ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN DUFRESNOY

Sur l'équation de Monge-Ampère complexe dans la boule de $\mathbb{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 3 (1989), p. 773-775

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_773_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 773-775

SUR L'EQUATION DE MONGE–AMPERE COMPLEXE DANS LA BOULE DE $\mathbf{C}^n$

par Alain DUFRESNOY

Dans la suite, B désigne la boule unité de $\mathbf{C}^n$ et ∂B sa frontière. Dans [1], E. Bedford et B.A. Taylor montrent, entre autres résultats, que si $\varphi \in C^{1,1}(\partial B)$, et u est la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = 0 & \text{dans } B \\ u_{|\partial B} = \varphi \end{cases}$$

alors $u \in C^{1,1}(B)$ et le coefficient de Lipschitz des dérivées premières de u croît au plus comme le carré de l'inverse de la distance au bord et signalent qu'en adaptant leur démonstration, il est possible de montrer que ce coefficient croît au plus comme l'inverse de la distance au bord.

Nous nous proposons de donner ici une démonstration simple de ce dernier résultat; cette démonstration est largement inspirée d'une simplification de la démonstration de [1] que m'a communiquée J.P. Demailly.

Soit $\zeta \in \mathbf{C}^n$ tel que $|\zeta| = 1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $|\lambda| < 1$; si on pose $a = \lambda\zeta$, on définit un automorphisme analytique F_a de B par

$$F_a(z) = \frac{P_a(z) - a + (1 - |a|^2)^{1/2} Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ désigne le produit hermitien usuel dans $\mathbf{C}^n$, P_a la projection orthogonale de $\mathbf{C}^n$ sur $\mathbf{C}\{a\}$ et $Q_a = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^n} - P_a$ (*cf.* [2] par exemple).

Un calcul facile montre que

$$F_a(z) = z - a + \langle z, a\rangle z + O(|a|^2)$$

Mots-clés : Monge-Ampère complexe – Problème de Dirichlet.
Classification A.M.S. : 32F05.

où $O(|a|^2)$ est uniforme pour z appartenant à un voisinage de $\overline{B}$; en fait, puisque ζ est un point fixe de F_a , on a

$$F_a(z) = z - a + \langle z, a\rangle z + |z - \zeta| O(|a|^2)$$

ou encore, en remplaçant a par sa valeur,

$$F_a(z) = z + \lambda\big[\langle z - \zeta, \zeta\rangle z - (\zeta - z)\big] + |z - \zeta| O(\lambda^2) \ .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &|F_a(z) - z| \leq \mathrm{C^{te}} |z - \zeta| \lambda \\ &|F_a(z) - z| \geq \mathrm{C^{te}} |z - \zeta| \lambda \ \text{ si } \operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Quitte à échanger ζ en $-\zeta$, on peut supposer que cette dernière condition est satisfaite, ce que nous ferons dans la suite.

Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour $\varphi \in C^2(\partial B)$ et de passer à la limite; soit donc $\varphi \in C^2(\partial B)$ à valeurs réelles; il existe une application $\mathbf{R}$-linéaire $L : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ telle que $\widetilde{\varphi} = \varphi - L$ ait une différentielle nulle au point ζ et dont la norme (comme application linéaire) vérifie $\|L\| \leq \|\varphi\|_1$ où $\| \ \|_k$ désigne la norme dans C^k .

Nous nous proposons tout d'abord de majorer l'expression

$$\widetilde{\varphi} \circ F_a(z) + \widetilde{\varphi} \circ F_{-a}(z) - 2\widetilde{\varphi}(z) \ \text{pour } z \in \partial B \ .$$

Si on désigne par $F^*_{-a}(z)$ le point de ∂B tel que z , $F_a(z)$ et $F^*_{-a}(z)$ soient sur un grand cercle de ∂B et z au milieu de $[F_a(z), F^*_{-a}(z)]$, on a d'une part

$$\widetilde{\varphi} \circ F_a(z) + \widetilde{\varphi} \circ F^*_{-a}(z) - 2\widetilde{\varphi}(z) \leq C_1 \lambda^2 |z - \zeta|^2 \|\widetilde{\varphi}\|_2$$

et d'autre part, du fait que la différentielle de $\widetilde{\varphi}$ en ζ est nulle et que la distance de $F_{-a}(z)$ et $F^*_{-a}(z)$ à ζ est comparable à celle de z à ζ ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} \circ F_{-a}(z) - \widetilde{\varphi} \circ F^*_{-a}(z) &\leq C_2 |F_{-a}(z) - F^*_{-a}(z)| \, |z - \zeta| \, \|\varphi\|_2 \\ &\leq C_2 |z - \zeta| O(\lambda^2) |z - \zeta| \, \|\varphi\|_2 \\ &\leq C_3 \lambda^2 |z - \zeta|^2 \|\varphi\|_2 \ . \end{aligned}$$

On obtient donc, en faisant la somme

$$\widetilde{\varphi} \circ F_a(z) + \widetilde{\varphi} \circ F_{-a}(z) \leq 2\widetilde{\varphi}(z) + (C_1 + C_3)\lambda^2 |z - \zeta|^2 \|\varphi\|_2 \ .$$

Désignons par $\widetilde{u}$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (dd^c \widetilde{u})^n = 0 & \text{dans B} \\ \widetilde{u}_{|\partial B} = \widetilde{\varphi} \ . \end{cases}$$

Si on remarque que $|z-\zeta|^2$ est majoré sur ∂B par un multiple de $1-\mathrm{Re}\ \langle z,\zeta\rangle$ et que cette dernière fonction est pluriharmonique dans B , on obtient

$$\widetilde{u}\circ F_a(z)+\widetilde{u}\circ F_{-a}(z)\leq 2\widetilde{u}(z)+C_4\lambda^2(1-\mathrm{Re}\ \langle z,\zeta\rangle)\|\varphi\|_2\ ,\ z\in B\ .$$

Soit, en remarquant que $u=\widetilde{u}+L$

$$\begin{aligned} u\circ F_a(z)+u\circ F_{-a}(z)-2u(z) &\leq C_4\lambda^2(1-\mathrm{Re}\ \langle z,\zeta\rangle)\|\varphi\|_2+C_5|z-\zeta|\lambda^2\|\varphi\|_1\\ &\leq \lambda^2|z-\zeta|^2C'\left(\frac{1-\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle}{|z-\zeta|^2}+\frac{1}{|z-\zeta|}\right)\|\varphi\|_2\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\frac{1-\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle}{|z-\zeta|}\leq 1$ donc

$$u\circ F_a(z)+u\circ F_{-a}(z)-2u(z)\leq\lambda^2|z-\zeta|^2\frac{2C'}{|z-\zeta|}\|\varphi\|_2\ ,\ z\in B\ .$$

Si on remarque que $|F_a(z)-z|$ est minoré, pour a petit, par un multiple de $\lambda|z-\zeta|$ et en utilisant que $|z-\zeta|\geq d(z,\partial B)$ on obtient l'inégalité

$$u\circ F_a(z)+u\circ F_{-a}(z)-2u(z)\leq M|F_a(z)-z|^2\frac{1}{d(z,\partial B)}\|\varphi\|_2\ ,\ z\in B\ .$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que

$$u(z+h)+u(z-h)-2u(z)\leq\frac{K|h|^2}{d(z,\partial B)}\ \text{pour } h \text{ assez petit}$$

et on conclut alors comme dans [1], pp. 34-35.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BEDFORD & B.A. TAYLOR, The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, Invent. Math., 37(1976), 1-44.

[2] W. RUDIN, Function theory in the unit Ball of $\mathbf{C}^n$, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 241, Springer-Verlag.

Manuscrit reçu le 10 octobre 1988.

Alain DUFRESNOY,
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 St-Martin d'Hères Cedex (France).