ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC HELEIN

Inégalité isopérimétrique et calibration

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 4 (1994), p. 1211-1218

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_4_1211_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 4 (1994), 1211-1218

INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE ET CALIBRATION

par Frédéric HELEIN

Pour tout domaine Ω dans le plan $\mathbb{R}^2$, dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière, l'inégalité isopérimétrique relie l'aire de Ω, $|\Omega|$, au périmètre Ω, $|\partial\Omega|$ de la façon suivante :

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant 4\pi|\Omega|.$$

Cette inégalité est optimale, et l'égalité a lieu si et seulement si Ω est un disque. Des inégalités isopérimétriques similaires sont vraies également si Ω est un domaine de la sphère S^2,

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant (4\pi - |\Omega|)|\Omega|,$$

ou si Ω est un domaine de l'espace hyperbolique H^2

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant (4\pi + |\Omega|)|\Omega|,$$

avec à chaque fois égalité si et seulement si Ω est un disque. Dans le cas du plan, cette inégalité semble être connue depuis longtemps. Un des plus vieux exemples est la ville de Carthage, fondée par les phéniciens. Les fouilles archéologiques relèvent que les plus anciennes fondations de Carthage s'étendaient sur un territoire contenu entre la côte méditérannéenne et un arc de cercle. Selon la légende, il fut accordé à Didon, fondatrice de Carthage, autant de terres qu'elle pouvait clôturer avec la peau d'une vache. Didon, fort astucieusement fit tailler dans la peau d'une vache une fine lanière avec laquelle elle encercla un territoire semi-circulaire.

Il existe de nombreuses démonstrations pour l'inégalité isopérimétrique. Le lecteur intéressé pourra consulter [1], [2], [5], [6].

Notre propos ici est de donner une preuve directe reposant sur une idée inspirée des calibrations. Le principe, utilisé par exemple par Federer

---

Mots-clés : Inégalités isopérimétriques – Calibrations – Lagrangiens nuls.
Classification A.M.S. : 49B05 – 49C05 – 51M25 – 53C42.

[Fe], et largement exploré par Harvey et Lawson [Hl], en est simple : supposons que l'on sache définir sur une variété riemannienne $\mathcal{M}$ une p-forme β telle que $d\beta = 0$ et

$$|\beta| \leqslant 1 \text{ sur } \mathcal{M}.$$

Soit $\mathcal{N}$ une sous-variété orientée de dimension p de $\mathcal{M}$. On dit que $\mathcal{N}$ est calibrée par β si la restriction $\beta|_{\mathcal{N}}$ de β à $\mathcal{N}$ est exactement la forme volume sur $\mathcal{N}$. Alors toute sous-variété $\mathcal{N}$ calibrée par β est minimale parmi les variétés qui sont homologues à $\mathcal{N}$. En effet, pour toute sous-variété $\mathcal{N}'$, homologue à $\mathcal{N}$, on a

$$|\mathcal{N}| = \int_{\mathcal{N}} \beta = \int_{\mathcal{N}'} \beta \leqslant |\mathcal{N}'|,$$

en vertu de la formule de Stokes. La stratégie que nous mettons en place ici est une variante.

Notons E_c l'espace de dimension 2 de courbure constante égale à $c \in \{-1,0,1\}(E_{-1} = H^2,\ E_0 = \mathbb{R}^2,\ E_1 = S^2), UE_c$ sera le fibré des vecteurs unitaires tangents au-dessus de E_c, c'est-à-dire la sous-variété du fibré tangent TE_c définie par

$$UE_c = \{(t,y) \in TE_c / |t| = 1\},$$

où y est un point de E_c et $t \in T_yE_c$. Introduisons la variété $\mathcal{M}_c$ égale au produit

$$UE_c \times E_c = \{(t,y,x)/(t,y) \in UE_c,\ x \in E_c\}.$$

À tout domaine régulier Ω de E_c, nous allons associer dans $\mathcal{M}_c$ la sous-variété à bord $\mathcal{N}$ définie de la façon suivante. En tout point y de $\partial\Omega$, on note $t(y)$ le vecteur unitaire, tangent à $\partial\Omega$ en y tel que si $n(y)$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ en y, $(n(y), t(y))$ soit un repère direct de TyE_c. Nous noterons alors $U_+\partial\Omega$ le "relèvement" de $\partial\Omega$ dans UE_c donné par

$$U_+\partial\Omega = \{(t(y), y) \in UE_c / y \in \partial\Omega\}.$$

Enfin nous poserons

$$\mathcal{N} = U_+\partial\Omega \times \Omega \subset \mathcal{M}_c.$$

Notre méthode utilise de façon cruciale un champ de vecteur qui, à tout $(t,y,x) \in \mathcal{M}_c$, associe un vecteur $V(t,y,x)$ dans T_xE_c, de norme 1, pour $x \neq y$. Autrement dit, il s'agit d'une section du fibré

$$\begin{aligned} UE_c \times UE_c &\to \mathcal{M}_c \\ ((t,y),(u,x)) &\longmapsto (t,y,x), \end{aligned}$$

définie sur $\mathcal{M}_c \backslash \Delta$ où $\Delta = \{(t,x,y) \in \mathcal{M} / x = y\}$. Pour tout $(t,y,x) \in \mathcal{M}_c \backslash \Delta$, on considère l'unique cercle de E_c contenant y et x, et tangent à t en y. Ce cercle est orienté par t. Alors $V(t,y,x)$ est l'unique vecteur unitaire dans $T_x E_c$, qui est tangent à ce cercle, et a même orientation que t. Enfin si $(.,.)_c$ désigne le produit scalaire riemannien sur E_c, on considère la deux-forme sur E_c

$$\alpha = (V(t,y,x), dx)_c \wedge (t, dy)_c.$$

Nous avons alors le

THÉORÈME 1. — *Avec les notations précédentes, on a*

(i) $\int_{\mathcal{N}} d\alpha = (4\pi - c|\Omega|)|\Omega|$,

(ii) $\int_{\partial\mathcal{N}} \alpha \leqslant |\partial\Omega|^2$,

(iii) $\int_{\partial\mathcal{N}} \alpha = |\partial\Omega|^2$ *si et seulement si* Ω *est un disque dans* E_c.

COROLLAIRE. — *L'inégalité isopérimétrique est alors une conséquence immédiate de la formule de Stokes*

$$|\partial\Omega|^2 \geqslant \int_{\mathcal{N}} \alpha = \int_{\partial\mathcal{N}} d\alpha = (4\pi - c|\Omega|)|\Omega|.$$

Preuve du théorème. — L'inégalité ii) découle immédiatement du fait que $V(t,y,x)$ est unitaire. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{N}} \alpha &= \int_{(t,y)\in U_+\partial\Omega} \int_{x\in\partial\Omega} < V(t,y,x), dx >_c < t, dy >_c \\ &= \int_{y\in\partial\Omega} |dy| \int_{x\in\partial\Omega} < V(t,y,x), dx >_c \\ &\leqslant \int_{y\in\partial\Omega} |dy| \int_{x\in\partial\Omega} |dx| = |\partial\Omega|^2. \end{aligned}$$

Nous remarquons dans cette inégalité qu'il y a égalité dans ii) si et seulement si $V(t,y,x)$ est tangent à $\partial\Omega$ en x pour tout $(t,y) \in U_+\partial\Omega$ et tout $x \in \partial\Omega\backslash\{y\}$. Cela n'est possible que si $\partial\Omega$ est un cercle, ce qui entraîne iii).

Il ne reste plus qu'à démontrer i). Nous avons besoin pour cela de préciser un système de coordonnées sur E_c et $\mathcal{M}_c$, afin d'y exprimer α et $d\alpha$.

Cas $c = 0$. $E_0 = \mathbb{R}^2$ est équipé du produit scalaire canonique

$$< \xi, \zeta >_0 = \xi^1\zeta^1 + \xi^2\zeta^2,$$

et de la norme $|\xi|_0 = < \xi, \xi >_0^{1/2}$. On note

$$(\xi, \zeta) = \xi^1\zeta^2 - \xi^2\zeta^1$$

le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Cas $c = 1$. Nous représentons $E_1 = S^2$ par son plongement standard dans $\mathbb{R}^3$, équipé du produit scalaire

$$< \xi, \zeta >_1 = \xi^1\zeta^1 + \xi^2\zeta^2 + \xi^3\zeta^3,$$

de la norme $|\xi|_1 = < \xi, \xi >_1^{1/2}$, et du produit mixte

$$(\xi, \zeta, \eta) = \det(\xi, \zeta, \eta).$$

Ainsi

$$S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 / |y|_1 = 1\},$$

$$US^2 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^3 \times S^2 / |t|_1 = 1, < t, y >_1 = 0\}.$$

Cas $c = -1$. De même, nous représentons $E_{-1} = H^2$ par son plongement standard dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire minkowskien

$$< \xi, \zeta >_{-1} = \xi^1\zeta^1 + \xi^2\zeta^2 - \xi^3\zeta^3,$$

de la pseudo-norme $|\xi|_{-1} = < \xi, \xi >_{-1}$, et du produit mixte

$$(\xi, \zeta, \eta) = \det(\xi, \zeta, \eta).$$

On a ainsi

$$H^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 / < y, y >_{-1} = -1, y^3 > 0\},$$

$$UH^2 = \{(t, y) \in \mathbb{R}^3 \times H^2 / < t, t >_{-1} = 1, < t, y >_{-1} = 0\}.$$

Un calcul élémentaire montre que pour $c = -1, 0, 1$,

$$V_c(t, y, x) = \frac{2 < x - y, t >_c}{|x - y|^2 c}(x - y) - t.$$

Nous devons calculer $\int_{\mathcal{N}} d\alpha$. Pour cela, il n'est pas nécessaire de calculer $d\alpha$ mais seulement

$$\beta = \sum_{\alpha} \left(dx^{\alpha} \wedge < \frac{\partial V_c}{\partial x^{\alpha}}, dx >_c \right) \wedge < t, dy >_c,$$

car $d\alpha - \beta$ s'annule sur $\mathcal{N} = U_{+}\partial\Omega \times \Omega$.

Cas $c = 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\beta = 2\frac{(t, x-y)}{|x-y|_0^2} < t, dy >_0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Remarque. — Cette dernière expression se montre simplement en remarquant que cette relation ne dépend pas du système de coordonnées choisies, et en la vérifiant pour $y = 0$ et $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} d\alpha = \int_{\mathcal{N}} \beta &= \int_{x\in\Omega} dx^1 dx^2 \int_{(t,y)\in U_{+}\partial\Omega} 2\frac{(y-x,t)}{|y-x|_0^2} < t, dy >_0 \\ &= \int_{x\in\Omega} dx^1 dx^2 \int_{y\in\partial\Omega} 2\frac{(y-x,dy)}{|y-x|_0^2}. \end{aligned}$$

Et comme pour x fixé

$$d\left[\frac{2(y-x,dy)}{|y-x|_0^2}\right] = 4\pi\delta_x(y) dy^1 \wedge dy^2,$$

il vient grâce à la formule de Stokes

$$\int_{y\in\partial\Omega} \frac{2(y-x,dy)}{|y-x|_0^2} = \int_{y\in\Omega} 4\pi\delta_x(y) dy^1 \wedge dy^2 = 4\pi,$$

puisque $x \in \Omega$. On en déduit donc que

$$\int_{\mathcal{N}} d\alpha = 4\pi|\Omega|.$$

Cas $c = \pm 1$. Le calcul est similaire. Ici β est une 3-forme définie a priori sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, mais on ne s'intéresse qu'à la restriction de β à $\mathcal{M}_c$.

D'après le Lemme 1, on a

$$\beta|_{\mathcal{M}_c} = 2c\frac{(x,y,t)}{|x-y|_c^2}\omega(x) \wedge < t, dy >_c |_{\mathcal{M}_c},$$

où $\omega(x) = x^1 dx^2 \wedge dx^3 + x^2 dx^3 \wedge dx^1 + x^3 dx^1 \wedge dx^2$ est une deux-forme sur $\mathbb{R}^3$, dont la restriction à E_c est la forme volume sur E_c. D' où

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{N}} d\alpha = \int_{\mathcal{N}} \beta &= 2c \int_{x\in\Omega} \omega(x) \int_{y\in\partial\Omega} \frac{(x,y,t)}{|x-y|_c^2} < t, dy >_c \\ &= 2c \int_{x\in\Omega} \omega(x) \int_{y\in\partial\Omega} \frac{(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}.\end{aligned}$$

Or, pour x fixé, on a (voir Lemme 2) :

$$d\left[\frac{2c(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}\right] |_{E_c} = (4\pi\delta_x(y) - c)\omega(y)|_{E_c},$$

d'où, par la formule de Stokes,

$$\begin{aligned}2c \int_{y\in\partial\Omega} \frac{(x,y,dy)}{|x-y|_c^2} &= \int_{y\in\Omega} (4\pi\delta_x(y) - c)\omega(y) \\ &= 4\pi - c|\Omega|.\end{aligned}$$

On conclut finalement que

$$\int_{\mathcal{N}} d\alpha = \int_{x\in\Omega} (4\pi - c|\Omega|) dx^1 dx^2 = (4\pi - c|\Omega|)|\Omega|.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à prouver les deux lemmes suivants.

LEMME 1. — *Pour $c = \pm 1$, on a*

$$\sum_{\alpha=1}^{3} dx^\alpha \wedge < \frac{\partial V_c}{\partial x^\alpha}, dx >_c |_{E_c} = 2c \frac{(x,y,t)}{|x-y|_c^2} \omega(x)|_{E_c}.$$

LEMME 2. — *Pour $c = \pm 1$, et à x fixé, on a*

$$d\left[\frac{2c(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}\right] = (4\pi\delta_x(y) - c)\omega(y).$$

Preuve du Lemme 1. — Comme le résultat cherché ne dépend pas du système de coordonnées orthonormées directes utilisées, on peut choisir

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$V_c = \frac{cx^1}{1-x^3}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \left[\left(\frac{c(x^1)^2}{1-x^3} - 1\right)dx^1 + \frac{cx^1x^2}{1-x^3}dx^2 - x^1dx^3\right] \wedge < t, dy >_c .$$

Et

$$\beta = c\left[\frac{-x^1x^2}{(1-x^3)^2}\, dx^2 \wedge dx^3 + \left(c + \frac{(x^1)^2}{(1-x^3)^2}\right) dx^3 \wedge dx^1 \right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{1-x^3} dx^1 \wedge dx^2\right] \wedge < t, dy >_c .$$

D'autre part, il existe une fonction $k(x)$ et une 1-forme $l(x)$ telles que $\forall x \in E_c$,

$$\beta = k(x)\omega(x) + l(x) \wedge d\left(\frac{|x|_c^2}{2}\right).$$

Comme on ne s'intéresse qu'à $\beta|_{E_c}$, on a besoin que de $k(x)$. Ce dernier coefficient peut être obtenu en faisant le produit extérieur de β par $d\left(\frac{|x|_c^2}{2}\right)$, car

$$d\left(\frac{|x|_c^2}{2}\right) \wedge \beta = k(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

pour $x \in E_c$. D'où, par identification

$$k(x) = \frac{x^2}{1-x^3} = \frac{2cx^2}{|x-y|_c^2},$$

et

$$\beta|_{\mathcal{M}_c} = \frac{2cx^2}{|x-y|_c^2}\omega(x) \wedge < t, dy >_c |_{\mathcal{M}_c}$$
$$= 2c\frac{(x,y,t)}{|x-y|_c^2}\omega(x) \wedge < t, dy >_c |_{\mathcal{M}_c}.$$

Preuve du Lemme 2. — Ici également, on peut utiliser un système de coordonnées tel que

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$2c\frac{(x,y,dy)}{|x-y|_c^2} = \frac{y^1dy^2 - y^2dy^1}{1-y^3},$$

et à x fixé, on a pour tout $y \not\equiv x$

$$d\left[\frac{2c(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}\right] = \frac{-y^1}{(1-y^3)^2}dy^2\wedge dy^3 - \frac{y^2}{(1-y^3)^2}dy^3\wedge dy^1 + \frac{2}{1-y^3}dy^1\wedge dy^2.$$

Et un raisonnement analogue à celui du Lemme 1 donne pour x fixé, et pour tout $y \not\equiv x$,

$$d\left[\frac{2c(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}\right]_{|E_c} = -c\ \omega(y)|_{E_c}.$$

On conclut alors aisément que, au sens des distributions

$$d\left[\frac{2c(x,y,dy)}{|x-y|_c^2}\right]|_{|E_c} = [4\pi\delta_x(y) - c]\,\omega(y).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, Géométrie, chapitre 12, Tome 2, Nathan, 1990.

[2] W. BLASCHKE, Kreis und Kugel, Chelsea.

[3] H. FEDERER, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1969.

[4] R. HARVEY, H.B. LAWSON, Calibrated geometries, Acta Mathematica, 148 (1982), 47-157.

[5] R. OSSERMAN, Bonnensen-style isoperimetric inequalities, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 1-29.

[6] R. OSSERMAN, The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 1182-1238.

Manuscrit reçu le 11 octobre 1993.

Frédéric HELEIN,
ENS de Cachan et CNRS URA 1611
Centre de Mathématiques et
de leurs Applications
61 avenue du Président Wilson
F-94235 Cachan Cedex.