicité de la première partie afin d'obtenir une nouvelle démonstration du fait suivant.

**THÉORÈME DE SUPERRIGIDITÉ** (M. Burger et S. Mozes, [BM]). — Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres localement finis. Soient  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact de  $\text{Aut}(T)$  et  $\text{Comm}(\Gamma)$  son commensurateur. Si  $\rho : \text{Comm}(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(T')$  est une action minimale de  $\text{Comm}(\Gamma)$  sur  $T'$  telle que  $\rho(\Gamma)$  soit non élémentaire, alors,  $\rho$  admet un prolongement continu à tout le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(T)$  :

$$\bar{\rho} : \text{Aut}(T) \longrightarrow \text{Aut}(T').$$

Le commensurateur de  $\Gamma$  dans  $\text{Aut}(T)$  est défini par

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{c \in \text{Aut}(T) ; c\Gamma c^{-1} \cap \Gamma \text{ est d'indice fini dans } \Gamma \text{ et } c\Gamma c^{-1}\}.$$

C'est un sous-groupe dense de  $\text{Aut}(T)$  (cf. [Liu]) qui, à conjugaison près, ne dépend pas de  $\Gamma$  (cf. [BK]).

L'action  $\rho$  est dite *minimale* si  $T'$  est le seul sous-arbre non vide de  $T'$  globalement invariant par l'action de  $\rho(\text{Comm}(\Gamma))$ .

Le groupe  $\rho(\Gamma)$  est *non élémentaire* s'il n'a pas de point fixe global dans  $\bar{T}' = T' \cup \partial T'$ , la compactification de l'arbre  $T'$  par l'ensemble de ses bouts.

Ce théorème de superrigidité a d'abord été démontré par A. Lubotzky, S. Mozes et R. Zimmer dans le cas où  $T$  et  $T'$  sont des arbres réguliers (cf. [LMZ]), puis par M. Burger et S. Mozes (cf. [BM]) dans le cadre plus général des espaces  $\text{CAT}(-1)$  propres, avant d'être généralisé aux espaces  $\text{CAT}(-1)$  non propres par Y. Gao dans [Gao].

*Stratégie de la preuve.* — L'idée est d'interpréter  $\rho$  comme une classe d'homotopie d'applications entre les graphes  $T/\Gamma$  et  $T'/\rho(\Gamma)$ , puis de choisir une application harmonique minimisante  $u$  dans cette classe d'homotopie.

On relève  $u$  en une application  $\rho|_{\Gamma}$ -équivariante  $\tilde{u} : T \rightarrow T'$ . Enfin, le résultat de stabilité pour les revêtements finis à la source et le théorème 2 d'unicité permettent de montrer que  $\tilde{u}$  est  $\rho$ -équivariante, c'est-à-dire que

$$\tilde{u}(c \cdot \tilde{x}) = \rho(c) \cdot \tilde{u}(\tilde{x}), \quad \text{pour tous } c \in \text{Comm}(\Gamma), \tilde{x} \in T.$$

Cette formule permet alors de définir le prolongement  $\bar{\rho}$  comme le morphisme qui associe à un élément  $\lambda$  de  $\text{Aut}(T)$  l'automorphisme de  $T'$  qui envoie  $\tilde{u}(\tilde{x})$  sur  $\tilde{u}(\lambda \cdot \tilde{x})$  pour tout  $\tilde{x}$  de  $T$ .

*Remarque.* — Il existe de nombreux théorèmes de rigidité ou de super-rigidité dont une démonstration utilise de façon cruciale des applications harmoniques. Le lecteur intéressé pourra consulter les survols [GP] et [Pan]. Par ailleurs, une étude variationnelle des applications d'un graphe dans un graphe a été menée par J. Los dans [Los]. Dans un exposé en 1993, G.A. Margulis a lancé une approche par les applications harmoniques entre espaces singuliers pour obtenir des théorèmes de superrigidité (voir [Mar]). Ces idées et celles de [GS] sont à la base du présent travail.

L'auteur tient à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour son aide constante et généreuse, son inspiration stimulante et son enthousiasme communicatif.

## 1. APPLICATIONS HARMONIQUES MINIMISANTES

### 1.1. Existence et unicité.

Comme nous le rappelons dans l'introduction, les fonctions harmoniques sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions affines. Qui plus est, une fonction affine  $v$  sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  minimise la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \int_a^b u'(s)^2 ds$$

parmi les applications lipschitziennes  $u$  qui vérifient  $u(a) = v(a)$  et  $u(b) = v(b)$ . C'est l'unique application harmonique minimisante avec ces « conditions aux bords ».

Soit  $G$  un graphe métrique fini (boucles et arêtes multiples sont autorisées). Les graphes seront tous supposés *connexes*. La valence d'un point  $x$  du graphe  $G$  est le cardinal d'une petite sphère centrée en ce point

(ce cardinal ne dépend pas du rayon dès que celui-ci est assez petit). On appelle *sommet* de  $G$  tout point de  $G$  dont la valence vaut au moins trois. L'ensemble des sommets de  $G$  sera noté  $G^0$ . On appelle *point terminal* de  $G$  tout point de valence un. Un graphe ne possédant pas de point terminal est appelé *graphe minimal*. Le fait suivant est bien connu.

PROPOSITION 1.1. — *Tout graphe se rétracte sur un unique sous-graphe minimal.*  $\square$

Remarquons qu'après cet «élagage», certains sommets peuvent devenir des points de valence deux. Ils ne font alors plus partie de l'ensemble des sommets.

Une *arête* (non orientée) de  $G$  est l'adhérence (dans  $G$ ) d'une composante connexe de  $G \setminus G^0$ . La longueur d'une arête  $e$  sera notée  $\ell(e)$ . L'ensemble des arêtes de  $G$  sera noté  $G^1$ . Une application affine de  $G$  dans  $G'$  sera alors une application qui, aux revêtements universels, se lit sur chaque arête de l'arbre  $\tilde{G}$  comme une application affine d'un segment dans une droite de l'arbre  $\tilde{G}'$ .

DÉFINITION. — *Une application continue  $u : G \rightarrow G'$  est affine si, sur chaque arête  $e$  de  $G$ , de longueur  $\ell$ , la restriction de  $u$  à  $e$  est soit constante, soit localement injective, avec la condition supplémentaire dans ce cas que,  $\alpha : [0, \ell] \rightarrow G$  désignant le paramétrage par longueur d'arc de  $e$  et  $\alpha' : [0, \ell'] \rightarrow G'$  celui de  $u(e)$ , on a*

$$\forall t \in [0, \ell], \quad u(\alpha(t)) = \alpha' \left( \frac{\ell'}{\ell} t \right).$$

Autrement dit, l'arête  $e$  est envoyée dans  $G'$  sur un chemin parcouru à vitesse constante. La vitesse en question vaut  $\ell'/\ell$  et sera notée  $u'(e)$ . Dans le cas où la restriction de  $u$  à  $e$  est constante, la vitesse vaut  $u'(e) = 0$ . L'ensemble des applications affines de  $G$  dans  $G'$  sera noté  $\text{Aff}(G, G')$ .

PROPOSITION 1.2. — *Les classes d'homotopie (libre ou relative) dans  $\text{Aff}(G, G')$  sont des parties fermées de l'espace  $\mathcal{C}(G, G')$  des applications continues de  $G$  dans  $G'$ , muni de la topologie de la convergence uniforme. De plus, pour toute arête  $e$  de  $G$ , l'application  $u \mapsto u'(e)$  est continue.*

Avant de démontrer cette proposition, nous introduisons une notation qui sera très utile dans l'ensemble de l'article.

NOTATION. — Si  $x$  et  $y$  sont deux points d'un arbre métrique  $T$ , on note  $(1-t)x + ty$  le barycentre des points  $x$  et  $y$  pondérés par les poids  $t$  et  $(1-t)$ , où  $t \in [0, 1]$ . Plus précisément, c'est l'unique point du segment  $[x, y]$  qui soit à distance  $td(x, y)$  de  $x$ .

Cette notation permet de reformuler ainsi la définition d'une application affine.

DÉFINITION. — Une application  $u : G \rightarrow G'$  est affine si et seulement si, pour un relevé (ou de manière équivalente pour tout relevé)  $\tilde{u} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$  aux revêtements universels, pour toute arête relevée  $\tilde{e} = [\tilde{x}, \tilde{y}]$  dans  $\tilde{G}$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\tilde{u}((1-t)\tilde{x} + t\tilde{y}) = (1-t)\tilde{u}(\tilde{x}) + t\tilde{u}(\tilde{y}).$$

Choix des relevés. — Soit  $\mathcal{C}$  une classe d'homotopie libre dans  $\text{Aff}(G, G')$ . On se donne dans  $\mathcal{C}$  un élément de référence

$$f : (G, x_0) \longrightarrow (G', x'_0)$$

où  $x'_0 = f(x_0)$ . On choisit arbitrairement un relevé  $\tilde{f} : (\tilde{G}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{G}', \tilde{x}'_0)$ . L'application  $\tilde{f}$  est alors  $f_*$ -équivariante, où  $f_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G', x'_0)$  est le morphisme induit par  $f$  entre les groupes d'automorphismes des revêtements universels.

Pour toute application  $u \in \mathcal{C}$  et toute homotopie  $h_t : G \rightarrow G'$ ,  $t \in [0, 1]$  avec  $h_0 = f$  et  $h_1 = u$ , on relève l'homotopie  $h_t$  en une homotopie  $f_*$ -équivariante  $\tilde{h}_t$  avec  $\tilde{h}_0 = \tilde{f}$ . Alors,  $\tilde{h}_1$  est un relevé de  $u$  qui ne dépend pas de l'homotopie  $h_t$  choisie, que l'on notera donc  $\tilde{u}$ . Maintenant, si  $u_0$  et  $u_1$  sont deux éléments de  $\mathcal{C}$ , on construit une homotopie « canonique » entre  $u_0$  et  $u_1$  de la façon suivante. Considérons les relevés  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{u}_1$ , et posons :

$$\tilde{u}_t = (1-t)\tilde{u}_0 + t\tilde{u}_1.$$

Cette formule définit une homotopie  $f_*$ -équivariante entre  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{u}_1$ , qui passe donc au quotient en une homotopie  $u_t$  de  $u_0$  à  $u_1$ , que nous appellerons l'homotopie géodésique entre  $u_0$  et  $u_1$ . Notons que chaque  $u_t$  est bien un élément de  $\mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une classe d'homotopie relative aux points bases  $x_0$  de  $G$  et  $x'_0$  de  $G'$ , on effectue la même construction en prenant pour  $h_t$  une homotopie relative, qui se relève naturellement en une homotopie relative. On obtient de nouveau une homotopie relative  $u_t$ .

*Preuve.* — Nous donnons ici une démonstration dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une classe d'homotopie libre. Celle-ci s'adapte aisément au cas d'une classe d'homotopie relative, car l'ensemble des applications continues de  $G$  dans  $G'$  vérifiant une condition du type  $v(x_0) = x'_0$  est fermé dans  $\mathcal{C}(G, G')$ .

Soit  $u$  la limite dans  $\mathcal{C}(G, G')$  d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications affines dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ . Comme les classes d'homotopie de  $\mathcal{C}(G, G')$  sont fermées,  $u$  est homotope aux  $u_n$  dans  $\mathcal{C}(G, G')$ . Considérons  $\tilde{u}_n$  et  $\tilde{u}$  les relevés de  $u_n$  et  $u$  aux revêtements universels. Alors,  $\tilde{u}_n$  converge vers  $\tilde{u}$  uniformément sur les compacts. Par passage à la limite,  $\tilde{u}$  vérifie bien le critère barycentrique qui fait de  $u$  une application affine et  $u$  appartient à  $\mathcal{C}$ . De même, sur chaque arête  $e$  du graphe  $G$ ,  $u'(e)$  est bien la limite de  $u'_n(e)$ .  $\square$

L'énergie d'une application affine  $u : G \rightarrow G'$  est définie par la formule ci-dessous, où  $\ell(e)$  désigne la longueur de l'arête  $e$ . On notera que c'est une fonction continue de  $u$ .

$$E(u) = \sum_{e \in G^1} \ell(e) u'(e)^2.$$

On va chercher à résoudre des *problèmes de Dirichlet* : dans une classe d'homotopie (libre ou relative à un ensemble fini  $S$  de conditions initiales) de  $\text{Aff}(G, G')$ , trouver les applications d'énergie minimale. Une solution à ce problème est appelée *application harmonique minimisante*.

*Remarque.* — Quand le problème de Dirichlet est relatif à des conditions initiales de la forme  $u(x_i) = x'_i$ , on ajoutera les  $x_i$  à l'ensemble des sommets, même si ces points ne sont que de valence deux, et l'on modifiera l'ensemble des arêtes en conséquence. En effet, l'image de  $x_i$  étant fixée, il est envisageable que la vitesse de  $u$  ne soit pas la même de part et d'autre de  $x_i$  sur l'arête qui le contient.

*Exemple 0.* — Dans la classe d'homotopie des fonctions constantes, si l'ensemble  $S$  des conditions initiales est vide, alors, les applications harmoniques minimisantes sont exactement les applications constantes.

*Exemple 1.* — Si  $G$  est un graphe minimal, tout plongement isométrique  $i : G \rightarrow G'$  est une application harmonique minimisante dans sa classe d'homotopie. C'est même la seule, dès que le groupe libre  $\pi_1(G)$  est de rang au moins deux.

*Preuve.* — Soit  $u$  une application affine homotope à  $i$ . Comme  $G$  est minimal,  $u(G)$  contient le graphe  $i(G)$ . En effet, relevons  $u$  et  $i$  en  $\tilde{u}$  et



$\tilde{i}$  comme précédemment. Comme  $G$  est minimal,  $\tilde{i}(\tilde{G})$  l'est également. Ce sous-arbre de  $\tilde{G}'$  est alors l'enveloppe convexe dans  $\tilde{G}'$  de l'orbite d'un point quelconque de la forme  $\tilde{i}(\tilde{x})$  sous l'action du groupe  $i_*(\pi(G, x_0))$ . Comme  $u$  est homotope à  $i$ , l'arbre  $\tilde{u}(\tilde{G})$  contient nécessairement un point de la forme  $\tilde{i}(\tilde{x})$ , donc son orbite, et l'enveloppe convexe de son orbite, c'est-à-dire  $\tilde{i}(\tilde{G})$ . Par passage au quotient,  $u(G)$  contient  $i(G)$ . On en déduit que la quantité

$$L = \sum_{e \in G^1} \text{long}(u(e))$$

vérifie l'inégalité

$$L \geq \sum_{e \in G^1} \ell(e).$$

Fixons  $L$ . Appliquons la méthode des extrema liés à l'énergie, fonction des variables  $\text{long}(u(e))$ , liées par la condition  $L = \sum_{e \in G^1} \text{long}(u(e))$ . L'énergie s'écrit

$$E(u) = \sum_{e \in G^1} \frac{\text{long}(u(e))^2}{\ell(e)}.$$

La fonction des variables  $\text{long}(u(e))$  est minimale quand pour toute arête  $e$ ,

$$\text{long}(u(e)) = \ell(e) \frac{L}{\sum_{e \in G^1} \ell(e)}.$$

En particulier,  $\text{long}(u(e)) \geq \ell(e) = \text{long}(i(e))$  et  $E(u) \geq E(i)$ , donc  $i$  est bien minimisante. L'unicité sera démontrée plus loin (corollaire 1.6).  $\square$

*Exemple 2.* — Un revêtement connexe d'un graphe minimal est minimisant dans sa classe d'homotopie (ce résultat sera démontré dans la section 1.2).

**THÉORÈME 1.** — *Étant donnés deux graphes métriques finis  $G$  et  $G'$ , toute application continue de  $G$  dans  $G'$  est homotope à une application affine qui minimise l'énergie dans sa classe d'homotopie.*

*Preuve.* — Remarquons tout d'abord que toute application continue  $f$  de  $G$  dans  $G'$  est homotope à une application affine  $v$  (relativement à  $S$  s'il le faut, en se souvenant qu'alors,  $S$  est ajouté à l'ensemble des sommets). Pour construire  $v$ , relevons  $f$  en  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ . Pour chaque relevé  $\tilde{x}$  d'un

sommet  $x \in G_0 \cup S$ , on pose  $\tilde{v}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$ , puis on prolonge  $\tilde{v}$  de manière affine sur chaque arête. Par construction, l'homotopie géodésique entre  $\tilde{f}$  et  $\tilde{v}$  passe au quotient. On obtient ainsi une application affine  $v$  de  $G$  dans  $G'$  homotope à  $f$ .

Considérons maintenant une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\text{Aff}(G, G')$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(u_n) = \inf \{ E(v) ; v \in \mathcal{C} \}.$$

Une telle suite sera appelée *suite minimisante*. La suite  $E(u_n)$  est bornée, donc l'ensemble  $\{u'_n(e) ; n \in \mathbb{N}, e \in G^1\}$  est borné par une constante  $A$ . En particulier, si  $d$  est la longueur de la plus petite arête de  $G$ , on a :

$$\forall x, y \in G^0, d_G(x, y) \leq \frac{1}{2}d \implies \frac{d_{G'}(u_n(x), u_n(y))}{d_G(x, y)} \leq A.$$

Comme par ailleurs

$$\forall x, y \in G^0, d_G(x, y) \geq \frac{1}{2}d \implies \frac{d_{G'}(u_n(x), u_n(y))}{d_G(x, y)} \leq \frac{\text{diam}(G')}{d/2},$$

il existe une constante de Lipschitz  $k$  uniforme pour la suite  $(u_n)$ , qui est donc équicontinue. Ainsi, par le théorème d'Ascoli, quitte à en extraire une sous-suite, la suite  $(u_n)$  converge uniformément vers une application  $u : G \rightarrow G'$ . Mais  $\mathcal{C}$  est une partie fermée de  $\mathcal{C}(G, G')$ , donc  $u$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Comme l'énergie est une fonction continue,  $u$  réalise le minimum de l'énergie. □

Nous savons maintenant qu'il existe toujours des applications harmoniques minimisantes. Nous allons nous intéresser aux problèmes d'unicité. Voici un premier résultat, pour les problèmes de Dirichlet sans conditions initiales.

**DÉFINITION.** — Une famille d'applications  $\{f_t ; t \in [0, 1]\}$  entre deux espaces métriques  $X$  et  $Y$  est un transport parallèle si tout point  $x$  de  $X$  possède une voisinage  $V_x$  tel que, pour tout point  $x'$  appartenant à  $V_x$ , et pour tous  $t, t'$  dans  $[0, 1]$ ,

$$d(f_t(x'), f_{t'}(x')) = d(f_t(x), f_{t'}(x)).$$

On remarquera que cette notion coïncide bien avec la notion usuelle de transport parallèle dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes (voir par exemple [Jos], lemme 3.2.1, p. 87).

THÉORÈME 2 (unicité à transport parallèle près). — Soit  $u \in \mathcal{C}$  une application harmonique minimisante dans une classe d'homotopie libre de  $\text{Aff}(G, G')$  et  $u_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G', u(x_0))$  le morphisme induit en homotopie. Si  $u_*(\pi_1(G))$  est non trivial, alors deux cas se présentent :

(i) Si  $u_*(\pi_1(G))$  est cyclique infini, alors  $u(G)$  est un cercle et l'ensemble des applications harmoniques est exactement l'ensemble des  $u_\theta = R_\theta \circ u$  où  $R_\theta$  est la rotation d'angle  $\theta$  sur le cercle  $u(G)$ .

(ii) Si  $u_*(\pi_1(G))$  n'est pas cyclique, alors il y a dans  $\mathcal{C}$  deux applications harmoniques  $u_0$  et  $u_1$  telles que l'ensemble des applications harmoniques soit l'ensemble des  $u_t$ , paramétré par le segment  $[0, 1]$ , et qui forme l'homotopie géodésique de  $u_0$  à  $u_1$ . Dans ce cas, les  $u_t$  forment un transport parallèle. Enfin, il y a unicité de l'application harmonique si  $u_0 = u_1$ .

Pour un problème de Dirichlet avec conditions initiales, la situation est plus simple.

THÉORÈME 3 (unicité avec des conditions initiales). — Si l'ensemble  $S$  des conditions initiales est non vide, alors il y a une unique application harmonique qui minimise l'énergie dans une classe d'homotopie relative à ces conditions initiales.

Pour démontrer ces deux théorèmes, nous allons utiliser une inégalité de convexité, valable plus généralement dans les espaces  $\text{CAT}(0)$  (cf. [GH], chap. 3 prop. 29 ou [BH], chap. 2 prop. 2.1).

LEMME 1.3 (inégalité de convexité). — Soit  $T$  un arbre. Si  $c$  et  $c' : [0, 1] \rightarrow T$  sont deux arcs géodésiques paramétrés proportionnellement à la longueur d'arc, alors

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1-t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1)).$$

Si on a de plus égalité pour tout  $t \in [0, 1]$ , alors, la fonction

$$t \mapsto d(c(t), c'(t))$$

est constante et chaque quadruplet  $c(t), c(s), c'(s), c'(t)$  forme un parallélogramme aplati. En particulier, les images de  $c$  et de  $c'$  sont contenues dans un segment de  $T$ .

COROLLAIRE 1.4. — Soient  $u_0$  et  $u_1$  deux applications affines de  $G$  dans  $G'$ , et  $u_t$  l'homotopie barycentrique entre  $u_0$  et  $u_1$ . Alors, pour toute arête  $e$  de  $G$ ,

$$u'_t(e) \leq (1 - t)u'_0(e) + tu'_1(e).$$

Si on a de plus égalité pour tout  $t$ , alors pour tous points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  de  $\tilde{G}$ , les points  $(\tilde{u}_t(\tilde{x}))_{t \in [0,1]}$  et  $(\tilde{u}_t(\tilde{y}))_{t \in [0,1]}$  sont tous alignés sur un même segment de l'arbre  $\tilde{G}$  et les fonctions  $t \mapsto u'_t(e)$  sont constantes.

Le corollaire se démontre en posant  $c(t) = \tilde{u}_t(\tilde{x})$  et  $c'(t) = \tilde{u}_t(\tilde{y})$  puis en appliquant le lemme 1.3.

Preuve du lemme. — Supposons d'abord que  $c(0) = c'(0)$ . L'inégalité

$$d(c(t), c'(t)) \leq td(c(1), c'(1))$$

est alors claire. Si l'on ne suppose plus que  $c(0) = c'(0)$ , on introduit un troisième arc géodésique  $c''$  paramétré proportionnellement à la longueur d'arc, tel que  $c''(0) = c(0)$  et  $c''(1) = c'(1)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} d(c(t), c''(t)) &\leq td(c(1), c'(1)), \\ d(c'(t), c''(t)) &\leq (1 - t)d(c(0), c'(0)). \end{aligned}$$

L'inégalité cherchée découle maintenant de l'inégalité triangulaire. Le cas d'égalité requiert que chacun des triangles géodésiques  $(c(0), c(1), c'(1))$  et  $(c(0), c'(0), c'(1))$  soit un triangle euclidien. Mais les triangles euclidiens dans un arbre sont aplatis, ce qui conclut le lemme.  $\square$

Prenons maintenant deux applications harmoniques minimisantes dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$  et considérons l'homotopie barycentrique  $u_t$ . D'après le corollaire 1.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité suivante :

$$E(u_t) \leq \inf \{ E(v) ; v \in \mathcal{C} \}.$$

Ainsi, les  $u_t$  sont toutes harmoniques minimisantes, et on se trouve dans le cas d'égalité du corollaire 1.4 : les applications  $u_t$  sont « alignées ».

COROLLAIRE 1.5. — Si  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{u}_1$  coïncident en un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{G}$ , alors elles sont égales et  $u_0 = u_1$ .

*Preuve.* — Comme on a  $\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}_1(x)$ , la famille  $\{\tilde{u}_t(\tilde{x}); t \in [0, 1]\}$  est constante. Soit  $\tilde{y}$  un sommet voisin de  $\tilde{x}$ . Comme la famille  $\{d(\tilde{u}_t(\tilde{x}), \tilde{u}_t(\tilde{y})); t \in [0, 1]\}$  est constante, l'application  $t \mapsto \tilde{u}_t(\tilde{y})$  est une application continue à valeurs dans une sphère de  $\tilde{G}'$  centrée en  $\tilde{u}_0(\tilde{x})$ , donc une application constante car, dans un arbre, les sphères sont discrètes. Cette propriété se propage alors de voisins en voisins, donc, par connexité, à tous les sommets de  $\tilde{G}$ . Il vient que pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ ,  $\tilde{u}_t = \tilde{u}_0$  et  $u_t = u_0$ .  $\square$

*Remarque.* — Ce corollaire démontre le théorème 3.  $\square$

**COROLLAIRE 1.6.** — *Si  $G$  est un graphe minimal différent d'un cercle, un plongement isométrique  $i : G \rightarrow G'$  est l'unique application harmonique minimisante dans sa classe d'homotopie.*

*Preuve.* — Considérons une homotopie entre  $i = u_0$  et une application  $u_1$  différente de  $i$ , et minimisante dans la même classe d'homotopie. Rappelons que le *link* d'un sommet  $x$  du graphe  $G$  est l'ensemble des germes de segments qui en partent. Il s'identifie à la sphère de centre  $x$  et de rayon  $\frac{1}{3}r$ , où  $r$  est la longueur de l'arête la plus courte dans le graphe  $G$ .

En un sommet  $x$  de  $G$ , pour  $v \in \text{link}(x)$ , posons-nous la question suivante : quand  $t$  croît en partant de 0,  $u_t(v)$  se rapproche-t-il de  $x$  ou s'en éloigne-t-il ? Dans le premier cas, affectons le signe plus (+) à l'élément  $v$  du link de  $x$ ; sinon, affectons-lui le signe moins (-). Alors, d'après le cas d'égalité du lemme 1.3, chaque arête de  $G$  porte exactement un point marqué de chaque signe. Il y a donc autant de (+) que de (-) sur l'ensemble du graphe. Maintenant, il est clair que seulement un élément de chaque link porte le signe (+), d'après le cas d'égalité du lemme 1.3. Par conséquent, chaque link contient exactement un point de chaque signe. En particulier, tous les sommets sont de valence deux, et  $G$  est un cercle. Nous venons de prouver la contraposée du résultat annoncé.  $\square$

Démontrons maintenant le théorème 2.

Dans le cas (i), l'image  $u(G)$  est un graphe fini dont le groupe fondamental est cyclique infini. C'est donc un cercle auquel on a éventuellement rattaché un nombre fini d'arbres. Maintenant, si un point  $x$  de  $G$  est envoyé sur un sommet terminal de  $G'$ , alors il est facile de construire une homotopie entre  $u$  et une application affine qui envoie  $x$  sur l'unique sommet voisin dans  $u(G)$  de  $u(x)$ . Par construction, cette

nouvelle application a une énergie strictement inférieure à celle de  $u$ , d'où une contradiction, et  $u(G)$  est un cercle auquel on n'a rattaché aucun arbre. Maintenant, le corollaire 1.4 signifie précisément que les applications harmoniques minimisantes se déduisent les unes des autres par une rotation du cercle  $u(G)$ .

Dans le cas (ii), raisonnons par l'absurde. Pour cela, considérons trois applications harmoniques minimisantes  $u, v$  et  $w$  dans  $\mathcal{C}$ . Soient  $u_t$  (resp.  $v_t, w_t$ ) l'homotopie géodésique entre  $u_0 = v$  et  $u_1 = w$  (resp.  $v_0 = w$  et  $v_1 = u, w_0 = u$  et  $w_1 = v$ ).

LEMME 1.7. — Il existe  $t$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  tel que  $u = u_t$ , ou  $v = v_t$ , ou  $w = w_t$ .

Preuve. — Si ce n'est pas le cas, alors, pour tout  $\tilde{x}$  de  $\tilde{G}$ , les points  $\tilde{u}(\tilde{x}), \tilde{v}(\tilde{x})$  et  $\tilde{w}(\tilde{x})$  ne sont pas alignés (s'ils l'étaient, on aurait, par exemple,  $\tilde{u}(\tilde{x}) = \tilde{u}_s(\tilde{x})$  et  $u = u_s$  par le corollaire 1.5). Soient alors  $x$  un sommet de  $T$  et  $y$  un point très voisin. Si  $\tilde{u}(\tilde{x})$  est dans  $[\tilde{v}(\tilde{x}), \tilde{u}(\tilde{y})]$ , alors  $\tilde{u}(\tilde{x})$  appartient à  $[\tilde{w}(\tilde{x}), \tilde{u}(\tilde{y})]$ . En particulier,  $\tilde{v}(\tilde{y})$  et  $\tilde{w}(\tilde{y})$  sont tous les deux sur le segment  $[\tilde{v}(\tilde{x}), \tilde{w}(\tilde{x})]$  et on obtient l'inégalité stricte suivante :

$$d(\tilde{v}(\tilde{y}), \tilde{w}(\tilde{y})) < d(\tilde{v}(\tilde{x}), \tilde{w}(\tilde{x})).$$

Or, cette inégalité devrait être une égalité, d'où une contradiction. Les autres cas se traitent de la même façon. □

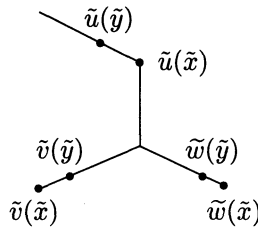


Figure 2. Trois applications minimisantes sont forcément alignées

On a alors prouvé qu'aux revêtements universels, les applications harmoniques sont toutes « alignées ».

LEMME 1.8. — Soit  $\tilde{x} \in \tilde{G}$ . Alors l'ensemble

$$H(\tilde{x}) = \{ \tilde{v}(\tilde{x}) ; v \text{ harmonique et homotope à } u \}$$

est un segment compact de  $\tilde{G}'$ .

*Preuve.* — D'après le lemme 1.7, cet ensemble est un intervalle fermé. Nous allons montrer qu'il est borné. Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans  $\pi_1(G)$  tels que leurs images par  $u_*$  engendrent un groupe libre de rang 2. Quitte à modifier le choix des  $\gamma_i$  par une transformation de Nielsen, on peut supposer que  $D_1 = \text{Axe}(\gamma_1)$  et  $D_2 = \text{Axe}(\gamma_2)$  se rencontrent le long d'un intervalle  $I$ . Appellons  $D'_i$  l'axe de  $u_*(\gamma_i)$  dans  $\tilde{G}'$ .

Soit  $i = 1$  ou  $2$ . Si  $v$  est une application harmonique homotope à  $u$ , alors l'arbre  $\tilde{v}(D_i)$  est la réunion de  $D'_i$ , d'un arbre fini  $T_i(v)$  et de ses translatés par  $u_*(\gamma_i)$ . Le diamètre de cet arbre fini est borné uniformément quand  $v$  décrit les applications harmoniques car, sinon, les vitesses de  $\tilde{v}$  sur les arêtes de  $D_i$  seraient arbitrairement grandes, alors que celles-ci ne dépendent que du choix de  $v$ .

Par conséquent, si  $\tilde{x}$  est un point de  $I = D_1 \cap D_2$ , l'ensemble  $H(\tilde{x})$  est à distance bornée simultanément de  $D'_1$  et de  $D'_2$ . Une telle partie de  $\tilde{G}'$  est forcément bornée.  $\square$

D'après les lemmes 1.7 et 1.8, les applications harmoniques sont bien obtenues comme les  $u_t$  d'une homotopie géodésique entre les deux applications harmoniques  $u_0$  et  $u_1$  particulières. Il reste à montrer que ces deux applications ne sont pas confondues.

**LEMME 1.9.** — *Soient  $u_0$  et  $u_1$  deux applications harmoniques minimisantes dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ . Si pour un  $t$  de l'intervalle  $[0, 1]$  et un  $\gamma \in \pi_1(G, x_0)$ , on a  $\tilde{u}_1 = f_*(\gamma)\tilde{u}_0$ , alors  $\gamma$  appartient à  $\ker(f_*)$  et  $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_1$ .*

*Preuve.* — Comme  $\tilde{u}_0$  et  $\tilde{u}_1$  sont  $f_*$ -équivariantes, on a, pour tout  $\gamma' \in \pi_1(G, x_0)$  et tout  $\tilde{x} \in T$ ,

$$\begin{aligned} f_*(\gamma')f_*(\gamma)\tilde{u}_0(\tilde{x}) &= f_*(\gamma')\tilde{u}_1(\tilde{x}) = \tilde{u}_1(\gamma'x) \\ &= f_*(\gamma)\tilde{u}_0(\gamma'\tilde{x}) = f_*(\gamma)f_*(\gamma')\tilde{u}_0(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f_*(\gamma)$  appartient au centre du groupe  $f_*(\pi_1(G))$ , qui est un groupe libre de rang au moins deux, donc  $f_*(\gamma) = \text{Id}_{T'}$ .  $\square$

Ce dernier lemme démontre qu'il y a unicité dans le cas où  $u_0 = u_1$ , ce qui conclut la preuve du théorème 2'.  $\square$

## 1.2. Applications harmoniques et revêtements.

Ce paragraphe a pour but de montrer que les applications harmoniques

ont un bon comportement vis-à-vis des revêtements finis. En particulier, les applications de revêtements sont harmoniques.

PROPOSITION 1.10. — Soit  $p : \bar{G} \rightarrow G$  un revêtement fini. Soit  $[u_0, u_1]$  l'ensemble des applications harmoniques minimisantes dans une classe d'homotopie  $\mathcal{C}$  d'applications affines par morceaux de  $G$  dans un graphe  $G'$  (on se place ici dans le cadre de l'hypothèse (ii) du théorème d'unicité : le graphe image n'est pas un cercle). Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  la classe d'homotopie des applications  $\bar{u}_t = u_t \circ p$  avec  $t \in [0, 1]$ , de  $\bar{G}$  dans  $G'$ . Dans cette classe d'homotopie, appelons  $[v_0, v_1]$  l'ensemble des applications harmoniques minimisantes.

Alors, les  $\bar{u}_t$  sont harmoniques minimisantes et  $v_{1/2} = \bar{u}_{1/2}$ .

Dans le cas particulier où  $G = G'$ , avec  $u = \text{Id}_G$ , on obtient le corollaire suivant, toujours dans le cas où le graphe  $G$  n'est pas un cercle.

COROLLAIRE 1.11. — Tout revêtement connexe de degré fini d'un graphe minimal est minimisant dans sa classe d'homotopie.

Remarquons que ce corollaire reste vrai dans le cas où  $G$  est un cercle. En effet, ce cas correspond à l'exemple 1 présenté dans l'introduction de cet article.

Preuve de la proposition 1.10. — Remarquons tout d'abord que le morphisme  $\bar{f}_*$  induit en homotopie par  $\bar{f} = f \circ p$  vérifie également l'hypothèse (ii) du théorème 2, car son image est un sous-groupe d'indice fini de l'image de  $f_*$ , donc un groupe libre de rang au moins 2. Considérons un automorphisme  $\gamma$  du revêtement  $p : \bar{G} \rightarrow G$ . Alors, les applications  $v_t \circ \gamma$  sont dans la classe d'homotopie  $\bar{\mathcal{C}}$ . Ayant même énergie que les  $v_t$ , elles sont également harmoniques minimisantes. Ainsi, le segment  $[v_0 \circ \gamma, v_1 \circ \gamma]$  est contenu dans le segment  $[v_0, v_1]$ . En faisant le même raisonnement avec l'inverse  $\gamma^{-1}$  de  $\gamma$ , on obtient l'égalité des deux segments. En particulier,  $v_{1/2} = v_{1/2} \circ \gamma$ , et ce pour chaque  $\gamma$  automorphisme du revêtement  $p$ . Ceci prouve que  $v_{1/2} = u \circ p$  pour une application  $u \in \mathcal{C}$  de  $G$  dans  $G'$ . On en déduit alors que  $u$  est minimisante dans  $\mathcal{C}$ . En effet, il est évident que pour tout  $v$  dans  $\mathcal{C}$ ,

$$E_{\bar{G}}(\bar{v}) = d \cdot E_G(v),$$

où  $d$  est le degré du revêtement  $p$ . Donc, si  $v$  avait une énergie plus petite que celle de  $u$ , l'application  $\bar{v}$  aurait une énergie moindre que celle de  $\bar{u}$ , qui est minimisante, d'où une absurdité.



Ainsi  $u$  est l'une des applications  $u_t$  minimisantes dans  $\mathcal{C}$ , et les  $\bar{u}_t$  sont minimisantes dans  $\bar{\mathcal{C}}$ . Deux cas se présentent alors.

*Premier cas :* on a  $v_t \circ \gamma = v_t$  pour tout  $t$ . Dans ce cas, les  $v_t$  sont tous de la forme  $\bar{u}_s$ . Comme la réciproque est vraie, on a alors  $v_t = \bar{u}_t$  ou  $v_t = \bar{u}_{1-t}$ .

*Deuxième cas :* on a  $v_t \circ \gamma = v_{1-t}$  et  $v_0 \neq v_1$ . Dans ce cas,  $v_{1/2}$  est le seul  $v_t$  de la forme  $u_s$ . En particulier, il n'y a qu'une seule application harmonique minimisante  $u$  dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ .

Dans les deux cas, on a bien  $v_{1/2} = \bar{u}_{1/2}$ . □

## 2. SUPERRIGIDITÉ DES COMMENSURATEURS POUR LES GROUPES D'AUTOMORPHISMES D'ARBRES

Soient  $T$  et  $T'$  deux arbres métriques localement finis ayant une borne inférieure sur la longueur des arêtes (c'est par exemple le cas des arbres ayant un quotient compact), et  $\text{Aut}(T)$ ,  $\text{Aut}(T')$  leurs groupes d'isométries, qui sont localement compacts pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On notera  $\bar{T}' = T' \cup \partial T'$  la compactification de l'arbre  $T'$  par les classes d'équivalences de rayons géodésiques infinis, sur laquelle  $\text{Aut}(T')$  agit par homéomorphismes.

Rappelons que deux sous-groupes  $H_1$  et  $H_2$  d'un groupe  $H$  sont dits *commensurables* lorsque leur intersection est un sous-groupe d'indice fini de chacun d'eux.

Si ces deux groupes agissent librement sur l'arbre  $T$ , la commensurabilité signifie que le graphe  $T/H_1 \cap H_2$  est un revêtement fini de chacun des deux graphes  $T/H_1$  et  $T/H_2$ . Le commensurateur dans  $H$  du sous-groupe  $H_1$  est alors l'ensemble des éléments  $h$  de  $H$  tels que le conjugué  $hH_1h^{-1}$  soit commensurable à  $H_1$ . Le commensurateur est noté  $\text{Comm}_H(H_1)$ .

Nous allons donner une nouvelle démonstration du théorème suivant.

**THÉORÈME 2.1** [M. Burger, S. Mozes]. — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret cocompact de  $\text{Aut}(T)$  et  $\Lambda$  un sous-groupe de  $\text{Comm}(\Gamma)$  qui contient  $\Gamma$ . Si  $\rho : \Lambda \rightarrow \text{Aut}(T')$  est une action minimale de  $\Lambda$  sur  $T'$  telle que  $\rho(\Gamma)$  soit non borné, alors, cette action s'étend continûment à l'adhérence  $\bar{\Lambda}$  de  $\Lambda$ .*

COROLLAIRE. — Dans le cas où  $\Lambda = \text{Comm}(\Gamma)$ , le morphisme  $\rho$  s'étend à tout le groupe  $\text{Aut}(T)$  des automorphismes de  $T$ , car  $\Lambda$  est alors un sous-groupe dense, d'après [Liu].  $\square$

Preuve. — Comme un groupe est commensurable à ses sous-groupes d'indice fini, le résultat suivant va nous permettre de supposer que  $\Gamma$  agit librement sur l'arbre  $T$ .

LEMME 2.2 [Bas]. — Si  $\Gamma$  est un groupe discret cocompact d'isométries de  $T$ , alors  $\Gamma$  contient un sous-groupe d'indice fini qui agit librement sur  $T$ .

En particulier,  $\Gamma$  est le groupe fondamental du graphe quotient  $G = T/\Gamma$ , auquel nous attacherons un point-base  $x_0$ . La restriction à  $\Gamma$  du morphisme  $\rho : \Lambda \rightarrow \text{Aut}(T)$  va nous permettre de définir une classe d'homotopie  $\mathcal{C}$  d'applications affines de  $(G, x_0)$  dans le graphe  $G' = T'/\rho(\Gamma)$  muni d'un point base  $x'_0$ , induites par des applications  $\rho|_{\Gamma}$ -équivariantes de  $T$  dans  $T'$ .

Construction de la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ . — Fixons des relevés  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'_0$  dans  $T$  et  $T'$  des points bases de  $G$  et  $G'$ . On va alors définir une application  $\tilde{f} : T \rightarrow T'$ . Dans un premier temps, posons  $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$ , puis  $\tilde{f}(\gamma \cdot \tilde{x}_0) = \rho(\gamma) \cdot \tilde{x}'_0$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  (comme l'action de  $\Gamma$  est libre, cette définition n'est pas ambiguë). Dans un deuxième temps, prolongeons  $\tilde{f}$  en une application affine sur un domaine fondamental, ce qui est possible, car l'espace d'arrivée  $T'$  est contractile. Enfin, on prolonge naturellement  $\tilde{f}$  à  $T$  tout entier de manière équivariante.

L'application  $\tilde{f}$  induit alors une application affine  $f$  de  $G$  dans  $G'$ . Nous considérerons la classe d'homotopie libre  $\mathcal{C}$  de  $f$ . Pour toute application  $u$  dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ , on appellera dans la suite  $\tilde{u}$  le relevé de  $u$  obtenu en relevant une homotopie de  $f$  à  $u$ .

Nous allons considérer l'ensemble des applications harmoniques minimisantes dans cette classe d'homotopie. Remarquons que le graphe  $G'$  n'a aucune raison d'être fini. Le théorème 1 d'existence d'applications harmoniques minimisantes ne s'applique donc pas immédiatement.

PROPOSITION 2.3. — Il y a au moins une application harmonique minimisante dans la classe d'homotopie  $\mathcal{C}$ .

Preuve de la proposition. — Considérons une suite minimisante  $u_n$ , comme dans la preuve du théorème 1. Nous allons montrer que la réunion

des images  $u_n(G)$  du graphe  $G$  par la suite  $u_n$  est bornée dans  $G'$ . Alors, nous pourrions conclure en utilisant le théorème 1.

Considérons les relevés  $\tilde{u}_n : T \rightarrow T'$  des applications  $u_n$ . Maintenant, supposons par l'absurde que la suite des points  $\tilde{u}_n(\tilde{x}_0)$  soit non bornée. À ce moment, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un point  $\eta$  du bord de l'arbre  $T'$ . Comme  $\rho(\Gamma)$  ne fixe pas de point à l'infini, il existe un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  tel que  $\rho(\gamma) \cdot \eta$  est distinct de  $\eta$ . Maintenant, comme  $\tilde{u}_n(\gamma \cdot x_0) = \rho(\gamma) \cdot \tilde{u}_n(\tilde{x}_0)$ , on a, toujours pour la même sous-suite,

$$d(\tilde{u}_n(\gamma \cdot \tilde{x}_0), \tilde{u}_n(\tilde{x}_0)) \longrightarrow \infty.$$

On en déduit que,  $e_1, \dots, e_r$  étant les arêtes du segment géodésique reliant  $\tilde{x}_0$  à  $\gamma \cdot \tilde{x}_0$  dans  $T$ ,

$$\sum_{i=1}^r u'_n(e_i) \longrightarrow \infty,$$

ce qui contredit le fait que l'énergie des  $u_n$  soit majorée.

On sait donc maintenant que la suite  $u_n(x_0)$  est bornée. Maintenant, par le même raisonnement sur la finitude de l'énergie, on déduit aisément que tous les sommets (par conséquent tous les points du graphe  $G$ ) ont une image bornée.  $\square$

*Remarque.* — Cette preuve montre également que, quand  $u$  parcourt les applications minimisantes (qui ont même énergie), la réunion des images  $u(G)$  est bornée. En particulier, le théorème 2 de «pseudo-unité» s'applique bien dans cette situation. En l'occurrence, le groupe  $\rho(\pi_1(G)) = \rho(\Gamma)$  ne fixe pas de point dans  $\bar{T}'$ , donc n'est pas cyclique. Ainsi, nous sommes dans la situation (ii) du théorème 2, et les applications harmoniques minimisantes dans la classe d'homotopie  $C$  forment un segment  $[u_0, u_1]$ .

Relevons maintenant l'homotopie  $u_t$  en l'homotopie  $\tilde{u}_t$  d'applications de  $T$  dans  $T'$ . Cette homotopie est  $\rho|_{\Gamma}$ -équivariante. Nous allons prouver que l'application  $\tilde{u}_{1/2}$  est  $\rho$ -équivariante. Pour cela, prenons  $c \in C(T)$  et considérons l'homotopie

$$\tilde{v}_t(\tilde{x}) = \rho(c) \cdot \tilde{u}_t(c^{-1} \cdot \tilde{x}).$$

Cette homotopie est  $\rho|_{c\Gamma c^{-1}}$ -équivariante. En particulier, elle passe au quotient en une homotopie  $v_t$  d'applications affines de  $T'/c\Gamma c^{-1}$  dans  $T'/\rho(c\Gamma c^{-1})$ .

LEMME 2.4. — Les  $(v_t)_{0 \leq t \leq 1}$  sont les applications de  $T/c\Gamma c^{-1}$  dans  $T'/\rho(c\Gamma c^{-1})$  qui minimisent l'énergie dans la classe d'homotopie induite par le morphisme  $\rho$ .

Preuve. — L'automorphisme  $c$  de l'arbre  $\tilde{G} = T$  induit une isométrie  $i_c$  entre les graphes  $G = T/\Gamma$  et  $G_c = T/c\Gamma c^{-1}$ . De même, l'automorphisme  $\rho(c)$  de l'arbre  $\tilde{G}' = T'$  induit une isométrie  $i'_c$  entre les graphes  $G' = T'/\rho(\Gamma)$  et  $G'_c = T'/\rho(c\Gamma c^{-1})$ . Les deux isométries obtenues conjuguent  $u_t$  à  $v_t$ . Les  $v_t$  sont donc bien exactement les applications minimisantes dans la classe d'homotopie en question.  $\square$

Notons  $\Gamma_c$  le groupe  $\Gamma \cap c\Gamma c^{-1}$ , d'indice fini dans  $\Gamma$  et dans  $c\Gamma c^{-1}$ . Les applications  $\tilde{u}_t$  et  $\tilde{v}_t$  sont toutes deux  $\rho|_{\Gamma_c}$ -équivariantes et induisent des applications affines  $\bar{u}_t$  et  $\bar{v}_t$  de  $\bar{G} = T/\Gamma_c$  dans  $\bar{G}' = T'/\rho(\Gamma_c)$ . En composant par la projection  $T'/\rho(\Gamma_c) \rightarrow T'/\rho(\Gamma)$ , on obtient des applications  $\hat{u}_t$  et  $\hat{v}_t$  de  $T/\Gamma_c$  dans  $T'/\rho(\Gamma)$ . Les applications  $\hat{u}_t$  sont minimisantes par la proposition 1.10, et les  $\hat{v}_t$  le sont par la même preuve que le lemme 2.4.

Ces applications étant homotopes, on a, par une nouvelle application de la proposition 1.10, que  $\hat{u}_{1/2} = \hat{v}_{1/2}$ . Ainsi, si  $p'$  est la projection de  $T'$  sur  $T'/\rho(\Gamma)$ , on sait maintenant que  $p' \circ \tilde{u}_{1/2} = p' \circ \tilde{v}_{1/2}$ . Par conséquent, il existe un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  tel que

$$\tilde{v}_{1/2} = \rho(\gamma) \cdot \tilde{u}_{1/2}.$$

Comme on l'a vu au lemme 1.8, ceci montre que  $\tilde{v}_{1/2} = \tilde{u}_{1/2}$ . Ainsi,  $\tilde{u}_{1/2}$  est  $\rho$ -équivariante.

LEMME 2.5. — L'application  $\tilde{u}_{1/2}$  est surjective.

Preuve. — Considérons le sous-arbre  $\tilde{u}_{1/2}(T)$  de  $T'$ . Celui-ci est invariant sous l'action de  $\rho(\Lambda)$  (par équivariance). Cette dernière action étant minimale, l'arbre  $\tilde{u}_{1/2}(T)$  est  $T'$  tout entier.  $\square$

Soit  $\lambda \in \bar{\Lambda}$ . On définit alors  $\bar{\rho}(\lambda)$  comme étant l'application qui envoie le point  $\tilde{u}_{1/2}(\tilde{x})$  sur le point  $\tilde{u}_{1/2}(\lambda \cdot \tilde{x})$ .

Vérifions d'abord que cette application est bien définie. Si  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont deux points de  $T$  tels que  $\tilde{u}_{1/2}(\tilde{x}) = \tilde{u}_{1/2}(\tilde{y})$ , alors, par équivariance, on a  $\tilde{u}_{1/2}(\lambda \cdot \tilde{x}) = \tilde{u}_{1/2}(\lambda \cdot \tilde{y})$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , donc pour tout  $\lambda \in \bar{\Lambda}$  par continuité de  $\tilde{u}_{1/2}$ . De même, par passage à la limite, on vérifie aisément que  $\bar{\rho}$  est

bien un morphisme de groupes, qui prolonge  $\rho$  par équivariance. Enfin,  $\bar{\rho}$  est continue : si  $\lambda_n$  tend vers  $\lambda$  uniformément sur les compacts de  $T$ , alors  $\tilde{u}_{1/2}(\lambda_n \cdot \tilde{x})$  tend vers  $\tilde{u}_{1/2}(\lambda \cdot \tilde{x})$  uniformément sur les compacts de  $T$ , et comme  $\tilde{u}_{1/2}$  est lipschitzienne, on en déduit que  $\bar{\rho}(\lambda_n)$  converge vers  $\bar{\rho}(\lambda)$  uniformément sur les compacts de  $T'$ .  $\square$

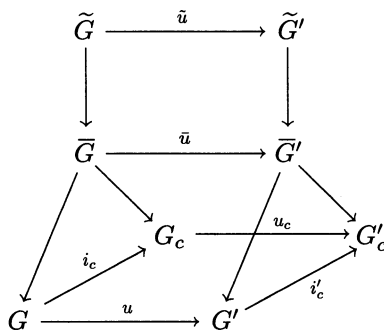


Figure 3. Un diagramme commutatif

## BIBLIOGRAPHIE

- [Bas] H. BASS, Covering theory for graphs of groups, *J. Pure Appl. Alg.*, 89 (1993), 3–47.
- [BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of nonpositive curvature*, livre en préparation.
- [BM] M. BURGER, S. MOZES, *CAT(-1) spaces, divergence groups and their commensurators*, *J. Am. Math. Soc.*, vol. 9, 1 (1996).
- [BK] H. BASS, R. KULKARNI, *Uniform tree lattices*, *J. Amer. Math. Soc.*, 3 (1990), 843–902.
- [Cor] K. CORLETTE, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, *Ann. of Math.*, 135 (1992), 165–182.
- [ES] J. EELLS, J. SAMPSON, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, *Amer. J. Math.*, 85 (1964), 109–160.
- [Gao] Y. GAO, *Superrigidity for homomorphisms into isometry groups of non-proper CAT(-1) spaces*, prépublication.
- [GH] É. GHYS, P. DE LA HARPE, *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [GP] M. GROMOV, P. PANSU, *Rigidity of lattices : an introduction*, in *Geometric topology : recent developments*, Montecatini Terme, 1990, Lecture Note 1504, 39–137.

- [GS] M. GROMOV, R. SCHOEN, Harmonic maps into singular spaces and  $p$ -adic superrigidity for lattices in groups of rank one, *Publ. Math. IHES*, 76 (1992), 165–246.
- [Har] P. HARTMAN, On homotopic harmonic maps, *Can. J. Math.*, 19 (1967), 673–687.
- [Jos] J. JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Universitext, Springer-Verlag, 1995.
- [KS] N.J. KOREVAAR, R. SCHOEN, Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets, *Comm. in Anal. and Geom.*, vol. 1, 4 (1993), 561–659.
- [LMZ] A. LUBOTZKY, S. MOZES, R.J. ZIMMER, Superrigidity of the commensurability groups of tree lattices, *Comm. Math. Helv.*, 69 (1994), 523–548.
- [Liu] Y. LIU, Density of the commensurability groups of uniform tree lattices, *J. of Alg.*, 165 (1994), 346–359.
- [Los] J.E. LOS, A variational calculus for automorphisms of free groups, prépublication Univ. Nice, janvier 1993.
- [Mar] G.A. MARGULIS, Superrigidity for commensurability subgroups and generalized harmonic maps, prépublication.
- [Pan] P. PANSU, Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité, *Sém. Bourbaki*, 46-ème année, 1993–94, n° 778, Soc. Math. France, Astérisque, 227 (1995), 69–105.

Manuscrit reçu le 20 février 1996,  
accepté le 15 mai 1996.

Édouard LEBEAU,  
Unité de Mathématiques C.N.R.S. UMR 128  
École Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie  
69364 Lyon cedex 07 (France).  
elebeau@umpa.ens-lyon.fr