ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LUIS G. MENDES
MARCOS SEBASTIANI

Sur la densité des systèmes de Pfaff sans solution algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 1 (1994), p. 271-276
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_1_271_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 1 (1994), 271-276

SUR LA DENSITÉ DES SYSTÈMES DE PFAFF SANS SOLUTION ALGÉBRIQUE

par L.G. MENDES et M. SEBASTIANI

Dans ce qui suit "surface" voudra dire "variété analytique complexe, connexe, de dimension 2" et "surface algébrique" voudra dire "surface algébrique projective, complexe, lisse, connexe".

Si M est une surface, on notera $\Pi(M)$ l'ensemble des systèmes de Pfaff analytiques (de dimension 1) sur M n'ayant que des singularités isolées. $\Pi(M)$ est muni d'une topologie naturelle, voir [LN].

DÉFINITION 1. — *Si M est une surface algébrique et $\Omega \in \Pi(M)$, une* solution algébrique *de Ω est une courbe algébrique $X \subset M$ telle que $X - \mathrm{Sing}(\Omega)$ est une feuille du feuilletage défini par Ω dans $M - \mathrm{Sing}(\Omega)$.*

DÉFINITION 2. — *Si M est une surface et $\Omega \in \Pi(M)$, Ω est* rigide *si Ω est un point isolé de $\Pi(M)$ (c'est-à-dire, tout $\Gamma \in \Pi(M)$ assez proche de Ω est identique à Ω).*

Rappelons la suivante :

DÉFINITION 3. — *Une surface algébrique M est* géométriquement réglée *si il existe une courbe projective lisse C et un morphisme lisse $p : M \to C$ dont les fibres sont isomorphes à la droite projective $\mathbb{P}_1$.*

L'objet de cet article est de prouver le :

Mots-clés : Feuilletage analytique – Surface rationnelle.
Classification A.M.S. : 58F18.

THÉORÈME. — *Soit M une surface algébrique qui domine une surface géométriquement réglée. Alors il existe un $\Omega \in \Pi(M)$ qui est rigide et qui possède des solutions algébriques.*

COROLLAIRE. — *Soit M une surface algébrique rationnelle non isomorphe à $\mathbb{P}_2$. Alors il existe un $\Omega \in \Pi(M)$ qui est rigide et qui possède des solutions algébriques.*

En particulier, l'ensemble des $\Omega \in \Pi(M)$ sans solution algébrique n'est pas dense dans $\Pi(M)$.

Preuve du corollaire. — Si M est rationnelle et non isomorphe à $\mathbb{P}_2$, alors M domine une surface géométriquement réglée et on peut appliquer le théorème. En effet, d'après [B], th. 5.10, M domine une surface F_n ([B] 4.1) avec $n \neq 1$ ou bien M domine $\mathbb{P}_2$. Mais, dans ce dernier cas, M domine F_1 ([B] prop. 4.1) puisque M n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}_2$. □

Par contre, aucun $\Omega \in \Pi(\mathbb{P}_2)$ n'est rigide (voir [J]).

Ce travail a été motivé par la lecture de l'article [LN] (où l'on trouve des exemples de surfaces dans lesquelles l'ensemble des systèmes de Pfaff sans solution algébrique n'est pas dense) et par des entretiens avec C. Camacho qui nous ont suggéré d'utiliser la classe de Chern. Des entretiens avec E. Ghys nous ont amenés à améliorer une première version de cet article.

1. Préliminaires.

Dans ce paragraphe 1, M dénotera une surface et S une surface de Riemann compacte plongée dans M.

DÉFINITION 4. — *Soit $\Omega \in \Pi(M)$. On dit que S est une* solution persistante *de Ω si*

a) $S \subset M - \mathrm{Sing}(\Omega)$

b) *S est une feuille de $\Omega|(M - \mathrm{Sing}(\Omega))$*

c) *il existe un voisinage W de Ω dans $\Pi(M)$ tel que si $\Gamma \in W$ alors S est feuille de $\Gamma|(M - \mathrm{Sing}(\Gamma))$.*

Notons $T(M)$ (Resp. $T(S)$) le fibré tangent de M (Resp. S).

LEMME 1. — *Supposons que :*

i) *S est isomorphe à $\mathbb{P}_1$ et*

ii) *$T(M)|S$ se décompose* analytiquement *:*

$$T(M)|S = T(S) \oplus N$$

où N est un fibré vectoriel holomorphe de dimension 1 de base S.

Soit $\Omega \in \Pi(M)$ tel que $S \subset M - \mathrm{Sing}(\Omega)$ et S est une feuille de $\Omega|(M - \mathrm{Sing}(\Omega))$.

Alors S est solution persistante de $\Omega|U$ pour tout voisinage ouvert U de S dans M.

Exemple 1. — Soit K une surface de Riemann compacte non-isomorphe à $\mathbb{P}_1$. Alors, il existe $\omega \neq 0$ 1-forme holomorphe sur K. Soit D un disque de centre $0 \in \mathbb{C}$. Soient $M = K \times D$, $S = K \times \{0\}$, $p_1 : M \to K$ et $p_2 : M \to D$ les projections, $\Omega \in \Pi(M)$ défini par $p_2^*(dz) = 0$ où z est la coordonnée dans D. Ω n'a pas de point singulier et ses feuilles sont $K \times \{z\}$, $z \in D$. Soit $\Omega_\lambda \in \Pi(M)$ défini par

$$p_2^*(dz) + \lambda p_1^*(\omega) = 0 \qquad \text{avec} \;\; \lambda \in \mathbb{C}, \;\; \lambda \neq 0.$$

(Cette équation définit bien un système de Pfaff à singularités isolées puisque $p_2^*(dz) + \lambda p_1^*(\omega)$ n'est pas la forme nulle.)

Alors, $S \subset M - \mathrm{Sing}(\Omega_\lambda)$ n'est pas feuille de Ω_λ et $\Omega_\lambda \to \Omega$ quand $\lambda \to 0$. Ainsi S n'est pas persistante pour Ω.

Par contre, d'après le lemme 1, S est persistante si K est isomorphe à $\mathbb{P}_1$.

Exemple 2. — Si L est une droite dans $\mathbb{P}_2$, alors la condition ii) du lemme 1 est satisfaite, puisque L est transverse aux droites passant par un point $Q \notin L$. Si on éclate dans $\mathbb{P}_2$ un point $P \in L$, la transformée stricte $\widehat{L}$ de L conserve cette propriété (on relève les droites passant par Q différentes de la droite PQ et on complète par la droite exceptionnelle).

Soit $\Omega \in \Pi(\mathbb{P}_2)$ tel que L est une solution algébrique de Ω, Ω n'a qu'un point singulier P sur L et ce point est dicritique (au sens que si on éclate P dans $\mathbb{P}_2$, le transformé strict $\widehat{\Omega}$ de Ω n'a aucun point singulier sur la droite exceptionnelle). Alors $\widehat{L}$ est une solution persistante de $\widehat{\Omega}$, d'après le lemme 1.

Le lemme 1 est conséquence immédiate du suivant.

LEMME 2. — *Dans les hypothèses du lemme 1, soit* $U \supset S$ *un ouvert et soit* $\Lambda \in \Pi(U)$ *tel que* $S \subset U - \mathrm{Sing}(\Lambda)$ *et* $\Lambda_x \neq N_x$ *pour tout* $x \in S$ *(où* $x \to \Lambda_x$ *est le champ de droites définit par* Λ *dans* $U - \mathrm{Sing}(\Lambda)$*). Alors* S *est solution algébrique de* Λ.

La démonstration du lemme 2 s'appuie sur le

LEMME 3. — *Dans les hypothèses du lemme 1, soit* $PT(M)$ *le fibré en droites projectives associé à* $T(M)$*. Soit* $E = PT(M)|S - \{N_x; x \in S\}$.

Alors E *est un fibré analytique à fibre type* $\mathbb{C}$ *sur* S*, analytiquement isomorphe à* $N \otimes T(S)^*$.

Preuve du lemme 3. — Soient $\mu \in N_x$, $\varphi \in T_x(S)^*$, $x \in S$. L'isomorphisme est défini par

$$\mu \otimes \varphi \longrightarrow \{\varphi(v)\mu + v \ ; \quad v \in T_x(S)\} \in E_x.$$

□

Preuve du lemme 2. — La correspondance $x \to \Lambda_x$ définit une section analytique de E. Pour prouver que S est encore feuille de $\Lambda|U - \mathrm{Sing}(\Lambda)$ il suffit de prouver que cette section est identique à la section $x \to T_x(S)$.

Supposons que ces sections ne soient pas identiques. Alors, d'après le lemme 3, $N \otimes T(S)^*$ admettrait une section analytique différente de la section nulle. Donc, l'indice de auto-intersection de la section nulle serait ≥ 0. Alors,

$$\langle c_1(N \otimes T(S)^*), [S]\rangle \geq 0$$

où $[S]$ est la classe fondamentale de S et c_1 est la première classe de Chern.

D'autre part, comme S est isomorphe à $\mathbb{P}_1$, on a :

$$\langle c_1(N \otimes T(S)^*), [S]\rangle = \langle c_1(N), [S]\rangle - \langle c_1(S), [S]\rangle = \langle c_1(N), [S]\rangle - 2.$$

Mais, d'après la formule de Camacho-Sad [C-S],

$$\langle c_1(N), [S]\rangle = 0$$

et on arrive à une contradiction. □

2. Preuve du Théorème.

Soit N une surface géométriquement réglée telle qu'il existe un morphisme birrationnel $f : M \to N$. Alors, il existe un ensemble fini $F \subset N$ tel que $f : U \to V$ est un isomorphisme, où $V = N - F$ et $U = f^{-1}(V)$.

Soit $p : N \to C$ un morphisme lisse, où C est une courbe projective lisse, dont les fibres sont isomorphismes à $\mathbb{P}_1$. Alors, p est une fibration analytiquement localement triviale ([B], th. 3.4).

Soit $\Omega \in \Pi(N)$ dont les feuilles sont les fibres de p.

Soit $A \subset C$ un ouvert connexe non-vide tel que $W = p^{-1}(A) \subset V$ et que $p_{|W} : W \to A$ soit analytiquement trivial. Au moyen d'une trivialisation on obtient un champ analytique de droites tangentes $x \to N_x$ sur W transverse aux fibres.

Soit $B \subset C$ un ouvert non-vide tel que $\overline{B} \subset A$. Soit $W' = p^{-1}(B)$. Comme $\overline{W}' \subset W$ est compact, pour tout $\Lambda \in \Pi(W)$ assez proche de $\Omega|W$ on aura :

a) Λ n'a pas de point singulier dans W' et

b) $\Lambda_x \neq N_x$ pour tout $x \in W'$.

D'après le lemme 2 appliqué à $p^{-1}(y)$ pour chaque $y \in B$, on a que $p^{-1}(y)$ est aussi feuille de Λ. Alors $\Omega|W' = \Lambda|W'$. Donc $\Omega = \Lambda$. Ceci montre que $\Omega|W$ est rigide. Donc, $f^*(\Omega)|f^{-1}(W)$ est rigide, puisque $f : U \to V$ est un isomorphisme et $W \subset V$. Donc, $f^*(\Omega)$ est rigide. En plus, $f^{-1}(p^{-1}(y))$ est une feuille de $f^*(\Omega)$ pour chaque $y \in A$. Donc, $f^*(\Omega)$ possède des solutions algébriques. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[LN] A. LINS NETO, Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two, J. Differential Geometry, 26 (1987), 1–31.

[J] J.-P. JOUANOLOU, Equations de Pfaff algébriques, Lecture Notes in Math. Springer Verlag, vol. 708, 1979.

[B] A. BEAUVILLE, Surfaces Algébriques Complexes, Astérisque, vol. 54 (1978).

[C-S] C. CAMACHO et P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math., 115 (1982), 579–595.

Manuscrit reçu le 15 juin 1993,
révisé le 30 août 1993.

L.G. MENDES,
R. Vicente da Fontoura 1087/4
Porto Alegre, RS 90630-000 (Brésil).

M. SEBASTIANI,
Rua Cristiano Fischer 120/207
Porto Alegre, RS 91410-000 (Brésil).