

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DOMINIQUE CERVEAU

**Minimaux des feuilletages algébriques de  $\mathbb{C}\mathbb{D}(n)$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 43, n° 5 (1993), p. 1535-1543

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1993\\_\\_43\\_5\\_1535\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1535_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MINIMAUX DES FEUILLETAGES ALGÈBRIQUES DE $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$

par Dominique CERVEAU

---

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de codimension un sur l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ . On note  $\text{Sing } \mathcal{F}$  l'ensemble singulier de  $\mathcal{F}$ ; c'est un ensemble algébrique non vide de codimension supérieure ou égale à deux. Une variante du théorème de Chow affirme que  $\mathcal{F}$  est donné par une équation de Pfaff  $\omega = 0$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x) dx_i$$

où les  $a_i$  sont des polynômes homogènes de même degré  $\nu$  satisfaisant

- (i)  $\omega \wedge d\omega = 0$  (condition d'intégrabilité)
- (ii)  $\sum x_i a_i(x) = 0$  (condition d'Euler)
- (iii)  $\text{cod}(S(\omega) = \{x, a_i(x) = 0\}) \geq 2$ .

Si  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  désigne la projection canonique, alors  $\text{Sing } \mathcal{F} = \pi(S(\omega) - \{0\})$ .

**DÉFINITION.** — *Un sous-ensemble  $M \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(n) - \text{Sing } \mathcal{F}$  est un ensemble minimal s'il est compact dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n) - \text{Sing } \mathcal{F}$ , invariant par  $\mathcal{F}$  – i.e. si  $m \in M$  la feuille  $\mathcal{L}_m$  de  $\mathcal{F}$  par  $m$  est contenue dans  $M$  – et minimal au sens de l'inclusion.*

La question de l'existence de minimaux sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  est une question actuellement ouverte. C'est elle qui motive le présent travail.

---

*Mots-clés* : Feuilletages algébriques – Holonomie – Ensembles minimaux.  
*Classification A.M.S.* : 32L30 – 62S65 – 34A20.

### 1. Variétés de Lévi.

Soit  $M^{2n-1} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  une sous-variété lisse réelle de codimension réelle un. En chaque point  $m \in M^{2n-1}$  l'espace tangent  $T_m M^{2n-1} \subset T_m \mathbb{C}\mathbb{P}(n) \cong \mathbb{C}^n$  contient un unique hyperplan complexe  $E_m \cong \mathbb{C}^{n-1}$ ; si le champ de plan  $m \mapsto E_m$  est intégrable on dit que  $M^{2n-1}$  est une hypersurface de Lévi.

**THÉORÈME [L].** — *Il n'existe pas d'hypersurfaces de Lévi de l'espace  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  pour  $n \geq 3$ .*

Pour  $n = 2$  on ne sait pas si telles hypersurfaces existent.

### 2. Propriétés de l'ensemble minimal.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  et  $M$  un minimal de  $\mathcal{F}$ . Les propriétés suivantes sont établies ou se déduisent de [CLS] et [BLM].

**PROPOSITION.**

- 1) *L'ensemble  $M$  est d'intérieur vide;*
- 2)  *$M$  est unique, i.e.  $\mathcal{F}$  possède au plus un seul minimal;*
- 3) *Soit  $H \subset \mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  une hypersurface algébrique de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  alors  $H \cap M \neq \emptyset$ .*

**Remarque.** — Soient  $m \in M$  et  $\mathcal{L}_m$  la feuille de  $\mathcal{F}$  par  $m$ ; alors  $M = \overline{\mathcal{L}_m}$ .

**THÉORÈME.** — *Il existe  $m \in M$  tel que la feuille  $\mathcal{L}_m$  ait de l'holonomie hyperbolique.*

Le théorème indique que l'image du morphisme d'holonomie

$$\text{Hol} : \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

contient un élément  $f : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  tel que  $|f'(0)| < 1$ .

Une feuille  $\mathcal{L}_m$  satisfaisant la conclusion du théorème sera dite porteuse d'hyperbolicité.

### 3. Résultats.

On se propose d'établir le :

THÉORÈME. — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de codimension un de l'espace projectif  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ . Si  $\mathcal{F}$  possède un ensemble minimal  $M$  et si  $\mathcal{L}_m$  est une feuille porteuse d'hyperbolicité,  $\mathcal{L}_m \subset M$ , on a l'alternative suivante : ou bien

i)  $M$  est une hypersurface de Lévi

ou bien

ii) l'image du morphisme  $\text{Hol} : \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  est un groupe abélien linéarisable.

Évidemment si la dimension  $n$  est supérieure ou égale à 3 seule subsiste la partie ii) : les porteurs d'hyperbolicité ont leur holonomie abélienne linéarisable. Nous verrons de plus que dans le cas i)  $M$  est localement défini par l'annulation de la partie réelle d'une fonction holomorphe.

### 4. Secteurs de Nakai.

La description des groupes non résolubles de difféomorphismes faite par Isao Nakai dans [N] est l'argument essentiel de la démonstration du théorème.

Soit  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  un sous-groupe de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ ; on appelle séparatrice de  $G$  un germe de courbe analytique réelle  $\gamma \subset \mathbb{C}, 0$  invariant par  $G$ , i.e. invariant par tous les éléments de  $G$ . Si  $G$  a un nombre fini de séparatrices  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  on appelle secteurs de Nakai de  $G$  les composantes connexes du complément de  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  dans  $\mathbb{C}, 0$ .

Soit  $F$  un germe d'ensemble à l'origine de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $G$  agit densément sur  $F$  s'il existe un sous-groupe  $G_F \subset G$ ,  $G_F$  engendré par un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_N$  tels que :

1)  $G_F(F) \subset F$ .

2) Il existe des représentants  $\tilde{F}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_N, \tilde{g}_i$  définis au voisinage de  $\tilde{F}$  tels que pour tout point  $x \in \tilde{F}$  l'orbite de  $x$  suivant le pseudo-groupe  $\tilde{G}_F = \langle \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_N \rangle$  soit dense dans  $\tilde{F}$ .

Le résultat fondamental suivant est dû à Nakai.

THÉORÈME [N]. — Soit  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  un sous-groupe non résoluble. Alors ou bien  $G$  agit densément sur  $\mathbb{C}, 0$  ou bien  $G$  a un nombre fini de séparatrices  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Si  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  alors  $\gamma$  est holomorphiquement isomorphe à  $\{\text{Re } z^n = 0\}$ ; de plus  $G$  agit densément sur chaque secteur de Nakai et sur chaque composante connexe des séparatrices.

### 5. Sous-groupes résolubles de $\text{Diff } \mathbb{C}, 0$ .

On note  $\mathcal{H}_1$  le groupe des transformations homographiques fixant l'origine de  $\mathbb{C}$  :

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ z \longrightarrow \frac{az}{1+bz}, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C} \right\}$$

et  $\mathcal{H}_p$  son revêtement ramifié par  $z \mapsto z^p$  :

$$\mathcal{H}_p = \left\{ z \longrightarrow \frac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}}, \quad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}, \quad \sqrt[p]{1} = 1 \right\}.$$

THÉORÈME [CM] [N]. — Soit  $G$  un sous-groupe résoluble non abélien de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ ; alors  $G$  est formellement conjugué à un sous-groupe de  $\mathcal{H}_p$ , pour un certain  $p$ .

Notons  $E_{-1,1}$  le sous-groupe de  $\mathcal{H}_1$  engendré par  $z \mapsto -z$  et  $z \mapsto \frac{z}{1-z}$ , puis  $E_{\omega,p}$  le sous-groupe de  $\mathcal{H}_p$  engendré par  $z \mapsto \omega \cdot z$  et  $z \mapsto \frac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}}$  où  $\omega$  est une racine  $p^{\text{ième}}$  de  $-1$ .

Un sous-groupe de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  est dit exceptionnel s'il est formellement conjugué à l'un des groupes  $E_{\omega,p}$ .

THÉORÈME [CM]. — Soient  $G_i \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ ,  $i = 1, 2$  deux sous-groupes formellement conjugués par un difféomorphisme formel  $\hat{h}$ . Si  $G_1$  est non abélien et non exceptionnel alors  $\hat{h}$  converge.

On en déduit aisément le :

COROLLAIRE. — Soit  $G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  un sous-groupe résoluble non abélien; si  $G$  contient un élément hyperbolique alors  $G$  est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe de  $\mathcal{H}_p$  pour un certain  $p$ .

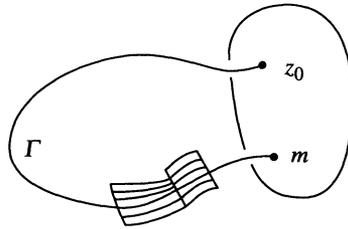
**6. Démonstration du théorème.**

Soient  $\mathcal{L}_m \subset M$  une feuille (porteuse d'hyperbolicité ou non) et  $D$  un disque centré en  $m$  transverse à  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $m$ . On note  $L_m = \mathcal{L}_m \cap D$ .

L'ensemble  $L_m - \{m\}$  s'accumule en  $m$  et est autosimilaire au sens suivant : si  $z_0 \in L_m - \{m\}$  il existe un difféomorphisme  $\varphi_{z_0} : V(m) \rightarrow V(z_0)$  d'un voisinage de  $m$  dans  $D$  dans un voisinage de  $z_0$  dans  $D$  tel que

$$\varphi_{z_0}(L_m \cap V(m)) = L_m \cap V(z_0).$$

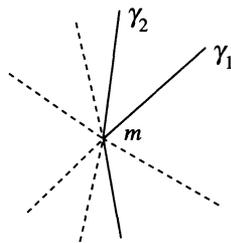
On constate ce point en traçant un chemin  $\Gamma$  joignant  $m$  à  $z_0$  dans  $\mathcal{L}_m$  et en écrivant le long de  $\Gamma$  la structure produit induite par  $\mathcal{F}$ .



De plus  $L_m$  est dense dans  $M \cap D$  et  $M \cap D$  est autosimilaire aux points de  $L_m$ .

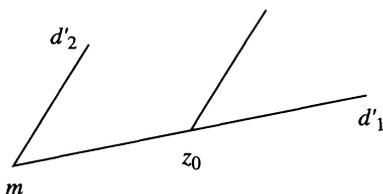
**PROPOSITION.** — Si l'image de  $\text{Hol} : \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \mapsto \text{Diff}(D, m)$  est non résoluble alors  $M$  est une hypersurface de Lévi.

*Preuve.* — On note  $G$  l'image de  $\text{Hol}$ . Par construction des difféomorphismes d'holonomie le germe  $M \cap D, m$  est invariant par l'action de  $G$ . En résulte que  $G$  ne peut agir densément sur  $D, m$ , sinon  $M$  serait d'intérieur non vide. Par suite,  $G$  possède un nombre fini de séparatrices  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  et de secteurs de Nakai  $S_1, \dots, S_{2n}$ . Comme  $G$  agit densément sur les secteurs de Nakai les intersections  $S_i \cap (M \cap D, m)$  sont vides, sinon encore une fois  $M$  serait d'intérieur non vide. Puisque  $G$  agit densément sur chaque composante connexe de  $\gamma - \{0\}$ ,  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ , nécessairement  $M \cap D, m$  est constitué d'un certain nombre d'adhérences de composantes connexes. Quitte à faire agir un difféomorphisme de  $D, m$  on peut suivant Nakai supposer que  $M \cap D, m$  est constitué d'un certain nombre de demi-droites.



AFFIRMATION. —  $M \cap D, m$  est une droite (un germe de).

Soit  $d'_1$  une demi-droite contenue dans  $M, m$  et  $z_0$  un point de  $L_m \cap d'_1$ ,  $z_0$  voisin de  $m$ . Supposons  $D \cap M, m = d'_{1,m}$ ; d'après l'autosimilarité ce cas ne peut se présenter; en effet,  $D \cap M, z_0$  contient un germe de droite. Par suite,  $M \cap D, m$  contient d'autres demi-droites. Soit  $d'_2$  une telle demi-droite. Montrons que  $d'_1$  et  $d'_2$  engendrent la même droite  $d$ . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; d'après l'autosimilarité  $M, z_0 \cap D$  contiendra une courbe isomorphe à deux demi-droites (fig.) non alignées. L'une de ces demi-droites, pour  $z_0$  suffisamment petit, entre dans un secteur de Nakai.



Ceci impliquant encore une fois que  $M$  est d'intérieur non vide.

Finalement  $D \cap M, m$  est défini par les zéros de la partie réelle d'une submersion définie en  $m$ ; par suite au voisinage de  $m$  il existe un polydisque  $U_m$  et une fonction holomorphe  $f_m \in \mathcal{O}(U_m)$ ,  $f_m$  submersion, telle que :

$$U_m \cap M, m = \{\operatorname{Re} f_m = 0\}.$$

La densité de  $\mathcal{L}_m$  dans  $M$  et la compacité de  $M$  permettent de sélectionner un recouvrement  $(U_i)$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  et des submersions holomorphes  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  tel que  $M \cap U_i = \{\operatorname{Re} f_i\}$ .

Ceci implique que  $M$  est une variété de Lévi. □

*Remarque.* — La proposition ci-dessus n'utilise pas l'hyperbolicité; elle est valable pour toute feuille de  $M$ .

PROPOSITION. — Soit  $\mathcal{L}_m \subset M$  une feuille porteuse d'hyperbolicité; si l'image de  $\text{Hol} : \Pi_1(\mathcal{L}_m, m) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  est résoluble non abélienne alors  $M$  est une hypersurface de Lévi.

Preuve. — Soit  $D$  un disque transverse à  $\mathcal{F}$  en  $m$  sur lequel on représente l'holonomie; soit  $G \subset \text{Diff}(D, m)$  l'image de  $\text{Hol}$ . D'après le corollaire du §5, on peut supposer que  $G \subset \mathcal{H}_p$ , et nous supposons pour plus de commodité que  $p = 1$ , les raisonnements n'étant pas altérés par une ramification. Puisque  $\mathcal{L}_m$  porte de l'hyperbolicité et est non abélienne on peut supposer que  $G$  contient les transformations  $z \mapsto \lambda z, |\lambda| < 1$  et  $z \mapsto \frac{z}{1-z}$ ; on note  $G_1$  le groupe engendré par ces deux éléments.

LEMME 1. — Si  $\lambda$  est réel, le groupe  $G_1$  agit densément sur les demi-droites  $\mathbb{R}_{,0}^+$  et  $\mathbb{R}_{,0}^-$ .

Preuve. — Comme  $|\lambda| < 1$  le groupe  $G_1$  contient de petits éléments paraboliques; le sous-groupe  $G'_1$  de  $G_1$  constitué des éléments paraboliques agit alors densément sur  $\mathbb{R}_{,0}^\pm$ . □

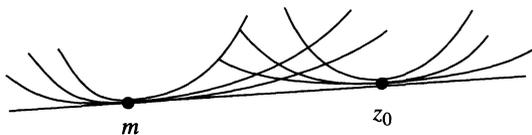
Remarquons que l'adhérence du groupe  $G'_1$  est précisément le groupe  $\left\{ \frac{z}{1-tz}, t \in \mathbb{R} \right\}$ . Ceci implique que l'adhérence de  $G_1$  est le groupe  $\left\{ \frac{\lambda^n z}{1-tz}, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ . En résulte que tout germe d'ensemble fermé  $F \subset \mathbb{C}, 0$  invariant par  $G_1$  est ou bien un demi-axe  $\mathbb{R}_{,0}^+$  ou  $\mathbb{R}_{,0}^-$ , ou bien contient une infinité d'arcs de cercles tangents en 0 à  $\mathbb{R}$  (fig.) contenant  $\mathbb{R}_{,0}^\pm$  dans leur adhérence. De plus,  $F$  contient  $\mathbb{R}_{,0}^+$  ou  $\mathbb{R}_{,0}^-$ .



LEMME 2. — Si  $\lambda$  est réel,  $M$  est une hypersurface de Lévi.

Preuve. — On adopte les notations du cas non résoluble. D'après la remarque suivant le lemme 1, on peut supposer que  $\mathbb{R}_{,0}^+$  est contenu dans  $M \cap D, m$  et par un argument déjà employé  $M \cap D, m$  contient toute la droite réelle  $\simeq \mathbb{R}_{,0}^+$  passant par  $m$ . Si  $M \cap D, m$  coïncide avec cette droite on conclut que  $M$  est de Lévi. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; alors en  $m$ ,  $M \cap D, m$  contient une infinité d'arcs de cercles. Mais si  $z_0 \in \mathbb{R}_{,0}^+$  est un point

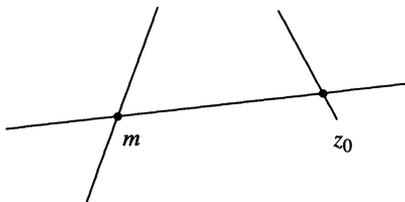
voisin de  $0 \simeq m$ ,  $z_0 \in \mathcal{L}_m$  alors par autosimilarité  $M \cap D$ ,  $z_0$  contient un arc de courbe  $\Delta$  distinct de  $\mathbb{R}_0^+$  (fig.); cet arc sera génériquement transverse aux arcs précédents.



L'adhérence de l'orbite de  $\Delta$  sous l'action de  $G_1$  contiendra alors un ouvert et  $M$  ne sera pas d'intérieur vide (ce passage est en fait un peu délicat car on ne doit pas travailler avec  $G_1$  agissant sur la sphère de Riemann entière, mais les objets étant purement locaux on doit faire les calculs d'orbites en restant dans un disque fixe).

LEMME 3. —  $\lambda$  est réel.

*Preuve.* — Si  $\lambda$  est non réel mais d'argument  $2\pi$ -rationnel, alors  $\lambda^n$  pour un certain  $n$  est réel. Par un argument similaire au lemme 2, on constate que  $M \cap D, m$  contient au moins deux droites.



Mais en un point  $z_0$  voisin de  $m$ , on retrouvera une telle configuration et de nouveau on montrera que  $M$  est d'intérieur non vide. Si  $\lambda$  est d'argument  $2\pi$ -irrationnel alors tout fermé  $F$  invariant par  $G_1$  en  $0$  est  $\mathbb{C}, 0$  tout entier, d'où le lemme.

Ceci achève la démonstration du théorème.

*Remarque.* — Notre résultat s'applique en fait à tout feuilletage holomorphe d'une variété holomorphe possédant une feuille contenue dans un minimal et porteuse d'hyperbolicité.

## BIBLIOGRAPHIE

- [BLM] Ch. BONATTI, LANGEVIN, R. MOUSSU, Feuilletages de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$  : de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels, Publ. Math. I.H.E.S., n° 75 (1992), 123–134.
- [CLS] C. CAMACHO, A. LINSNETO, P. SAD, Minimal set of foliations on complex projective spaces, Publ. Math. I.H.E.S., 68 (1988), 187–203.
- [CM] D. CERVEAU, R. MOUSSU, Groupes d'automorphismes de  $\mathbb{C}, 0$  et équations différentielles  $ydy + \dots = 0$ , Bull. S.M.F., 116 (1988), 459–488.
- [L] A. LINSNETO, Préprint, Impa Rio (1993).
- [N] I. NAKAI, Separatrix for conformal transformation groups of  $\mathbb{C}, 0$ , Preprint Hokkaido (1992).

Dominique CERVEAU,  
Université de Rennes I  
IRMAR  
Campus de Beaulieu  
F-35042 Rennes Cedex.