ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

M. E. A. HADJAR

Sur un problème d'existence relatif de formes de contact invariantes en dimension trois

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 4 (1992), p. 891-904

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_4_891_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42,4 (1992), 891-904

SUR UN PROBLÈME D'EXISTENCE RELATIF DE FORMES DE CONTACT INVARIANTES EN DIMENSION TROIS

par M.E. Amine HADJAR

---

0. Introduction.

Le problème d'existence d'une forme de contact sur une variété M_3 compacte, orientable de dimension 3, c'est-à-dire d'une forme de Pfaff ω telle que $\omega \wedge d\omega$ soit partout non nulle, a été résolu par J. Martinet [M2] en utilisant des constructions de formes de contact invariantes sur des tores pleins introduites par R. Lutz [L1]. Celui-ci a classifié dans [L2] les structures de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes sur les variétés compactes de dimension 3 munies d'une action libre du groupe $\mathbb{S}^1$.

On résout ici le problème d'existence relatif de formes de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes, où l'on impose la valeur de la forme induite sur une surface invariante donnée de M_3. Précisément, on aboutit au résultat suivant :

THÉORÈME 3.3. — *Soit un fibré principal en cercles $M_3 \to B_2$ avec M_3 et B_2 compactes et orientables, et une surface S réunion finie de tores disjoints munie de l'action libre du cercle sur le deuxième facteur $\mathbb{S}^1$ de chaque composante connexe $T_i = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ de S. Soit $p : S \to M$ un plongement tel que $p(S)$ soit $\mathbb{S}^1$-invariant, et qui respecte les deux actions. Si η est une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante sur S, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

Mots-clés : Formes de contact invariantes – Fibrés principaux.
Classification A.M.S. : 53C15 – 55R10 – 55Q05 – 58A15 – 58C27.

(i) *Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M, qui induit $p^*\omega = \eta$ sur S.*

(ii) *η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément.*

La démonstration requiert plusieurs lemmes techniques présentés selon le plan suivant :

Au §1, à partir d'une classification des germes de structures de contact le long d'une surface fermée (th. 1.2), on aboutit à une manière de raccorder deux formes de contact contiguës le long d'une surface et y induisant une même trace (lemme 1.3).

Au §2, on en tire une version particulière du théorème 3.3 sous l'hypothèse que η soit sans zéros (th. 2.1) en utilisant une technique rencontrée dans [L2].

Au §3, on construit un germe de formes de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes le long d'un voisinage fermé W de $p(S)$, $\mathbb{S}^1$-invariant et isomorphe à $S\times[-1,1]$, induisant η sur S et une 1-forme sans zéros sur ∂W (lemme 3.2). Moyennant le théorème 2.1 et le lemme 1.3, on pourra ainsi prolonger ce germe en une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante sur M (th. 3.3).

Tous les objets différentiels dont il est question sont supposés C^∞.

1. Raccordement de deux formes de contact contiguës le long d'une surface.

1.1. Dans chaque partie de cet article, on considère un fibré principal en cercles $M_3 \xrightarrow{q} B_2$, avec M_3 et B_2 éventuellement à bord compactes orientables de dimensions 3 et 2, une surface S réunion finie de tores disjoints, et un plongement $p : S \to M_3$ tel que $p(S)$ soit $\mathbb{S}^1$-invariant et $\partial M \cap p(S)$ soit ou bien vide ou bien réunion de tores $\mathbb{T}^2$. On considère l'action libre du cercle sur le deuxième facteur $\mathbb{S}^1$ de chaque composante connexe $T_i = \mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ de S, et η une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante sur S. On suppose que p respecte les deux actions, *i.e.* $p(x\cdot\theta) = p(x)\cdot\theta$ pour $x \in S$ et $\theta \in \mathbb{S}^1$.

L'action du groupe $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{T}^2$ induit une action libre sur tout produit $\mathbb{T}^2 \times I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, définie par :

$$(\theta_1, \theta_2, t)\cdot\theta = (\theta_1, \theta_2 + \theta, t) \quad \text{pour} \quad (\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{T}^2,\ t \in I \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^1 .$$

1.2. THÉORÈME. — *Soit $i : N \to N \times \mathbb{R}$ le plongement d'une surface N fermée et orientable, défini par $i(x) = (x, 0)$.*

(i) *Si ω et ω' sont deux formes de contact sur $N \times \mathbb{R}$, telles que $i^*\omega = \mu i^*\omega'$, où μ est une fonction sans zéros sur N, alors il existe un germe de difféomorphismes ϕ le long de $i(N)$, tel que*

$$\phi|_{i(N)} = \textit{identité} \quad \textit{et} \quad \omega \wedge \phi^*\omega' = 0 \ .$$

(ii) *Si, de plus, $N = \mathbb{T}^2$ et ω, ω' sont $\mathbb{S}^1$-invariantes, ϕ peut être choisi équivariant.*

La partie (i) est une conséquence d'un théorème de A. Givental (*cf.* [Ar]). On présente une preuve adaptée au cas invariant qui nous intéresse. La méthode de démonstration est basée sur une idée due à J. Moser [Mo]. Elle a souvent été utilisée, en particulier par J. Martinet, R. Lutz et A. Weinstein ([M1], [M2], [L1], [L2] et [We]).

Démonstration ([Ha]).

(i) On suppose $\mu = 1$ quitte à multiplier ω' par un facteur convenable.

— Cherchons tout d'abord, un difféomorphisme h d'un voisinage V de $i(N)$ sur un voisinage $h(V)$ et une fonction λ sans zéros sur V, tels que

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \lambda|_{i(N)} = 1 \ , \quad h|_{i(N)} = \text{ identité}, \\ h^*\omega'|_{i(N)} = \omega|_{i(N)} \ , \ \text{et} \\ h^*d(\lambda\omega')|_{i(N)} = d\omega|_{i(N)} \ . \end{cases}$$

Sachant que $i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega \wedge d\omega)\Big)$ et $i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\Big)$ sont des formes volumes sur N, il existe deux fonctions uniques α et ν sur N vérifiant respectivement

$$\text{(2)} \qquad \alpha \cdot i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\Big) = i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega \wedge d\omega)\Big)$$

et

$$\text{(3)} \qquad \nu \cdot i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\Big) = i^*\Big((\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega) \wedge (\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega')\Big) \ .$$

De même, il existe un unique champ de vecteurs X sur N tel que

$$\text{(4)} \qquad X\rfloor i^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}\rfloor(\omega' \wedge d\omega')\Big) = i^*\Big(\omega'(\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega - \omega(\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial t}\rfloor d\omega'\Big) \ .$$

Soit F son flot. On pose $h(x,t) = (F(x,t), \alpha(x)t)$ et $\lambda(x,t) = 1/(1+\nu(x)t)$, pour $x \in N$ et $|t| < \varepsilon$, ε étant un réel positif arbitraire suffisamment petit pour que $1+\nu(x)t$ soit non nulle sur $N\times]-\varepsilon,\varepsilon[$. On choisit ε de façon que h soit un difféomorphisme de $N\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ sur son image. Le couple (h,λ) vérifie alors (1).

— Les formes $\omega_t = \omega + t(h^*(\lambda\omega') - \omega)$, $t \in [0,1]$, restreintes à un ouvert U suffisamment petit de $N \times \mathbb{R}$ contenant $i(N)$ sont de contact. En effet, $\omega_t \wedge d\omega_t|_{i(N)} = \omega \wedge d\omega|_{i(N)}$ qui est sans zéros. On sait, d'après [M2], qu'il existe, pour chaque t, un unique champ de vecteurs Z_t (sur U), que l'on peut prolonger en un champ complet sur $N \times \mathbb{R}$, tel que

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_t(Z_t)=0\\ \omega_t\wedge(\dot\omega_t - L_{Z_t}\omega_t)=0\end{array}\right. \tag{5}$$

ce qui équivaut à $\omega_t \wedge h_t^*\omega_0 = 0$, où h_t est la famille de difféomorphismes obtenue par intégration de l'équation différentielle $\dfrac{du}{dt} = Z_t(u)$, avec $h_0 =$ identité. De plus, on a $\dot\omega_t|_{i(N)} = 0$; ainsi, de (5), on déduit

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_t(Z_t)|_{i(N)}=0\\ \omega_t\wedge(Z_t\rfloor d\omega_t)|_{i(N)}=0\ ,\end{array}\right.$$

et donc, grâce à la condition de contact sur ω_t, $Z_t|_{i(N)} = 0$, ou encore $h_t|_{i(N)} =$ identité. Le difféomorphisme $\phi = h \circ h_1^{-1}$ vérifie alors (i).

(ii) Les objets α et X sont $\mathbb{S}^1$-invariants, par conséquent h est équivariant. L'équivariance de h_1 résulte de l'invariance de Z_t due à celle des objets ν et h. Ainsi $\phi = h \circ h_1^{-1}$ est équivariant.

C.Q.F.D.

1.3. A présent, grâce au théorème 1.2, nous allons pouvoir raccorder deux formes de contact le long d'une surface fermée.

DÉFINITION. — *On dira que $p(S)$ sépare M en deux ouverts disjoints U_1 et U_2 si* $\overline{U}_1 \setminus U_1 = \overline{U}_2 \setminus U_2 = p(S)$ *et* $M = U_1 \cup U_2 \cup p(S)$.

Dans ce cas $\partial M \cap p(S)$ est vide.

LEMME. — *On suppose que $p(S)$ sépare M en deux ouverts disjoints U_1 et U_2. Soient ω_1 et ω_2 deux formes de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes, de même orientation et définies sur des voisinages de $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$. Si $p^*\omega_1 = \mu p^*\omega_2$, où μ est une fonction strictement positive, alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M, égale à ω_1 sur un voisinage de $\overline{U}_1$ et à ω_2 sur U_2 sauf peut-être sur un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$.*

Démonstration. — Sachant qu'il existe un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$, $\mathbb{S}^1$-invariant et isomorphe au fibré trivial $S \times \mathbb{R}$ de groupe $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme envoyant tout point $p(x)$ sur $(x, 0)$, le théorème 1.2 nous assure l'existence d'un difféomorphisme équivariant ϕ d'un voisinage ouvert $\mathbb{S}^1$-invariant et arbitrairement petit V de $p(S)$, sur un voisinage $\phi(V)$, et d'une fonction λ $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur V, tels que $\phi|_{p(S)}$ = identité et $\omega_1 = \lambda\phi^*\omega_2$ sur V. On choisit V difféomorphe à $S\times]-1,1[$; comme $\lambda \circ p = \mu > 0$, on en déduit que $\lambda > 0$. Les formes $\omega_1 \wedge d\omega_1$ et $\omega_2 \wedge d\omega_2$ ont la même orientation, par conséquent ϕ est positif. Il existe un voisinage compact V' de $p(S)$, $V' \subset V$, et un difféomorphisme $\tilde{\phi}$ de M équivariant tels que $\tilde{\phi}|_{V'} = \phi|_{V'}$ et $\tilde{\phi}$ = identité en dehors de V. Soit $\tilde{\lambda}$ une fonction $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur M telle que $\tilde{\lambda}|_{V'} = \lambda|_{V'}$ et $\tilde{\lambda} = 1$ en dehors de V.

On conclut en posant

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 & \text{sur } \overline{U}_1 \\ \omega = \tilde{\lambda}\tilde{\phi}^*\omega_2 & \text{sur } U_2 \; . \end{cases}$$

La forme de contact ω est $\mathbb{S}^1$-invariante sur M ; elle coïncide avec ω_1 sur $U_1 \cup V'$ et avec ω_2 sur $U_2 \setminus V$.

C.Q.F.D.

2. Le cas où η est sans zéros.

On démontre le résultat général (théorème 3.3) en se ramenant au cas particulier où η est sans zéros. Le théorème suivant est donc fondamental.

2.1. THÉORÈME ([Ha]). — *Pour toute* 1*-forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros η sur S, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M telle que $p^*\omega = \eta$. L'orientation de ω est arbitraire.*

Ceci est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants :

2.2. LEMME. — *Soit η une* 1*-forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur S, et ω une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante sur M. Si $p^*\omega$ est homotope à η comme forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros, alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante $\tilde{\omega}$ sur M, induisant $p^*\tilde{\omega} = \eta$ sur S, et qui coïncide ave ω en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de $p(S)$.*

2.3. LEMME. — *Pour chaque classe d'homotopie de 1-formes $\mathbb{S}^1$-invariantes et sans zéros sur S, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M induisant sur S une 1-forme $p^*\omega$ dans cette classe. L'orientation de ω est arbitraire.*

2.4. *Démonstration du lemme 2.2.*

— Si $p(S)$ rencontre ∂M, on considère un voisinage $\mathbb{S}^1$-invariant V_0 de $\partial M \cap p(S)$, difféomorphe à $(\partial M \cap p(S)) \times [0,1[$ et tel que $\overline{V}_0$ soit disjoint de $p(S) \setminus \partial M$. Soit $F : M \to M \setminus V_0$ un difféomorphisme égal à l'identité en dehors d'un voisinage V_1 de $\partial M \cap p(S)$, et qui respecte les actions de $\mathbb{S}^1$ sur M et $M \setminus V_0$; l'ensemble $\partial M \cap (F \circ p)(S)$ est vide. Si $\tilde{\omega}$ est une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante sur M, égale à ω en dehors d'un voisinage V_2 de $p(S)$, et telle que $(F \circ p)^*\omega = \eta$, alors la forme de contact $\tilde{\omega}' = F^*(\omega|_{M \setminus V_0})$ est $\mathbb{S}^1$-invariante, induit $p^*\tilde{\omega}' = \eta$ sur S et coïncide avec ω en dehors de $V_1 \cup V_2$. Les voisinages V_0, V_1 et V_2 sont arbitrairement petits.

On est donc ramené au cas où $\partial M \cap p(S)$ est vide.

— Soit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le plongement $j_t : S \to S \times \mathbb{R}$ défini par $j_t(x) = (x,t)$. Soit $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base de 1-formes sur S dont la restriction à chaque composante connexe $T_i = \mathbb{T}^2$ de S est $\{d\theta_1, d\theta_2\}$. Soit V un voisinage de $p(S)$ $\mathbb{S}^1$-invariant, arbitrairement petit et isomorphe au fibré trivial $S \times \mathbb{R}$ de groupes $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme $\varphi : S \times \mathbb{R} \to V$ tel que $\varphi \circ j_0 = p$ et $\varphi^*(\omega \wedge d\omega)$ soit de même sens que $\alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$. La forme $(\varphi \circ j_0)^*\omega = p^*\omega$ est sans zéros sur S. Il existe donc un réel ε, $0 < \varepsilon < 1$, tel que $(\varphi \circ j_t)^*\omega$ soit sans zéros sur S pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Comme $(\varphi \circ j_0)^*\omega$ est homotope à η comme forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur S, les formes $(\varphi \circ j_{-\varepsilon})^*\omega$ et $(\varphi \circ j_\varepsilon)^*\omega$ le sont aussi.

Soit $\eta_t = a_t\alpha_1 + b_t\alpha_2$, $t \in [-1,1]$, une homotopie de 1-formes $\mathbb{S}^1$-invariantes et sans zéros sur S telle que

$$\eta_{-\varepsilon} = (\varphi \circ j_{-\varepsilon})^*\omega\ , \quad \eta_0 = \eta \quad \text{et} \quad \eta_\varepsilon = (\varphi \circ j_\varepsilon)^*\omega\ . \tag{1}$$

Posons
$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_t \\ \tilde{b}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi kt/\varepsilon) & -\sin(2\pi kt/\varepsilon) \\ \sin(2\pi kt/\varepsilon) & \cos(2\pi kt/\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

où $k \in \mathbb{N}$.

La forme $\omega'(x,t) = \tilde{a}_t(x)\alpha_1 + \tilde{b}_t(x)\alpha_2$ sur $S \times [-1,1]$ est $\mathbb{S}^1$-invariante et vérifie :

$$j^*_{-\varepsilon}\omega' = \eta_{-\varepsilon}\ , \quad j^*_0\omega' = \eta_0 \quad \text{et} \quad j^*_\varepsilon\omega' = \eta_\varepsilon\ . \tag{2}$$

Pour un choix convenable de k, ω' est de contact sur $S \times [-1,1]$. En effet

$$\omega' \wedge d\omega' = \Big(a_t \frac{\partial b_t}{\partial t} - b_t \frac{\partial a_t}{\partial t} + 2\pi k \frac{a_t^2 + b_t^2}{\varepsilon}\Big) \alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$$

qui est sans zéros et de même sens que $\alpha_1 \wedge dt \wedge \alpha_2$ pour k assez grand, puisque la fonction $a_t \frac{\partial b_t}{\partial t} - b_t \frac{\partial a_t}{\partial t}$ est bornée et $a_t^2 + b_t^2 > 0$ sur le compact $S \times [-1,1]$.

Les formes ω' et $\varphi^*\omega$ induisent une même forme sur $j_{-\varepsilon}(S) \cup j_\varepsilon(S)$ d'après (1) et (2). On peut donc les raccorder pour obtenir une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω'' sur $S \times \mathbb{R}$, égale à ω' au voisinage de $j_0(S)$ et à $\varphi^*\omega$ en dehors de $S \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ (lemme 1.3). Sachant que $\varphi \circ j_0 = p$, la forme de contact

$$\begin{cases} \tilde{\omega} = \omega & \text{sur } M \setminus V \\ \tilde{\omega} = (\varphi^{-1})^* \omega'' & \text{sur } V \end{cases}$$

induit bien η sur S. Elle est $\mathbb{S}^1$-invariante sur M et de même orientation que ω.

C.Q.F.D.

2.5. *Démonstration du lemme 2.3.* — De même qu'en (2.4), on se ramène au cas où $\partial M \cap p(S)$ est vide. Soient T_i, $i = 1, \dots, r$, les composantes connexes de S. Une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur S s'écrit en tout point (θ_1, θ_2) de T_i

$$a_i(\theta_1) d\theta_1 + b_i(\theta_1) d\theta_2 \ , \quad \text{où } (a_i, b_i) \text{ est un lacet dans } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ .$$

Le groupe d'homotopie des 1-formes $\mathbb{S}^1$-invariantes et sans zéros sur S est donc $\mathbb{Z}^r$, l'isomorphisme étant

$$(n_1, \dots, n_r) \longrightarrow \text{classe de } \eta_{n_1, \dots, n_r} \ ,$$

où

$$\eta_{n_1, \dots, n_r}(\theta_1, \theta_2) = \cos(n_i \theta_1) d\theta_1 + \sin(n_i \theta_1) d\theta_2 \quad \text{pour} \quad (\theta_1, \theta_2) \in T_i \ .$$

Soit donc $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$. Nous allons montrer qu'il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M, d'orientation arbitraire et telle que $p^*\omega$ soit homotope, comme forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros, à $\eta_{n_1, \dots, n_r}$.

2.5.1. Rappelons que l'*ensemble singulier* d'une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante sur M est l'ensemble des points de B au-dessus desquels son noyau est tangent à la fibre; c'est une sous-variété compacte de dimension 1 de B. Soit Σ une réunion finie de cercles deux à deux disjoints plongés dans B. Alors on sait, d'après [L2], que :

THÉORÈME. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω_0 sur M admettant Σ comme ensemble singulier. L'orientation de ω_0 est arbitraire.*

(ii) *Les composantes connexes de $B \setminus \Sigma$ peuvent être munies de signes $+$ ou $-$ de façon que deux composantes adjacentes aient des signes opposés.*

On note Z le champ de vecteurs associé à l'action de $\mathbb{S}^1$ sur M, et α une forme de connexion telle que $\alpha(Z) = 1$ et $Z \rfloor d\alpha = 0$. L'invariance de ω_0 entraîne que $\omega_0 = (q^* f)\alpha + q^*\beta$, où f est une fonction et β est une 1-forme sur B.

Remarques [L2]. — On a $\Sigma = f^{-1}(0)$; la condition de contact implique que *df* est sans zéros sur Σ.

— La fonction f prolonge la fonction $(x,t) \to t$ définie sur un voisinage de Σ difféomorphe à $\Sigma \times]-1,1[$.

— On attribue le signe $+$ à $f^{-1}(]0,+\infty[)$ et le signe $-$ à $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

2.5.2. *Première étape.*

Soient $q_i : T_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ les projections $(\theta_1,\theta_2,t) \to (\theta_1,t)$. Soit pour tout i, $i=1,\dots,r$, un voisinage $\mathbb{S}^1$-invariant V_i de $p(T_i)$ tel qu'il existe un isomorphisme de fibrés principaux $(\varphi_i,\psi_i) : (T_i \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \to (V_i, q(V_i))$ vérifiant $\varphi_i(x,0) = p(x)$; les V_i sont supposés deux à deux disjoints.

Soit γ_i le cercle dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ image de l'application $\theta \to (\theta, \sin(-n_i\theta))$. Posons

$$\Sigma_i = \psi_i(\gamma_i),\ \Sigma_i' = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{-2\}),\ \Sigma_i^+ = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{2\}) \text{ et } \Sigma_i^- = \psi_i(\mathbb{S}^1 \times \{-3\}).$$

L'ensemble $\Sigma = \bigcup_i (\Sigma_i \cup \Sigma_i' \cup \Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^-)$ vérifie la propriété (ii) du théorème 2.5.1. Par conséquent, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω_0 sur M, d'orientation arbitraire et admettant Σ comme ensemble singulier.

D'après (2.5.1), elle s'écrit $\omega_0 = (q^* f)\alpha + q^*\beta$, où f peut être choisie telle que

$$(1) \qquad (f \circ \psi_i)(\theta, t - \sin(n_i\theta)) = t \ \text{ pour } \ |t| \le 1/3 ,$$

$$(2) \qquad (f \circ \psi_i)(\theta, t+2) = -t \ \text{ et } \ (f \circ \psi_i)(\theta, t-3) = t \ \text{ pour } |t| \le 1/3 .$$

2.5.3. *Deuxième étape.*

Soit k un réel positif quelconque. Les formes

$$\omega_1 = \omega_0 + k\ d(q^* f) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 - k\ d(q^* f)$$

sont de contact et $\mathbb{S}^1$-invariantes sur M ; elles admettent Σ comme ensemble singulier et ont l'orientation de ω_0.

PROPOSITION.

(i) *Les formes ω_1 et ω_2 induisent la même forme sur chaque surface Σ_i^+ et Σ_i^-.*

(ii) *Pour k assez grand, la forme $\cos(n_i\theta_1)\ d\theta_1 + \sin(n_i\theta_1)\ d\theta_2$ est homotope à $p^*\omega_1|_{T_i}$ comme forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur T_i si $n_i \geq 0$, et à $p^*\omega_2|_{T_i}$ si $n_i \leq 0$.*

Preuve. — On a $\omega_1 - \omega_2 = 2k\ d(q^* f)$; d'après (2), le noyau de cette forme est tangent aux surfaces Σ_i^+ et Σ_i^-, d'où (i).

Soit $(\theta_1, \theta_2) \in T_i$, alors

$$p^*\omega_1(\theta_1, \theta_2) = (k\mu_1 + \mu_3)(\theta_1)\ d\theta_1 + \mu_2(\theta_1)\ d\theta_2$$

et

$$p^*\omega_2(\theta_1, \theta_2) = (-k\mu_1 + \mu_3)(\theta_1)\ d\theta_1 + \mu_2(\theta_1)\ d\theta_2$$

où μ_1, μ_2 et μ_3 sont les fonctions sur le cercle définies par

$$\mu_1(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\psi_i^* f)(\theta_1, 0)\ , \quad \mu_2(\theta_1) = (\psi_i^* f)(\theta_1, 0)\ ,$$

et

$$\mu_3(\theta_1) = \Big(\frac{\partial}{\partial\theta_1} \rfloor (\psi_i^*\beta)\Big)(\theta_1, 0)\ .$$

Si $n_i = 0$, γ_i coïncide avec $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Donc $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et μ_3 est sans zéros vu la condition de contact sur ω_0. Par conséquent $p^*\omega_1|_{T_i}$ et $p^*\omega_2|_{T_i}$ sont homotopes à $d\theta_1$ comme formes $\mathbb{S}^1$-invariantes et sans zéros sur T_i.

Si $n_i \neq 0$, pour k assez grand

$$t(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1 + \mu_3, \mu_2) + (1-t)(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1, \mu_2)$$

est une homotopie de lacets dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, car $\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0$. D'autre part, on a

$$\begin{cases} k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1(\theta_1) \cdot \cos(n_i\theta_1) = & k \cdot |n_i| \cdot \cos^2(n_i\theta_1) > 0 \\ & \text{si } (\theta_1, 0) \in \gamma_i \cap \mathbb{S}^1 \times \{0\} \\ \mu_2(\theta_1) \cdot \sin(n_i\theta_1) > 0 & \text{si } (\theta_1, 0) \notin \gamma_i \cap \mathbb{S}^1 \times \{0\}\ . \end{cases}$$

Il en résulte que

$$t(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1(\theta_1), \mu_2(\theta_1)) + (1-t)(\cos(n_i\theta_1), \sin(n_i\theta_1))$$

est une homotopie de lacets dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Par conséquent, les lacets

$$(k \cdot (|n_i|/n_i) \cdot \mu_1 + \mu_3, \mu_2) \quad \text{et} \quad (\cos(n_i\theta_1), \sin(n_i\theta_1))$$

sont homotopes dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; d'où (ii). $\square$

2.5.4. *Troisième étape.*

Soit l'ouvert de M, $U_1 = q^{-1}\Big(\bigcup_{i,n_i>0} C_i\Big)$, où C_i est la couronne ouverte de B contenant Σ_i et délimitée par les cercles Σ_i^+ et Σ_i^-. Posons $U_2 = M \setminus \overline{U}_1$. La surface $\bigcup_{i,n_i>0} (\Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^-)$ sépare M en U_1 et U_2. De plus, ω_1 et ω_2 induisent la même forme sur cette surface (prop. 2.5.3).

D'après le lemme 1.3, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M, égale à ω_1 sur U_1 et à ω_2 sur U_2 sauf peut-être sur un voisinage arbitrairement petit de $\overline{U}_2 \setminus U_2$.

Ainsi

$$p^*\omega|_{T_i} = \begin{cases} p^*\omega_1|_{T_i} & \text{si } n_i > 0 \\ p^*\omega_2|_{T_i} & \text{si } n_i \leq 0 \,. \end{cases}$$

La forme $p^*\omega|_{T_i}$ est donc homotope à la forme $\cos(n_i\theta_1)\ d\theta_1 + \sin(n_i\theta_1)\ d\theta_2$ comme forme $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros sur T_i (prop. 2.5.3). De plus, ω est de même orientation que ω_0; ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

3. Le cas général invariant.

3.1. Soit $j : N_2 \to M_3'$ un plongement d'une surface N dans une variété M' de dimension 3, et ω une forme de contact sur M'. Alors les formes $j^*\omega$ et $dj^*\omega$ ne s'annulent pas simultanément. En effet, si v_1 et v_2 sont deux vecteurs tangents à N en un point x et linéairement indépendants, la condition de contact au point $j(x)$ donne

$$j_*v_1 \rfloor j_*v_2 \rfloor (\omega \wedge d\omega)_{j(x)} \neq 0 \ ,$$

ce qui implique que

$$(dj^*\omega)_x(v_1, v_2) \neq 0 \ \text{ si } \ (j^*\omega)_x = 0 \ .$$

Si η_0 est une 1-forme sur N, il est donc nécessaire que η_0 et $d\eta_0$ ne s'annulent pas simultanément pour que η_0 puisse être induite par une forme de contact sur M'. Il est facile de construire un germe de formes de contact le long de $j(N)$ qui induise une telle forme η_0 (*cf.* [Ha]). Le germe de structures de contact associé est unique (à difféomorphisme près laissant fixes les points de $j(N)$).

On montrera dans ce paragraphe que dans le cas invariant (hypothèses dans 1.1), la condition "η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément" est aussi suffisante.

3.2. Construisons tout d'abord le long de $p(S)$ un germe de formes de contact $\mathbb{S}^1$-invariantes et induisant sur S une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante donnée.

On considère les actions libres du groupe $\mathbb{S}^1$ définies dans (1.1).

LEMME. — *Soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante sur $\mathbb{T}^2$ ne s'annulant pas simultanément avec $d\eta$. Alors il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω (d'orientation arbitraire) sur $\mathbb{T}^2\times]-1,1[$ induisant η sur $\mathbb{T}^2\times\{0\}$, et deux plongements $p_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2\times]0,1[$ et $p_2 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2\times]-1,0[$ qui respectent les actions de $\mathbb{S}^1$, tels que*

(i) *$p_1(\mathbb{T}^2) \cup p_2(\mathbb{T}^2)$ soit le bord d'un voisinage compact de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ dans $\mathbb{T}^2\times]-1,1[$:*

(ii) *les formes $p_1^*\omega$ et $p_2^*\omega$ soient sans zéros sur $\mathbb{T}^2$.*

Démonstration. — La forme η étant $\mathbb{S}^1$-invariante s'écrit, en tout point $(\theta_1,\theta_2) \in \mathbb{T}^2$, $\eta(\theta_1,\theta_2) = a(\theta_1)\ d\theta_1 + b(\theta_1)\ d\theta_2$, où a et b sont des fonctions sur le cercle. Soit la forme de Pfaff sur $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(\theta_1,\theta_2,t) = (a(\theta_1) - tb(\theta_1))\ d\theta_1 + (b(\theta_1) + ta(\theta_1))\ d\theta_2 + c(\theta_1)\ dt\ ,$$

où c est une fonction arbitraire sur le cercle. Elle est $\mathbb{S}^1$-invariante et induit bien η sur $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$. Elle est de contact en tout point de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ si et seulement si la fonction

$$a^2 + b^2 - c\frac{db}{d\theta_1} + b\frac{dc}{d\theta_1} \quad \text{est sans zéros sur le cercle .}$$

On pose $K = a^{-1}(0) \cap b^{-1}(0)$. Le fait que η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément signifie que $\frac{db}{d\theta_1}|_K$ est sans zéros; donc K est fini. Soit J un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{S}^1$ tel que $\frac{db}{d\theta_1}|_{\bar{J}}$ et $b|_{\bar{J}\setminus K}$ ne s'annulent pas, et J' un voisinage fermé de K tel que $J' \subset J$. Soit m un réel positif et c une fonction sur le cercle telle que

$$\begin{cases} |c| = \text{ constante} & \text{sur } J' \\ c = 0 & \text{en dehors de } J \\ c \cdot \dfrac{db}{d\theta_1} < 0 & \text{sur } J \\ c \text{ et } \dfrac{dc}{d\theta_1} & \text{soient bornées par } m\ . \end{cases}$$

Pour m suffisamment petit, on a $a^2 + b^2 - c\dfrac{db}{d\theta_1} + b\dfrac{dc}{d\theta_1} > 0$ partout; donc ω est de contact sur tout un voisinage de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$.

— Soit ε un réel positif suffisamment petit pour que ω soit de contact sur $\mathbb{T}^2 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. On considère un plongement $p_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 \times]0, \varepsilon[$ défini par $p_1(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2, f(\theta_1))$, où f est une fonction sur le cercle. La forme $p_1^*\omega$ est sans zéros pour un choix convenable de f . En effet :

Cette forme est sans zéros si et seulement si la fonction

$$\varphi = \Big(a - fb + c\frac{df}{d\theta_1}\Big)^2 + (b + fa)^2 \text{ est strictement positive.}$$

Sur $\mathbb{S}^1 \setminus J$, on a $\varphi > 0$ quel que soit f; sur K, cette condition se réduit à $\dfrac{df}{d\theta_1}$ sans zéros.

Sur $J \setminus K$, $|a/b|$ est bornée par un réel positif m'. Soit donc $f : \mathbb{S}^1 \to]0, \varepsilon[$ telle que $0 < f < 1/m'$ et $\dfrac{df}{d\theta_1}$ soit sans zéros sur K. La condition $\varphi > 0$ est vérifiée sauf peut-être sur $J \setminus K$. Or, sur $J \setminus K$, on a $|a/b| \le m' < 1/f$, ce qui implique que $b + fa$ est sans zéros sur $J \setminus K$, d'où $\varphi > 0$ sur $J \setminus K$.

— Le plongement p_2 sera par exemple $(\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1, \theta_2, -f(\theta_1))$.

— L'ensemble $\{(\theta_1, \theta_2, t),\ |t| \le f(\theta_1)\}$ est un voisinage compact de $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$, dont le bord est $p_1(\mathbb{T}^2) \cup p_2(\mathbb{T}^2)$.

— L'image réciproque de ω par le difféomorphisme $(\theta_1, \theta_2, t) \to (\theta_1, \theta_2, -t)$ est de sens opposé à ω. Elle aussi vérifie (i) et (ii).

On se ramène au cas $\varepsilon = 1$ grâce au difféomorphisme $(x, t) \to (x, \varepsilon t)$.

C.Q.F.D.

3.3. On oriente M de manière arbitraire. Du théorème 2.1 joint aux lemmes 1.3 et 3.2, découle le

THÉORÈME. — *Soit η une forme de Pfaff $\mathbb{S}^1$-invariante sur S. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M qui induit $p^*\omega = \eta$ sur S. L'orientation de ω est positive.*

(ii) *η et $d\eta$ ne s'annulent pas simultanément.*

Démonstration. — La propriété (ii) découle de (i) d'après 3.1. Inversement, soit η une 1-forme $\mathbb{S}^1$-invariante sur S et vérifiant (ii). L'ensemble $S' = p^{-1}(\partial M \cap p(S))$ est soit vide soit réunion finie de tores $\mathbb{T}^2$ disjoints. Soit V (resp. V') un voisinage de $p(S \setminus S')$ (resp. de $p(S')$) $\mathbb{S}^1$-invariant et isomorphe au fibré trivial $(S \setminus S')\times]-1,1[$ (resp. $S' \times [0,1[$) de groupe $\mathbb{S}^1$ par un isomorphisme envoyant tout point $p(x)$ sur $(x,0)$. On choisit V et V' suffisamment petits pour que $\overline{V} \cap \overline{V}'$ soit vide. D'après le lemme 3.2, il existe une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω_1 sur $V \cup V'$ induisant $p^*\omega_1 = \eta$ sur S, et deux plongements $p_1 : S \to V \cup V'$ et $p_2 : S \setminus S' \to V$ respectant les actions de $\mathbb{S}^1$, tels que :

— $p_1(S)$ et $p_2(S \setminus S')$ soient disjoints,

— $p(S') \cup p_1(S) \cup p_2(S \setminus S')$ soit le bord d'un voisinage fermé $W \subset (V \cup V')$ de $p(S)$,

— $p_1^*\omega_1$ et $p_2^*\omega_1$ soient sans zéros sur S et $S \setminus S'$.

Soient S_1 et S_2 deux exemplaires de $S \setminus S'$. Soit $p' : S_1 \cup S' \cup S_2 \to M$ le plongement qui envoie les points de $S_1 \cup S'$ par p_1 et ceux de S_2 par p_2. On pose $U_1 = W \setminus \mathrm{Im}(p')$ et $U_2 = M \setminus W$. Ainsi $\mathrm{Im}(p')$ sépare M en deux ouverts disjoints qui sont U_1 et U_2. La 1-forme $\eta' = p'^*\omega_1$ sur $S_1 \cup S' \cup S_2$ est $\mathbb{S}^1$-invariante et sans zéros. Il existe donc une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω_2 sur M telle que $p'^*\omega_2 = \eta'$ (th. 2.1).

Les formes ω_1 et ω_2 sont choisies d'orientation positive. A présent, on raccorde ω_1 et ω_2 le long de $\mathrm{Im}(p')$ pour obtenir une forme de contact $\mathbb{S}^1$-invariante ω sur M, égale à ω_1 sur W (lemme 1.3).

On a donc : $p^*\omega = p^*\omega_1 = \eta$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[Ar] V.I. ARNOLD, Singularities of caustics and wave fronts, M.I.A. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[E1] Y. ELIASHBERG, Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds, Invent. Math., 98 (1989), 623–637.

[E2] Y. ELIASHBERG, Contact 3-manifolds twenty years since Martinet's work, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42-1 & 2 (1992).

[Ha] A. HADJAR, Sur les plongements des surfaces fermées dans les variétés de contact de dimension trois, Thèse de Magistère, Oran, 1990.

[L1] R. LUTZ, Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois, Thèse, Strasbourg, 1971.

[L2] R. LUTZ, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension trois, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27-3 (1977), 1–15.

[M1] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 20-1 (1970), 95–178.

[M2] J. MARTINET, Formes de contact sur les variétés de dimension 3, Springer Lect. Notes in Math., 209 (1971), 142–163.

[Mo] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 286–294.

[We] A. WEINSTEIN, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, Advances in Math., 6 (1965), 329–346.

Manuscrit reçu le 23 octobre 1991,
révisé le 20 janvier 1992.

M.E. Amine HADJAR,
Laboratoire de Mathématiques
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex (France).