

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL DUFOUR

## **Modules pour les familles de courbes planes**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, n° 1 (1989), p. 225-238

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1989\\_\\_39\\_1\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_1_225_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MODULES POUR LES FAMILLES DE COURBES PLANES

par Jean-Paul DUFOUR

---

### 1. Introduction.

Dans ce travail "différentiable" voudra dire "de classe  $C^\infty$ ".

Conformément au point de vue déjà adopté dans de multiples références ([1], [3], [5], [10]...), une *famille de courbes planes* différentiable est donnée par un diagramme

$$\mathbf{R} \xleftarrow{f} S \xrightarrow{\sigma} \mathbf{R}^2$$

où  $S$  est une surface,  $f$  et  $\sigma$  sont des applications différentiables. Les courbes de la famille sont les ensembles  $\sigma(f^{-1}(c))$ , le paramètre  $c$  variant dans  $\mathbf{R}$ . On tombe, par exemple, sur de tels diagrammes dans les problèmes de *représentation de surfaces* où l'on cherche à représenter une surface  $S$  plongée dans l'espace à trois dimensions "de tous les jours" par un dessin plan (sur un écran d'ordinateur...). Pour cela on peut éclairer la surface à l'aide d'une source lumineuse et alors notre dessin est essentiellement la projection de la famille des courbes "isophotes" : les courbes formées des points de  $S$  soumis au même éclairage. On peut par exemple, prendre pour  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction qui à tout  $x$  dans  $S$  associe le cosinus de l'angle de la normale à  $S$  en  $x$  avec la direction de la source lumineuse;  $\sigma : S \rightarrow \mathbf{R}^2$  est le "point de vue".

On notera  $(f, \sigma)$  le diagramme précédent. Si  $(f', \sigma')$  est le diagramme

$$\mathbb{R} \xleftarrow{f'} S' \xrightarrow{\sigma'} \mathbb{R}^2$$

( $S'$  surface,  $f'$  et  $\sigma'$  différentiables) on dira que  $(f, \sigma)$  et  $(f', \sigma')$  sont équivalents (resp. topologiquement équivalents) si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{f} & F & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}^2 \\ \lambda \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{f'} & S' & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

où  $\lambda$ ,  $h$  et  $k$  sont des difféomorphismes (resp. des homéomorphismes). On dira que  $(f, \sigma)$  est *stable* (resp. *topologiquement stable*) si  $(f, \sigma)$  est équivalent (resp. topologiquement équivalent) à tout  $(f', \sigma')$  suffisamment proche de  $(f, \sigma)$  dans la topologie de Whitney ([8]). On a aussi les notions correspondantes d'équivalence et stabilité locales (voir [5]) de manière évidente.

Dans ce travail nous allons mettre en évidence les trois types de "modules" qui apparaissent pour la classification à équivalence près des  $(f, \sigma)$  "génériques".

a. *Module local*. — Une singularité de  $(f, \sigma)$  est un point de  $S$  où, soit  $f$ , soit  $\sigma$ , est singulière. On sait ([1], [5]) que l'on n'a, génériquement que cinq types de telles singularités : les *plis transverses*, les *plis tangents*, les *parapluies transverses*, les *fronces transverses* dont les modèles locaux respectifs sont

$$\begin{array}{ccccccc} & & f & & & & \\ x + y & \longleftarrow & (x, y) & \xrightarrow{\sigma} & (x, y^2) & & \\ y + x^2 & \longleftarrow & (x, y) & \longrightarrow & (x, y^2) & & \\ x + xy + y^3 & \longleftarrow & (x, y) & \longrightarrow & (x, y^2) & & \\ y + g(x, y^3 + xy) & \longleftarrow & (x, y) & \longrightarrow & (x, y^3 + xy) & & \end{array}$$

( $g$  étant une fonction différentiable arbitraire), enfin les points où  $f$  admet une *singularité de Morse*,  $\sigma$  restant régulière.

Cette classification locale des singularités laisse apparaître un "module" pour les fronces (c'est-à-dire une famille non discrète de fronces deux à deux non équivalentes). A notre connaissance ce module n'a pas encore été complètement explicité. C'est notre premier objectif dans ce travail; il sera atteint dans le paragraphe 2 où nous donnerons une classification complète des fronces transverses (théorème 1). Il est à noter que cette classification est la même lorsque l'on travaille avec l'équivalence ou l'équivalence topologique.

b. *Modules semi-globaux.* — Dans l'étude globale on doit tenir compte du fait que plusieurs points de  $S$  peuvent avoir la même image par  $\sigma$  (c'est déjà le cas au voisinage des singularités de  $\sigma$ ). Si  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  a  $n$  pré-images distinctes par  $\sigma$  qui sont non singulières alors la famille de courbes est, au voisinage de  $(u, v)$ , une réunion de  $n$  feuilletages par des courbes (les images par  $\sigma$  des feuilletages  $f = C^{\text{te}}$  aux voisinages des  $n$  pré-images). Génériquement pour  $n \geq 3$  ces feuilletages vont être deux à deux transverses sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  : ils formeront ce que l'on appelle un  $n$ -tissu de codimension 1. En particulier au voisinage d'une fronce transverse on a toujours un 3-tissu. Ces  $n$ -tissus sont extrêmement "rigides" pour  $n \geq 3$  : à chaque point est attaché un invariant de type "courbure" qui nous donne un module, autant pour la classification à équivalence près, que pour la classification à équivalence topologique près. Nous n'insisterons pas ici sur ce type de module et renverrons le lecteur aux références [2], [7], et à l'abondante littérature concernant ces tissus.

c. *Modules globaux.* — Outre les modules liés aux fronces et aux  $n$ -tissus,  $n \geq 3$  (ils sont d'ailleurs du même type), il apparaît un autre type de module lié au comportement de la famille de courbes le long des *lignes de contact*, c'est-à-dire des lignes où deux courbes sont tangentes. Génériquement ces lignes de contact sont des 1-variétés avec ou sans bord. Nous plaçant dans le cas où  $S$  est compacte, leur pré-image dans  $S$  est une famille de courbes simples fermées  $C_1 \cdots C_p$ . Nous verrons dans le paragraphe 3 que  $f$  et  $\sigma$  déterminent sur chacune de ces courbes  $C_i$  un "faux billard" au sens de la référence [6]. Il s'agit en fait d'une multi-application de  $C_i$  sur elle-même dont le graphe est une courbe différentiable. La "dynamique" de ces billards est un invariant de  $C_i$ . A chaque cycle est attaché un "multiplicateur" qui est un invariant de conjugaison différentiable. On obtient ainsi un autre type de module pour nos familles de courbes.

Comme l'on a génériquement des cycles pour les "faux billards" on en déduit en particulier qu'il n'y a pas de diagramme  $(f, \sigma)$  stable lorsque  $S$  est compacte (même lorsque l'on n'a ni fronces ni  $n$ -tissu,  $n \geq 3$ ). Ce sera là notre théorème 2.

Notons pour finir que, contrairement aux modules locaux et semi-globaux, le dernier type de module que l'on vient de mettre en évidence est un module de nature différentiable. En fait, il existe des couples  $(f, \sigma)$  qui sont *topologiquement* stables; nous conjecturons même qu'en l'absence de  $n$ -tissus,  $n \geq 3$ , (donc de fronces) la stabilité topologique est générique.

## 2. Module local.

DÉFINITION 1. — Soient  $g, g' : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  deux fonctions différentiables. On écrira

$$g \sim g'$$

s'il existe un réel  $a$  non nul tel que

$$g(u, v) = \frac{1}{a} g'(a^2 u, a^3 v)$$

pour tous  $(u, v)$  assez voisins de l'origine.

THÉORÈME 1. — Toute fronce transverse admet un modèle local

$$y + g(x, y^3 + xy) \leftrightarrow (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$$

où  $g$  est une fonction différentiable qui s'annule sur la fronce  $F = \{(u, v) ; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$ . De plus, deux tels modèles locaux

$$y + g(x, y^3 + xy) \leftrightarrow (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$$

$$y + g'(x, y^3 + xy) \leftrightarrow (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$$

sont équivalents si et seulement si on a

$$g \sim g'.$$

Autrement dit, ce théorème affirme qu'il y a autant de classes de fronces transverses que de classes de fonctions  $g$  pour la relation  $\sim$ . Nous avons donc là une description du seul module qui intervient dans la classification locale des familles de courbes planes. La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 1.

DÉFINITION 2. — On dira que les deux diagrammes  $(f, \sigma)$  et  $(f', \sigma')$  sont fortement équivalents si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xleftarrow{f} & F & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}^2 \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{f'} & S' & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

où  $h$  et  $k$  sont des difféomorphismes.

LEMME 1 ([5]). — Toute fronce transverse est fortement localement équivalente à un modèle

$$y + g(x, y^3 + xy) \leftrightarrow (x, y) \mapsto (x, y^3 + xy).$$

Dans la suite de ce paragraphe  $\sigma$  désignera toujours la fronce canonique  $(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$  et on considère  $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  différentiable.

DÉFINITION 3. — On suppose que  $(f, \sigma)$ , admet une fronce transverse à l'origine; on appelle surface de Carneiro de  $f$  et on note  $S_f$  l'ensemble des  $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$  deux à deux distincts avec

$$\sigma(f^{-1}(c_1)) \cap \sigma(f^{-1}(c_2)) \cap \sigma(f^{-1}(c_3)) \neq \emptyset .$$

LEMME 2. — L'adhérence  $\bar{S}_f$  de  $S_f$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ , quitte à se restreindre à un voisinage approprié de l'origine. Si  $f(x, y) = y + g \circ \sigma(x, y)$  l'équation de  $\bar{S}_f$  est de la forme

$$s_1 = 3g\left(s_2 - \frac{1}{3}(s_1)^2, s_3 - \frac{1}{3}s_1s_2 + \frac{2}{27}(s_1)^3\right)$$

avec

$$s_1 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$s_2 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1$$

$$s_3 = c_1c_2c_3 .$$

Démonstration. — D'après le lemme 1 il suffit de raisonner avec  $f(x, y) = y + g \circ \sigma(x, y)$ . Posons

$$(u, v) \in \sigma(f^{-1}(c_1)) \cap \sigma(f^{-1}(c_2)) \cap \sigma(f^{-1}(c_3))$$

et notant  $(u, y_1), (u, y_2), (u, y_3)$  les trois pré-images de  $(u, v)$  par  $\sigma$ . Les  $y_i$  sont les 3 racines de  $X^3 + uX - v = 0$ . Le résultat découle alors, par un calcul élémentaire, des relations

$$c_i = y_i + g(u, v), \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = u$$

$$y_1y_2y_3 = v .$$

□

LEMME 3. — Sous les hypothèses du lemme 2 dire que  $g$  est nul sur la fronce  $F = \{(u, v) ; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$  revient à écrire

$$\left. \begin{array}{l} (c_1, c_2, c_3) \in \bar{S}_f \\ c_2 = c_3 \end{array} \right\} \implies c_1 = -2c_3 .$$

Démonstration. — Reprenons les notations de la démonstration du lemme 2. Supposons que  $g$  soit nul sur  $F$ . Si  $(c_1, c_2, c_3)$  est dans  $\bar{S}_f$  avec

$c_2 = c_3$  alors on a  $y_2 = y_3$  et  $X^3 + uX - v = 0$  a une racine double donc  $(u, v)$  est sur  $F$  et, revenant à l'équation de  $\bar{S}_f$ , on en tire

$$s_1 = 0 \quad \left( u = s_2 - \frac{1}{3}(s_1)^2, v = s_3 - \frac{1}{3}s_1s_2 + \frac{2}{27}(s_1)^3 \right)$$

donc

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad \text{et} \quad c_1 = -2c_3 .$$

Réciproquement si  $(c_1, c_2, c_3) \in \bar{S}_f$  et  $c_2 = c_3$  implique  $c_1 = -2c_3$  on en déduit

$$g(u, v) = 0$$

avec  $u = -3(c_2)^2, v = -2(c_2)^3$ ; d'où l'on tire la nullité de  $g$  sur  $F$ .  $\square$

Ce lemme 3 affirme que les points  $(c_1, c, c)$  de  $\bar{S}_f$  vérifient une équation

$$c_1 = -2c + g(\dots, \dots)$$

qui, par le théorème de la fonction implicite, est du type  $c_1 = -2c + \theta(c)$  où  $\theta$  est 1-plate en 0. Le théorème classique de linéarisation de Sternberg affirme l'existence d'un difféomorphisme local  $\lambda : \mathbf{R}, 0 \rightarrow \mathbf{R}, 0$  qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{c \mapsto -2c + \theta(c)} & \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ & \xrightarrow{c \mapsto -2c} & \end{array} .$$

Ainsi  $c_1 = -2c + \theta(c)$  équivaut à  $\lambda(c_1) = -2\lambda(c)$ ; autrement dit :

$$c_1 + c + c = g(u, v)$$

équivaut à

$$\lambda(c_1) + \lambda(c) + \lambda(c) = 0$$

$$(u = -3c^2, v = -2c^3) .$$

Revenant aux définitions on voit que l'on a

$$(\lambda \times \lambda \times \lambda)(\bar{S}_f) = \bar{S}_{\lambda \circ f}$$

et l'on a

$$\left. \begin{array}{l} (c_1, c_2, c_3) \in \bar{S}_{\lambda \circ f} \\ c_2 = c_3 \end{array} \right\} \implies c_1 = -2c_3 .$$

Le lemme 1 affirme l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\lambda \circ f} & & \xrightarrow{\sigma} & \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow H & & \downarrow K \\ & \xleftarrow{f'} & & \xrightarrow{\sigma} & \end{array}$$

où  $f'$  est de la forme

$$f'(x, y) = y + g' \circ \sigma(x, y) .$$

On a, en particulier

$$\bar{S}_{\lambda \circ f} = \bar{S}_{f'}$$

et alors l'équivalence précédente et le lemme 3 permettent de voir que  $g'$  est nulle sur  $F$ . On en déduit la première partie du théorème 1 (i.e. l'existence du modèle).

Il nous reste à montrer l'unicité du modèle (à équivalence  $\sim$  près de  $g$ ). On considère donc deux fronces  $(f, \sigma)$ ,  $(f', \sigma)$  avec

$$f(x, y) = y + g \circ \sigma(x, y) , \quad f'(x, y) = y + g' \circ \sigma(x, y) ,$$

$g$  et  $g'$  étant nuls sur  $F$ .

Si l'on a  $g \sim g'$  on passe de  $\bar{S}_f$  à  $\bar{S}_{f'}$  par une transformation linéaire  $(x, y, z) \mapsto (ax, ay, az)$  et on en déduit l'équivalence des deux fronces. Réciproquement si  $(f, \sigma)$  et  $(f', \sigma)$  sont équivalentes on a

$$(\lambda \times \lambda \times \lambda) \bar{S}_f = \bar{S}_{f'}$$

pour un certain difféomorphisme local  $\lambda$ . Autrement dit on a

$$(c_1, c_2, c_3) \in \bar{S}_f \iff (\lambda(c_1), \lambda(c_2), \lambda(c_3)) \in \bar{S}_{f'} ;$$

faisant  $c_2 = c_3$  on en tire (lemme 3)

$$c_1 = -2c \iff \lambda(c_1) = -2\lambda(c)$$

ou bien

$$\lambda(-2c) = -2\lambda(c) ;$$

en itérant on arrive à

$$\lambda(c) = \frac{1}{(-2)^n} \lambda\left(\frac{c}{(-2)^n}\right) .$$

Portant ceci dans le développement de Taylor  $\lambda(x) = ax + x\varepsilon(x)$ , on en déduit que  $\varepsilon$  est nul sur un voisinage de 0 et donc que  $\lambda$  est linéaire de la forme  $\lambda(x) = ax$  ( $a \neq 0$ ). Portant ceci dans les équations de  $\bar{S}_f$  et  $\bar{S}_{f'}$  (lemme 2) on en tire

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3g(u, v) \iff a(c_1 + c_2 + c_3) = 3g'(a^2u, a^3v)$$

d'où l'on déduit

$$g \sim g' .$$

Nous achevons ainsi la démonstration du théorème 1.

*Remarques.*

1. — L'ensemble  $\bar{S}_f$  est le graphe d'une relation symétrique sur  $\mathbb{R}^3$ . Il est peut-être intéressant de remarquer que toute relation symétrique  $R(c_1, c_2, c_3) = 0$  avec une partie linéaire non triviale à l'origine s'écrit sous la forme

$$s_1 = 3g \left( s_2 - \frac{1}{3}(s_1)^2, s_3 - \frac{1}{3}s_1s_2 + \frac{2}{27}(s_1)^3 \right)$$

avec les mêmes notations que dans le lemme 2.

2. — Rappelons ([5]) que l'équivalence topologique de fronces implique l'équivalence; ainsi on pourrait remplacer l'équivalence par l'équivalence topologique dans l'énoncé du théorème 1.

3. — En chaque point de l'intérieur de la cuspide la "courbure" du tissu (voir [2]) s'exprime, de manière assez complexe, en fonction du 3-jet de  $g$ . On peut voir directement que  $g$  est nulle si et seulement si ce tissu est "hexagonal" (i.e. sa courbure est nulle en chaque point) : "l'équation du tissu", au sens de [2], est celle qui est donnée dans le lemme 2; alors écrire que le tissu est hexagonal c'est écrire une équation de la forme

$$c_1 + c_2 + c_3 - 3g(, ) = A(h(c_1) + h(c_2) + h(c_3))$$

(utiliser [2] et la symétrie du premier membre). Faisant  $c_1 = c_2$  on obtient

$$2c_1 + c_3 = A(2h(c_1) + h(c_3))$$

d'où l'on tire  $h(t) = at$ ,  $A(u) = u/a$ . Portant dans l'équation précédente on obtient

$$c_1 + c_2 + c_3 - 3g(, ) = c_1 + c_2 + c_3$$

d'où la nullité de  $g$ .

4. *Le cas analytique.* — Dans le cas analytique (réel ou complexe) les résultats de ce paragraphe persistent. Rappelons qu'alors l'équivalence topologique implique encore l'équivalence analytique dans le cas réel; dans le cas complexe (voir [9]) l'équivalence topologique implique l'équivalence  $C^\infty$  dans tous les cas, l'équivalence holomorphe ou anti-holomorphe si le tissu n'est pas hexagonal. Notons enfin que pour les familles de courbes planes analytiques il apparaît un autre module local du "type Ecalle" (voir [11]) pour les parapluies transverses.

Pour achever ce paragraphe nous montrons comment retrouver le "module"  $g$  sur le dessin de la famille de courbes correspondante. Rappelons que cette famille a l'allure décrite par la figure qui suit :

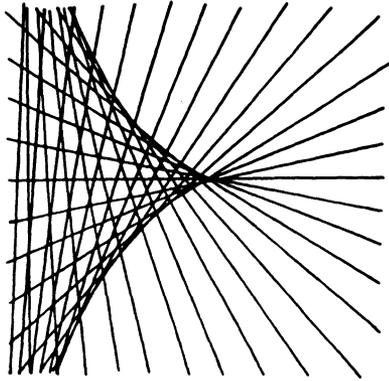


Figure 1

On peut paramétrer la fronce par le paramètre "c" de la famille de courbes : la courbe  $\sigma(f^{-1}(c))$  est tangente à  $F$  au point de paramètre  $c$ , c'est-à-dire le point  $(-3c^2, -2c^3)$ . Alors dire que  $(c_1, c_2, c_3)$  est dans  $S_f$  revient à dire que l'on a la figure qui suit :

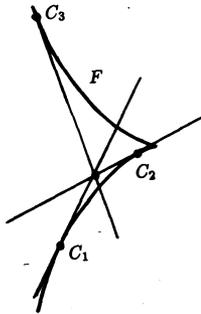


Figure 2

Utilisant la remarque 1 cela détermine "graphiquement"  $g$ .

### 3. Modules globaux.

Dans ce paragraphe nous imposons que  $S$  soit une surface compacte. Nous notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des diagrammes  $(f, \sigma)$  ne présentant que les cinq types de singularités "génériques" vus dans l'introduction; c'est un ouvert dense dans l'ensemble des diagrammes  $(f, \sigma)$  pour la topologie de Whitney ([5]).

Nous considérons sur les points de  $S$  la relation  $s\mathcal{R}s'$  définie par

$$s \neq s' ; \sigma(s) = \sigma(s') , \sigma_{**}(\text{Ker } f_{**}) \cap \sigma_{**'}(\text{Ker } f_{**'}) \neq \{0\} .$$

En fait cela revient à dire que les courbes de niveau de  $f$  passant par  $s$  et  $s'$  déterminent deux courbes tangentes (dans  $\mathbb{R}^2$ ). On notera  $\Gamma$  l'adhérence dans  $S \times S$  de l'ensemble des  $(s, s')$  avec  $s\mathcal{R}s'$ . On note  $\mathcal{C}$  l'image de  $\Gamma$  par la projection  $S \times S \rightarrow S$  sur le premier facteur.

La relation  $\mathcal{R}$  étant symétrique  $\Gamma$  apparaît comme le graphe d'une relation symétrique dans l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Cet ensemble  $\mathcal{C}$  sera appelé l'ensemble de contact. On voit que  $C = \sigma(\mathcal{C})$  est formé de l'adhérence des points où deux courbes de la famille sont tangentes.

Nous faisons maintenant l'hypothèse que tout point de  $\mathbb{R}^2$  n'a au plus que deux pré-images par  $\sigma$ . Cette hypothèse élimine les  $n$ -tissus avec  $n \geq 3$  et donc les fronces. On peut alors énoncer le résultat suivant :

LEMME 4. — *Sous l'hypothèse précédente, génériquement  $\mathcal{C}$  est une sous-variété compacte de dimension 1 (i.e. une réunion disjointe de cercles),  $\Gamma$  est le graphe d'un difféomorphisme de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  et  $f$ , restreinte à  $\mathcal{C}$ , n'admet que des points critiques non dégénérés.*

*Démonstration.* — On peut distinguer les situations locales suivantes, au voisinage de tout point  $s$  de  $\mathcal{C}$  :

a)  $s$  est un contact transverse si  $\sigma$  est régulier en  $s$  et en  $s'$  tel que  $s\mathcal{R}s'$  et si, notant  $g$  et  $g'$  deux inverses locaux de  $\sigma$  aux voisinages de  $s$  et  $s'$ , l'application de composantes  $f \circ g$  et  $f \circ g'$  possède un pli en  $\sigma(s)$  dont l'image est transverse aux deux axes  $\mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\{0\} \times \mathbb{R}$ ;

b)  $s$  est un contact cuspidé si l'on a la même situation que pour le contact transverse mais en remplaçant "pli" par "fronce";

c)  $s$  est un contact dégénéré si  $s$  est un point critique de  $f$ , si  $f$  est régulière au point  $s'$  tel que  $s\mathcal{R}s'$  et si les images par  $\sigma$  des courbes de niveau de  $f$  en  $s'$  sont transverses aux images par  $\sigma$  des éventuelles séparatrices de  $f$  en  $s$ ;

d)  $s$  est un point pli tangent de  $(f, \sigma)$ ;

e)  $s$  est un parapluie transverse de  $(f, \sigma)$ .

Les techniques classiques de transversalité ([8]) permettent de voir que  $\mathcal{C}$  ne possède génériquement que des points de type  $a, b, c, d$  ou  $e$ . Reprenant alors les calculs de [6] on voit que pour les cas  $a, b$  et  $c$  on peut

choisir des coordonnées sur des voisinages de  $s$  et  $s'$  ( $s\mathcal{R}s'$ ) et de  $\sigma(s)$  dans lesquelles les expressions de  $\sigma$  soient l'identité et celles de  $f$  soient

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto x + y^2, (x', y') \mapsto x' \text{ pour le cas } a) \\ (x, y) &\mapsto x + xy + y^3, (x', y') \mapsto x' \text{ pour le cas } b) \\ (x, y) &\mapsto x^2 \pm y^2, (x', y') \mapsto x' \text{ pour le cas } c). \end{aligned}$$

Au voisinage d'un point  $s$  de type  $d$  on voit sur le modèle canonique

$$y + x^2 \xleftarrow{f} (x, y) \xrightarrow{\sigma} (x, y^2)$$

que  $\mathcal{C}$  s'identifie à  $x = 0$ . Au voisinage d'un point de type  $e$  on voit sur le modèle canonique

$$x + xy + y^3 \xleftarrow{f} (x, y) \xrightarrow{\sigma} (x, y^2)$$

que  $\mathcal{C}$  s'identifie à la parabole  $x = -3y^2$ ;  $f$  en restriction à cette parabole admet un point critique non dégénéré. Sur les modèles des cas  $a, b, c$  on voit que  $\mathcal{C}$  est localement une courbe régulière : on en déduit que  $\mathcal{C}$  est une 1-variété compacte. On voit aussi sur ces modèles que  $f$  restreinte à  $\mathcal{C}$  n'admet que des points critiques non dégénérés. On voit enfin que  $\Gamma$  est un difféomorphisme local (c'est une "symétrie" de point fixe  $s$  dans les cas  $d$  et  $e$ ). Pour achever il suffit de voir que  $\Gamma$  est injectif : si ce n'était pas le cas on aurait

$$s\mathcal{R}s' \text{ et } s\mathcal{R}s' \text{ avec } s' \neq s''$$

ce qui donnerait trois pré-images distinctes par  $\sigma$  au point  $\sigma(s)$  et c'est impossible. □

Le lemme précédent nous dit que, génériquement,  $\mathcal{C}$  se décompose en  $C_1 \cup \dots \cup C_r$  où les  $C_i$  sont des courbes simples fermées. Isolons l'une de ces courbes  $C_i$ . La restriction de  $\Gamma$  à  $C_i$  ne peut pas être triviale : en fait il y a deux cas : ou bien  $\Gamma$  définit un difféomorphisme de  $C_i$  sur une courbe  $C_j, i \neq j$ , ou bien  $\Gamma$  définit un difféomorphisme de  $C_i$  sur elle-même non trivial (qui, dans le cas qui nous préoccupe, renverse l'orientation). Dans tous les cas on obtient un diagramme

$$\mathbb{R} \xleftarrow{f_1} C_i \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}$$

où  $f_1$  est la restriction de  $f$  à  $C_i$  et  $f_2$  est obtenu en composant  $f$  (restreinte à  $C_i$  ou  $C_j$ ) avec le difféomorphisme  $\Gamma$  (de  $C_i$  sur elle-même ou sur  $C_j$ ). De plus,  $f_1$  et  $f_2$  n'ont que des points critiques non dégénérés. On doit alors s'intéresser au *faux billard associé à la courbe*  $(f_1, f_2)(C_i)$  ([6], Ia); c'est-à-dire aux suites  $(x_k)_k$  de points de  $C_i$ , deux à deux distincts, telle que

l'on ait successivement  $f_1(x_k) = f_1(x_{k+1})$  puis  $f_2(x_{k+1}) = f_2(x_{k+2}) \cdots$  et ainsi de suite. En particulier nous devons nous intéresser aux suites finies  $(x_1, \dots, x_{2n})$  de ce type : les  $x_j$  sont des points deux à deux distincts de  $C_i$  avec

$$f_1(x_1) = f_1(x_2), f_1(x_3) = f_1(x_4), \dots, f_1(x_{2n-1}) = f_1(x_{2n})$$

$$f_2(x_2) = f_2(x_3), f_2(x_4) = f_2(x_5), \dots, f_2(x_{2n}) = f_2(x_1) ;$$

une telle suite finie est un cycle (on admet comme cas particulier de cycle les couples  $(x, y)$  de points distincts de  $C_i$  tels que

$$f_1(x) = f_1(y), f_2(y) = f_2(x) .$$

Le théorème 1 de [6] nous dit que l'on a *génériquement* toujours des cycles si  $(f_1, f_2)(C_i)$  rencontre certaines horizontales ou certaines verticales en plus de deux points. Par contre si cette courbe ne rencontre horizontales et verticales qu'en au plus deux points et ne possède pas d'auto-intersections (qui donnent des cycles particuliers), on lui associe un difféomorphisme  $\gamma : C_i \rightarrow C_i$  de façon que, pour un point générique  $x$ , on ait

$$f_1(x) = f_1(y), f_2(y) = f_2(\gamma(x)) \quad , \quad x \neq y \neq \gamma(x) .$$

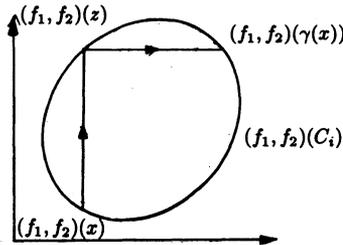


Figure 3

Identifiant  $C_i$  au cercle,  $\gamma$  devient un difféomorphisme du cercle; il possède génériquement des points périodiques et donc on a encore des cycles dans ce cas.

*Remarque.* — On pourrait supprimer l'hypothèse que tout point de  $\mathbb{R}^2$  n'a au plus que deux pré-images par  $\sigma$  et l'on aurait des résultats analogues :  $C$  est génériquement une réunion de cercles et  $f$  détermine sur chacun de ces cercles un faux billard avec des cycles. Cette étude serait plus technique car on aurait beaucoup plus de situations locales génériques.

**THÉORÈME 2.** — *Si  $S$  est compacte il n'y a pas de diagramme  $(f, \sigma)$  stable.*

*Démonstration.* — Nous allons montrer qu'un tel  $(f, \sigma)$  ne peut être stable. Cela est déjà acquis si l'on a des  $n$ -tissus avec  $n \geq 3$ ; donc on peut supposer que tout point de  $\mathbb{R}^2$  a au plus deux pré-images par  $\sigma$ . On remarque que l'ensemble  $\mathcal{C}$  n'est jamais vide car  $f$  admet toujours des points critiques; on peut même dire que l'on a toujours des plis tangents car ils correspondent aux points critiques de  $f$  en restriction au lieu singulier de  $\sigma$ . Alors le lemme 4 et la discussion précédente nous assurent l'existence de cycles. Pour achever il suffit de voir qu'à chacun de ces cycles est attaché un "multiplicateur"  $\alpha$  qui est un invariant à équivalence près :

$$\alpha = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2n}}$$

en notant  $a_j$  la pente de la courbe  $(f_1, f_2)(C_i)$  au point  $(f_1, f_2)(x_j)$  (notations ci-dessus). □

Pour terminer nous décrivons sans démonstration un exemple de diagramme  $(f, \sigma)$  topologiquement stable. On prend

$$S = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$\sigma$  est la projection  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ,  $f$  est une application "hauteur"

$$f(x, y, z) = yb + zc$$

la "verticale" étant donnée par le vecteur  $(0, b, c)$ ,  $b \cdot c \neq 0$ . La famille de courbes correspondante a l'allure donnée sur la figure qui suit :

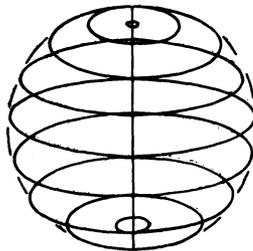


Figure 4

La courbe  $\mathcal{C}$  est le cercle  $x = 0$  ( $y^2 + z^2 = 1$ ); son image dans  $\mathbb{R}^2$  est le segment  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Cette courbe  $\mathcal{C}$  passe par les deux singularités de  $f$  et les deux points pli tangent  $y = \pm 1$ . Si l'on paramètre  $\mathcal{C}$  par l'angle  $\theta$  alors les deux applications  $f_1$  et  $f_2$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}$  (notations ci-dessus) ont des expressions respectives

$$f_1 = \cos(\theta_0 - \theta) \quad , \quad f_2 = \cos(\theta_0 + \theta)$$

où  $\theta_0$  est la direction de l'axe  $(0, b, c)$ . Le "faux billard" associé est déterminé par la translation  $\theta \rightarrow 2\theta_0 + \theta$ . Si nous perturbons très

légèrement  $f$  on obtient une situation analogue mais avec un "faux billard" déterminé par un difféomorphisme  $\gamma$  de  $\mathcal{C}$  qui est stable. En particulier  $\gamma$  aura des points périodiques donnant des cycles. On peut se convaincre du fait que l'on obtient là un diagramme  $(f, \sigma)$  topologiquement stable.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOL'D, Wave fronts evolution and equivariant Morse lemma, *Comm. Pure Appl. Math.*, 29 (1976), 557-582.
- [2] W. BLASCHKE, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Basel (1955).
- [3] M.J. DIAS CARNEIRO, Singularities of envelopes of families of submanifolds in  $\mathbb{R}^n$ , *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 4ème série, 16-2 (1983), 173-192.
- [4] S.S. CHERN - P. GRIFFITHS, Abel's theorem and webs, *J.d. Dt. Math.-Verein*, 8 (1978), 13-110.
- [5] J.P. DUFOUR, Familles de courbes planes différentiables, *Topology*, 22-4 (1983), 449-474.
- [6] J.P. DUFOUR, Couples de fonctions et faux billards, A paraître.
- [7] J.P. DUFOUR - P. JEAN, Rigidity of webs and families of hypersurfaces, *Singularities & Dynamical systems*, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland 1985.
- [8] M. GOLUBITSKY - V. GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Text in Mathematics, Springer Verlag (1973).
- [9] I. NAKAI, Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves, *Topology*, 26-4 (1987), 475-504.
- [10] R. THOM, Sur la théorie des enveloppes, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, XLI-2 (1962).
- [11] S.M. VORONIN, Analytic classification of pairs of involutions and its applications, *Funct. Anal. and its appl.*, 16-2 (1982), 94-100.

Manuscrit reçu le 5 mai 1988,  
révisé le 22 septembre 1988.

Jean Paul DUFOUR,  
Getodim Institut de Math.  
U.S.T.L.  
Place Eugène Bataillon  
34060 Montpellier Cedex (France).