

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ VIELI
Intégrales trigonométriques et pseudofonctions

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 1 (1994), p. 197-211

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_1_197_0

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES ET PSEUDOFONCTIONS (*)

par F.J. GONZÁLEZ VIELI

I. Introduction.

En 1963, Kahane et Salem établissent une caractérisation des fermés d'unicité sur \mathbb{T} en termes de support de pseudofonctions ([KS] chap. V). Pour ce faire ils démontrent l'équivalence suivante : si $S \in PF(\mathbb{T})$ et E est un fermé de \mathbb{T} , alors $\text{supp } S \subset E$ si et seulement si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N \widehat{S}(k) e^{2\pi i k t} = 0$ quel que soit t dans $\mathbb{T} \setminus E$.

Dans ce travail, nous démontrons un analogue de cette équivalence sur \mathbb{R}^n :

THÉORÈME. — Soient $S \in PM(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{S}(t) = o(\|t\|^{1-n})$ à l'infini et E un fermé de \mathbb{R}^n . Alors $\text{supp } S \subset E$ si et seulement si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \widehat{S}(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Nous restreindrons notre démonstration au cas $n \geq 2$. En effet, pour $n = 1$ les idées de Kahane et Salem s'adaptent aisément. Par contre, en plusieurs variables il n'existe pas d'analogue direct au lemme de Schwarz sur la deuxième dérivée symétrique (cf. [AW]); aussi avons-nous utilisé le laplacien intégral (employé par exemple par Shapiro [Sh]) et la fonction

(*) Ce travail a pu être réalisé grâce à une bourse de la Royal Society dans le cadre de son "European Science Exchange Programme".

Mots-clés : Pseudofonctions – Intégrales trigonométriques – Fonction de Riemann - Laplacien intégral.

Classification A.M.S. : 42B10.

de Riemann qui découle de ce choix. Cependant la démarche générale de Kahane et Salem a été maintenue (voir [Ba], [Z], [KS], [KL]).

2. Définitions, notations.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nous notons sa transformée de Fourier

$$\widehat{f}(y) = \mathcal{F} f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x|y)} dx.$$

L'ensemble $A(\mathbb{R}^n) = \{\mathcal{F} f \mid f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ muni de la norme $\|\mathcal{F} f\|_A = \|f\|_1$ est une algèbre de Banach. Son dual est noté $PM(\mathbb{R}^n)$: c'est l'ensemble des *pseudomesures* sur \mathbb{R}^n .

L'application \mathcal{F} de $L^1(\mathbb{R}^n)$ sur $A(\mathbb{R}^n)$ se transpose en une application, toujours notée \mathcal{F} , de $PM(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vu comme le dual de $L^1(\mathbb{R}^n)$: si $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = \mathcal{F} f \in A(\mathbb{R}^n)$,

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} T(t) f(t) dt.$$

Une pseudomesure T est dite nulle sur un ouvert U de \mathbb{R}^n si, quelle que soit $\varphi \in A(\mathbb{R}^n)$ avec $\text{supp } \varphi \subset U$ (ce que nous notons $\varphi \in A(U)$), $T(\varphi) = 0$. Le support de la pseudomesure T , noté $\text{supp } T$, est alors le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est nulle .

Étant donnés $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in A(\mathbb{R}^n)$, on peut définir une pseudomesure, notée φT , sur \mathbb{R}^n en posant $(\varphi T)(\psi) = T(\varphi\psi)$; on a $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(y) \neq 0\} \cap \text{supp } T \subset \text{supp } \varphi T \subset \text{supp } T \cap \text{supp } \varphi$.

On appelle *pseudofonction* toute pseudomesure dont la transformée de Fourier est une fonction continue disparaissant à l'infini; on note $PF(\mathbb{R}^n)$ leur ensemble. (Sur tout ceci, voir [Be].)

Nous notons $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ celui des distributions tempérées.

Une fonction f localement intégrable sur \mathbb{R}^n définit une distribution, que nous notons $[f]$, par, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$[f](\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(t) dt.$$

Via [], nous avons les inclusions, pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part \mathcal{F} est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même; elle se transpose donc en un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, d'inverse noté $\overline{\mathcal{F}}$.

Par suite toute pseudomesure T , de transformée de Fourier $\mathcal{F}T = \tau \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, s'identifie à la distribution tempérée $\overline{\mathcal{F}}([\tau])$; en particulier, la distribution $\overline{\mathcal{F}}([\tau])$ est nulle sur un ouvert U si et seulement si c'est le cas pour la pseudomesure T .

3. Bref rappel sur les fonctions de Bessel.

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν ($\nu \in \mathbb{R}_+$) est définie par (cf. [W])

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Nous nous intéresserons à son comportement sur \mathbb{R}_+ . Remarquons d'abord que $|J_\nu(x)| \leq 1$ pour $x \geq 0$.

À l'aide des relations

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}(z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),$$

des majorations sur \mathbb{R}_+ $J_0(x) \leq 1$, $J_{1/2}(x) \leq \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$ et d'une double récurrence nous obtenons la

PROPOSITION 1. — Soit $\nu \in 1/2(\mathbb{Z}_+)$; alors, pour $x \geq 0$ et quel que soit l'entier $m \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \leq J_\nu(x) \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

4. Fonction de Riemann et laplacien intégral.

DÉFINITION 1. — Soit τ une fonction bornée sur \mathbb{R}^n et appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n, (1 + \|x\|^2)^{-1} dx)$. Nous définissons la fonction de Riemann associée à τ , notée F_τ (ou F lorsque aucune équivoque n'est possible) par

$$F(x) = - \int_{\|t\| \leq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)} - 1 - 2\pi i(x|t)}{4\pi^2 \|t\|^2} \tau(t) dt - \int_{\|t\| \geq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)}}{4\pi^2 \|t\|^2} \tau(t) dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque. — La condition « $\tau \in L^1(\mathbb{R}^n, (1 + \|x\|^2)^{-1} dx)$ », résumée dorénavant par $\tau \in \mathcal{I}(-2)$, nous assure que la fonction de Riemann F_τ associée à τ est continue sur \mathbb{R}^n .

DÉFINITION 2. — Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $x \in U$ et g une fonction définie sur U . On appelle laplacien intégral de g en x la limite, si elle existe,

$$\tilde{\Delta}g(x) = \lim_{r \rightarrow 0_+} \frac{2(n+2)}{r^2} \left(\frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(0,r)} g(x+y) dy - g(x) \right),$$

avec la notation $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — de sorte que $\frac{r^n}{n}\omega_n$ est égal au volume de la boule $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon r .

Remarque. — Si g est C^∞ au voisinage de x , on vérifie que $\tilde{\Delta}g(x)$ existe et est égal au laplacien usuel de g en x , $\Delta g(x)$. Si g n'est que continue, on a l'important résultat suivant, dû à Szpilrajn [Sz] :

PROPOSITION 2. — Soit g une fonction continue sur un ouvert U de \mathbb{R}^n . Supposons que son laplacien intégral, $\tilde{\Delta}g$, soit identiquement nul sur U . Alors g est harmonique sur U .

5. Le premier lemme de Riemann.

La fonction de Riemann associée à τ a été construite de manière à ce que, calculé formellement, son laplacien (au sens usuel) « vaille » $\int_{\mathbb{R}^n} \tau(t) e^{2\pi i(x|t)} dt$. Nous allons montrer que, dans un cas précis, il est possible de donner un sens à cet heuristique.

Prenons τ dans $\mathcal{I}(-2)$ et x dans \mathbb{R}^n . Supposons que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} e^{2\pi i(x|t)} \tau(t) dt$$

existe et vaille I .

Calculons le laplacien intégral de F_τ en x .

Comme F est continue sur \mathbb{R}^n , nous pouvons l'intégrer sur la boule $B(x, r)$; alors

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x)) dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau(t)}{4\pi^2 \|t\|^2} e^{2\pi i(x|t)} \left(\int_{B(0,r)} (1 - e^{2\pi i(y|t)}) dy \right) dt \end{aligned}$$

en utilisant Fubini et l'identité $\int_{B(0,r)} (y|t) dt = 0$.

Nous avons ([SW] p. 155)

$$\int_{B(0,r)} e^{2\pi i(y|t)} dy = \left(\frac{r}{\|t\|} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi \|t\| r),$$

cette égalité se prolongeant par continuité en $t = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x)) dy \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau(t)}{4\pi^2 \|t\|^2} e^{2\pi i(x|t)} \left(\frac{r^n}{n} \omega_n - \left(\frac{r}{\|t\|} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi \|t\| r) \right) dt \end{aligned}$$

ce qui est égal, en passant aux coordonnées polaires, à

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 \rho^2} \left(\frac{r^n}{n} \omega_n - \left(\frac{r}{\rho} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi \rho r) \right) h(\rho) \rho,$$

où nous avons posé $h(\rho) = \int_{S^{n-1}} \tau(\rho y) e^{2\pi i(x|\rho y)} \rho^{n-1} d\sigma(y)$.

Notons

$$V_r(a) = \frac{1}{4\pi^2 a^2} \left(\frac{r^n}{n} \omega_n - \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a) \right);$$

à l'aide du développement limité de $J_{\frac{n}{2}}$ à l'ordre $\frac{n}{2} + 2$, on voit que

$$V_r(0) = \omega_n \frac{r^n}{n} \frac{r^2}{2(n+2)}.$$

Posons $v_r(a) = V_r'(a)$; au vu de la relation $J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z)$, il vient

$$v_r(a) = \frac{-r^n \omega_n}{2n\pi^2 a^3} - \frac{r^{\frac{n}{2}+1}}{2\pi a^{\frac{n}{2}+2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r a) + \frac{(2+n)r^{\frac{n}{2}}}{4\pi^2 a^{\frac{n}{2}+3}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a)$$

et, toujours avec les développements limités, on a que, au voisinage de 0, $v_r(a) = O(a)$.

Par conséquent, quel que soit $M > 0$, nous pouvons faire l'intégration par parties suivante :

$$\int_0^M V_r(a) h(a) da = \left(\int_0^u h(s) ds \right) V_r(u) \Big|_{u=0}^M - \int_0^M \left(\int_0^a h(s) ds \right) v_r(a) da.$$

Or d'une part

$$\begin{aligned} \int_0^a h(s) ds &= \int_0^a ds \int_{S^{n-1}} \tau(sy) e^{2\pi i(x|sy)} s^{n-1} d\sigma(y) \\ &= \int_{\|t\| \leq a} \tau(t) e^{2\pi i(x|t)} dt \end{aligned}$$

et donc, puisque par hypothèse $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} e^{2\pi i(x|t)} \tau(t) dt$ existe, la fonction $a \mapsto \int_0^a h(s) ds$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

D'autre part, parce que $|J_\nu(y)| \leq 1$ si $y \geq 0$, $\lim_{M \rightarrow +\infty} V_r(M) = 0$ et v_r est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Il suit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 a^2} \left(\frac{r^n}{n} \omega_n - \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a) \right) h(a) da \\ = - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a h(s) ds \right) v_r(a) da. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0_+} \frac{2(n+2)}{r^2} \left(\frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x)) dy \right) \\ = \lim_{r \rightarrow 0_+} - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a h(s) ds \right) \frac{2n(n+2)}{r^{n+2} \omega_n} v_r(a) da. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} g_r(a) = \frac{2n(n+2)}{r^{n+2} \omega_n} v_r(a) &= \frac{-(n+2)}{\pi^2 r^2 a^3} - \frac{n(n+2)}{\omega_n \pi r^{\frac{n}{2}+1} a^{\frac{n}{2}+2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r a) \\ &+ \frac{n(n+2)^2}{\omega_n 2\pi^2 r^{\frac{n}{2}+2} a^{\frac{n}{2}+3}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 1, on montre aisément que $-\pi^2 r^2 a \leq g_r(a) \leq \frac{n+2}{n+4} \pi^2 r^2 a$ pour tout $a > 0$.

Par conséquent,

1) $\lim_{r \rightarrow 0^+} g_r(a) = 0$ quel que soit $a > 0$;

2) si nous supposons $r \leq 1$, alors $|g_r|$ est majorée sur \mathbb{R}_+ par la fonction localement intégrable $\pi^2 a$.

Nous avons de plus, en posant $u = ra$,

$$\int_0^{+\infty} |g_r(a)| da = \int_0^{+\infty} |g_1(u)| du$$

et, avec le même changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g_r(a) da &= \int_0^{+\infty} g_1(u) du \\ &= \frac{2n(n+2)}{\omega_n} \int_0^{+\infty} v_1(a) du \\ &= \frac{2n(n+2)}{\omega_n} V_1(u) \Big|_0^{+\infty} = -1. \end{aligned}$$

Pour conclure, il nous suffit d'utiliser la proposition suivante, qui est un équivalent, pour l'intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}_+ , d'une condition, dite « de Toeplitz », sur les matrices infinies (voir [KL] p. 28).

PROPOSITION 3. — Soient $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R}_+ telles que

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ presque partout;

ii) il existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ telle que $|f_n| \leq f$ presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$;

iii) il existe $K > 0$ telle que $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

Alors, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t)$ existe et vaut B , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} b(t) f_n(t) dt = B$.

En effet, la suite $(-g_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ en vérifie les conditions i) à iv) et par

hypothèse $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a h(s) ds$ existe et vaut I . Ainsi

$$\lim_{r \rightarrow 0_+} - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a h(s) ds \right) g_r(a) da = I ;$$

c'est-à-dire

THÉORÈME 1 (Premier lemme de Riemann). — Soient τ dans $\mathcal{I}(-2)$ et x dans \mathbb{R}^n tels que la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} e^{2\pi i(x|t)} \tau(t) dt$ existe et vaille I . Alors le laplacien intégral $\tilde{\Delta}F$ de la fonction de Riemann F associée à τ existe en x et vaut I .

6. Fonction de Riemann et pseudomesure.

Prenons $\sigma \in \mathcal{I}(-2)$. La fonction de Riemann F associée à σ s'écrit $F = k + l$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$k(x) = - \int_{\|t\| \leq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)} - 1 - 2\pi i(x|t)}{4\pi^2 \|t\|^2} \sigma(t) dt \quad \text{et}$$

$$l(x) = - \int_{\|t\| \geq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)}}{4\pi^2 \|t\|^2} \sigma(t) dt.$$

On vérifie, avec l'aide du critère habituel de dérivation sous le signe intégral, que le laplacien (usuel) de k existe sur tout \mathbb{R}^n , est continu et vaut

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x|t)} \sigma(t) \chi_{B(0,1)}(t) dt = \overline{\mathcal{F}}(\sigma \chi_{B(0,1)})(x).$$

Quant à l , nous voyons que $l = \overline{\mathcal{F}}\mu$, où la fonction $\mu(t) = \frac{-\sigma(t)}{4\pi^2 \|t\|^2} \chi_{B(0,1)^c}$ est par hypothèse intégrable sur \mathbb{R}^n .

En passant aux distributions définies par ces fonctions, il vient $[l] = \overline{\mathcal{F}}[\mu]$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il est toujours possible de dériver des distributions; donc, en particulier,

$$\begin{aligned} \Delta[l] &= \Delta \overline{\mathcal{F}}([\mu]) = \overline{\mathcal{F}}(-4\pi^2 \|t\|^2 [\mu]) \\ &= \overline{\mathcal{F}}([-4\pi^2 \|t\|^2 \mu]) \\ &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma \cdot \chi_{B(0,1)^c}]). \end{aligned}$$

Comme k est continue, elle définit une distribution et F aussi. Alors $[F] = [k] + [l]$; d'où :

$$\begin{aligned}
 \Delta[F] &= \Delta[k] + \Delta[l] \\
 &= [\Delta k] + \Delta[l] \text{ (parce que } \Delta k \text{ est continue)} \\
 &= [\overline{\mathcal{F}}(\sigma \chi_{B(0,1)})] + \overline{\mathcal{F}}([\sigma \chi_{B(0,1)^c}]) \\
 &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma \chi_{B(0,1)}]) + \overline{\mathcal{F}}([\sigma \chi_{B(0,1)^c}]) \\
 &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma]).
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

THÉORÈME 2. — Soient S une pseudomesure sur \mathbb{R}^n avec $\sigma \in \mathcal{I}(-2)$ et U un ouvert de \mathbb{R}^n . Alors S est nulle sur U si et seulement si la fonction de Riemann F associée à σ est harmonique sur U .

Preuve. — Si S est nulle sur U , la distribution $\overline{\mathcal{F}}([\sigma])$ est aussi nulle sur U donc, vu les calculs ci-dessus, la distribution $[F]$ est harmonique sur U , ce qui implique, par hypoellipticité du laplacien ([D] p. 127), que F est une fonction harmonique sur U . Réciproquement, si F est harmonique sur U , $[F]$ est aussi harmonique sur U , donc $\overline{\mathcal{F}}([\sigma])$ est nulle sur U et de même pour la pseudomesure S .

Remarques. — Le lecteur pourra comparer cette démonstration à celle classique sur \mathbb{T} ([KL] th. II.2.2), passant par la variable complexe et, somme toute, moins naturelle.

Le théorème est encore vrai en supposant seulement $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, à condition de définir F comme la distribution $[k] + \overline{\mathcal{F}}([\mu])$.

7. Localisation.

Notation. — Nous noterons $\text{Decr}(1 - n)$ l'ensemble des fonctions f bornées sur \mathbb{R}^n et telles que $f(x) = o(\|x\|^{1-n})$ à l'infini, ou encore

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n-1} \left(\sup_{\|y\|=r} |f(y)| \right) = 0.$$

On vérifie aisément que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \text{Decr}(1 - n) \subset \mathcal{I}(-2)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \star \text{Decr}(1 - n) \subset \text{Decr}(1 - n)$.

Donnons-nous maintenant, pour le reste du paragraphe, une fonction λ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui soit identique à 1 sur $B(0, 1)$. Nous posons $\Theta(y) = \mathcal{F} \lambda(y)$ et $\Theta_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n} \Theta(y/\varepsilon)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, avec $\varepsilon > 0$.

PROPOSITION 4. — Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \text{Decr}(1-n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $N_0(\eta) > 0$ tel que

$$N > N_0 \Rightarrow \left| \int_{\|t\| \leq N} \left(\tau \star (\mathcal{F}\varphi - \varphi(x)\Theta_{(\varepsilon)}) \right) (t) e^{2\pi i(x|t)} dt \right| < \eta$$

quel que soit $0 < \varepsilon \leq 1$ avec $\varepsilon\|x\| < 1$.

Preuve. — Remarquons d'abord que $\overline{\mathcal{F}}\Theta_{(\varepsilon)}(y) = \lambda(\varepsilon y)$ donc $\overline{\mathcal{F}}\Theta_{(\varepsilon)} = 1$ sur $B(0, 1\varepsilon)$.

Notons $E(x)$ l'ensemble $\{\varepsilon \in]0, 1] : \varepsilon\|x\| < 1\}$ et, pour tout $\varepsilon \in E(x)$, posons $\Psi_\varepsilon = \mathcal{F}\varphi - \varphi(x)\Theta_{(\varepsilon)}$. Clairement

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}\Psi_\varepsilon(x) &= \varphi(x) - \varphi(x)\overline{\mathcal{F}}\Theta_{(\varepsilon)}(x) \\ &= \varphi(x) - \varphi(x) = 0. \end{aligned}$$

Fixons momentanément $N > 0$. Nous avons :

$$\int_{\|t\| \leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = \int_{B(0, N)} e^{2\pi i(x|t)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau(y) \Psi_\varepsilon(t-y) dy \right) dt$$

ce qui est égal, par Fubini et en posant $u = t - y$, à

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau(y) e^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y, N)} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du \right) dy,$$

que nous décomposons en trois intégrales

$$\begin{aligned} &= \int_{B(0, N/2)} \tau(y) e^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y, N)} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du \right) dy \\ &\quad + \int_{C(0, N/2, N)} \tau(y) e^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y, N)} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du \right) dy \\ &\quad + \int_{B(0, N)^c} \tau(y) e^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y, N)} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du \right) dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

($C(0, r, R)$ désigne $B(0, R) \setminus B(0, r)$).

Nous nous contenterons de majorer en détail l'intégrale I_2 , les autres se traitant de manière semblable.

Notons d'abord que, puisque $\overline{\mathcal{F}}\Psi_\varepsilon(x) = 0$,

$$\int_{B(-y, N)} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du = - \int_{B(-y, N)^c} \Psi_\varepsilon(u) e^{2\pi i(x|u)} du.$$

Alors

$$|I_2| \leq \int_{C(0, N/2, N)} |\tau(y)| \left(\int_{B(-y, N)^c} |\Psi_\varepsilon(u)| du \right) dy.$$

Maintenant

$$\int_{B(-y, N)^c} |\Psi_\varepsilon(u)| du \leq \int_{B(-y, N)^c} |\mathcal{F}\varphi(u)| + |\varphi(x)| \cdot |\Theta_\varepsilon(u)| du$$

et

$$\begin{aligned} \int_{B(-y, N)^c} |\Theta_\varepsilon(u)| du &= \int_{B(-\frac{y}{\varepsilon}, \frac{N}{\varepsilon})^c} |\Theta(v)| dv \\ &\leq \int_{B(-y, N)^c} |\Theta(v)| dv, \end{aligned}$$

où nous avons posé $v = u/\varepsilon$ et utilisé le fait que $B\left(-\frac{y}{\varepsilon}, \frac{N}{\varepsilon}\right)^c \subset B(-y, N)^c$ vu que $\|y\| \leq N$ et $\varepsilon \leq 1$.

Parce que $\mathcal{F}\varphi$ et Θ sont à décroissance rapide, il existe finalement une constante $M > 0$ dépendant seulement de φ et Θ telle que, quels que soient $y \in C(0, N/2, N)$ et $\varepsilon \in E(x)$,

$$\int_{B(-y, N)^c} |\Psi_\varepsilon(u)| du \leq \int_{B(-y, N)^c} \frac{M}{1 + \|u\|^{2n}} du.$$

Toujours si $\|y\| \leq N$, $B(-y, N)^c \subset B(0, N - \|y\|)^c$. En passant aux coordonnées polaires cela donne :

$$\int_{B(-y, N)^c} |\Psi_\varepsilon(u)| du \leq M\omega_n \int_{N-\|y\|}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{1 + \rho^{2n}} d\rho.$$

Posons $\Pi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{1 + t^{2n}} dt$; c'est une fonction positive intégrable sur \mathbb{R}_+ . Avec cette notation

$$|I_2| \leq \int_{C(0, N/2, N)} |\tau(y)| \cdot M\omega_n \cdot \Pi(N - \|y\|) dy.$$

Passons en coordonnées polaires et posons $\sigma(\rho) = \sup_{\|y\|=\rho} |\tau(y)|$: il vient

$$|I_2| \leq M\omega_n^2 \int_{N/2}^N \Pi(N - \rho) \sigma(\rho) \rho^{n-1} d\rho.$$

Soit $K_{\frac{N}{2}} = \sup_{\rho \geq \frac{N}{2}} \rho^{n-1} \sigma(\rho)$; comme $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n-1} \sigma(r) = 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} K_{\frac{N}{2}} = 0$;

et

$$|I_2| \leq M\omega_n^2 K_{\frac{N}{2}} \int_0^{N/2} \Pi(s) ds \leq M\omega_n^2 K_{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \Pi(s) ds.$$

D'où l'existence de $N_2(\eta)$ tel que $N > N_2 \Rightarrow |I_2| < \eta/3$, quel que soit $\varepsilon \in E(x)$.

En procédant de même avec I_1 et I_3 , nous aboutissons à la conclusion.

Nous avons encore besoin de deux résultats. L'un, assez technique, est pris dans [SW] (p. 13) :

PROPOSITION 5. — Soient $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Posons $\psi(x) = \text{ess. sup}_{\|t\| \geq \|x\|} |\theta(t)|$.

Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} (\theta_{(\varepsilon)} \star f)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \theta(t) dt$$

en tout point de Lebesgue x de f , donc presque partout. (Avec $\theta_{(\varepsilon)}(y) = \varepsilon^{-n} \theta(y/\varepsilon)$.)

L'autre, très simple, est donné sans preuve :

LEMME 1. — Soit $\alpha : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

i) pour tout $\eta > 0$ il existe $n_0(\eta) \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha(n, k)| < \eta$ quels que soient $n \geq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$;

ii) $\lim_{k \in \mathbb{N}} \alpha(n, k)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\lim_{n \in \mathbb{N}} \left(\lim_{k \in \mathbb{N}} \alpha(n, k) \right) = 0$.

Avec ces deux résultats, nous pouvons démontrer la

PROPOSITION 6. — Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \text{Decr}(1 - n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} ((\tau \star \mathcal{F}\varphi)(t) - \varphi(x)\tau(t)) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0.$$

Preuve. — Nous allons employer le lemme 1 avec l'application $\alpha(N, 1/\varepsilon) = \int_{\|t\| \leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t) e^{2\pi i(x|t)} dt$.

En effet, la condition i) du lemme n'est autre que la proposition 4.

Pour la condition ii), utilisons la proposition 5 : nous avons $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Theta_{(\varepsilon)} \star \tau = \tau$ presque partout. Donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \tau \star \Psi_\varepsilon = (\tau \star \mathcal{F}\varphi) - \varphi(x)\tau$ presque

partout. De plus

$$\begin{aligned} \|\tau \star \Psi_\varepsilon\|_\infty &\leq \|\tau\|_\infty \cdot \|\Psi_\varepsilon\|_1 \leq \|\tau\|_\infty (\|\mathcal{F}\varphi\|_1 + |\varphi(x)| \cdot \|\Theta(\varepsilon)\|_1) \\ &= \|\tau\|_\infty (\|\mathcal{F}\varphi\|_1 + |\varphi(x)| \cdot \|\Theta\|_1). \end{aligned}$$

Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, quel que soit $N > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\|t\| \leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t) e^{2\pi i(x|t)} dt$$

existe et vaut

$$\int_{\|t\| \leq N} \left((\tau \star \mathcal{F}\varphi)(t) - \varphi(x)\tau(t) \right) e^{2\pi i(x|t)} dt :$$

c'est la condition ii). La conclusion en découle.

THÉORÈME 3 (Principe de localisation de Riemann). — Soit $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ avec $\tau = \widehat{T} \in \text{Decr}(1 - n)$. Si T est nulle sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , alors, pour tout $x \in U$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \tau(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0.$$

Preuve. — Soient $x_0 \in U$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(x_0) = 1$ et $\text{supp } \varphi \subset U$.

Posons $S = \varphi T$; $S \in PM(\mathbb{R}^n)$ et on vérifie que $\sigma = \widehat{S}$ est égale à $\tau \star \mathcal{F}\varphi$; donc $\sigma \in \text{Decr}(n - 1)$. La proposition 6 nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{E}) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} (\sigma - \varphi(x)\tau)(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0.$$

Par hypothèse, T est nulle sur U , c'est-à-dire $\text{supp } T \subset U^c$. Donc, vu que $\text{supp } \varphi T \subset \text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$, $\varphi T = S$ est nulle; d'où $\sigma = 0$ presque partout et (\mathcal{E}) se réduit à

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \varphi(x)\tau(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\varphi(x_0) = 1$, le théorème est établi.

8. Une équivalence.

THÉORÈME 4. — Soient $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{T}(t) = o(\|t\|^{1-n})$ à l'infini et E un fermé de \mathbb{R}^n . Alors $\text{supp} T \subset E$ si et seulement si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \widehat{T}(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0 \text{ quel que soit } x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

Preuve. — Si $\text{supp} T \subset E$, T est nulle sur l'ouvert E^c ; donc, par le théorème 3, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \widehat{T}(t) e^{2\pi i(x|t)} dt = 0$.

Réciproquement, si cette limite est nulle sur tout $\mathbb{R}^n \setminus E$, par le théorème 1 (premier lemme de Riemann) $\widehat{\Delta} F_\tau(x) = 0$ sur E^c (où $\tau = \widehat{T}$). De la proposition 2 il découle que F_τ est harmonique sur E^c , ce qui équivaut, d'après le théorème 2, à T nulle sur E^c , ou encore $\text{supp} T \subset E$.

Remarques. — Devançons la critique : pour $n \geq 3$, la condition $\widehat{T} \in \text{Decr}(1-n)$ implique que la pseudomesure T est ... une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nonobstant, même ainsi ce résultat paraît nouveau, du fait qu'il y a convergence partout et non pas seulement presque partout. On pourra comparer par exemple à [CS].

La condition $\tau \in \text{Decr}(1-n)$, introduite pour obtenir la proposition 4, devrait pouvoir être améliorée. Il est par contre certain que l'hypothèse $T \in PF(\mathbb{R}^n)$ ne suffirait pas pour obtenir l'équivalence du théorème. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , la transformée de Fourier de la mesure naturelle μ sur le cercle S^1 est $\widehat{\mu}(t) = 2\pi J_0(2\pi\|t\|)$; mais, au point $x = 0$, $\int_{\|t\| \leq N} \widehat{\mu}(t) e^{2\pi i(0|t)} dt = 2\pi N J_1(2\pi N)$, ce qui ne converge pas lorsque N tend vers l'infini.

Le théorème est aussi vrai pour $n = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AW] J.M. ASH and G.V. WELLAND, Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 163 (1972), 401–436.
- [Ba] N.K. BARY, *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [Be] J.J. BENEDETTO, *Spectral Synthesis*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [CS] A. CARBERY and F. SORIA, Almost-Everywhere Convergence of Fourier Integrals [...], *Revista Matemática Iberoamericana*, vol. 4, n°2 (1988), 319–337.
- [D] N.F. DONOGHUE, *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York, 1969.

- [KS] J.-P. KAHANE et R. SALEM, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris, 1963.
- [KL] A.S. KECHRIS & A. LOUVEAU, Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness, Cambridge University Press, 1987.
- [Sh] V.L. SHAPIRO, Fourier series in several variables, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 48–93.
- [SW] E.M. STEIN and G. WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.
- [Sz] E. SZPILRAJN, Remarques sur les fonctions sousesharmoniques, Annals of Math., 1933 (34), 588–594.
- [W] G.N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1922.
- [Z] A. ZYGMUND, Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1977.

Manuscrit reçu le 10 mars 1993.

F.J. GONZÁLEZ VIELI,
Institut de Mathématiques
Collège Propédeutique – UNIL
1015 Lausanne (Suisse).