

CLAUDE DANTHONY

**Feuilletages orientés des surfaces : le problème  
de la section globale**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 38, n° 2 (1988), p. 201-227

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1988\\_\\_38\\_2\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_2_201_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FEUILLETAGES ORIENTÉS DES SURFACES : LE PROBLÈME DE LA SECTION GLOBALE

par Claude DANTHONY

---

### Introduction.

Nous nous intéressons, dans cet article, aux feuilletages orientés de surfaces dont les singularités sont des selles. Plus particulièrement, nous regardons la structure transverse de ces feuilletages.

On peut se poser deux questions au sujet de ces feuilletages. Existe-t-il une forme fermée transverse, et existe-t-il une section globale, c'est-à-dire une courbe fermée simple rencontrant toute feuille ?

Dans [L.1] et [L.2], G. Levitt a montré que l'existence d'une forme fermée transverse et celle d'une section globale sont équivalentes modulo opérations de Whitehead.

Or l'existence d'une section globale, par exemple, n'est pas invariante par opérations de Whitehead. Nous avons donc cherché à classer les différentes propriétés transverses. Il apparaît alors deux niveaux.

Le théorème A correspond au niveau le plus faible. On y montre que l'existence d'une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$  est équivalente à certaines propriétés, par exemple que par tout point il passe une transversale fermée, ou encore que les feuilles compactes et les cycles de liaisons orientés vérifient une certaine condition homologique.

Le niveau B, le plus fort, correspond à l'existence d'une section globale. Si le feuilletage  $\mathcal{F}$  a une forme fermée transverse, quelles propriétés doit vérifier cette forme pour que  $\mathcal{F}$  possède une section globale ? Le théorème B répond à cette question.

*Mots-clés* : Feuilletage de surface - Structure transverse.

Pour travailler sur les formes fermées, qui sont des feuilletages mesurés au sens de Thurston, nous utilisons la théorie des réseaux ferroviaires de Thurston, qui permet de se ramener à des questions combinatoires.

Nous établissons le théorème 1, qui donne les conditions sous lesquelles un réseau ferroviaire orienté donné porte un feuilletage minimal, question qui a un intérêt en soi, indépendamment de l'application au théorème B.

En construisant, à partir d'une section globale de  $\mathcal{F}$ , un feuilletage transverse à  $\mathcal{F}$  dont toutes les feuilles régulières sont compactes et isotopes, et en utilisant le théorème 1, nous établissons le théorème B.

Ce théorème dit en particulier qu'il existe une section globale pour  $\mathcal{F}$  si et seulement si il existe un feuilletage mesuré transverse à  $\mathcal{F}$ , et minimal ; alors qu'a priori la seconde condition est beaucoup plus forte.

Ce théorème B dit aussi que l'obstruction à l'existence de sections globales se lit sur les courbes fermées transverses homologues à 0.

Je remercie vivement François Laudenbach, sous la direction de qui j'ai effectué ce travail. Je remercie également Albert Fathi pour d'instructives conversations, et Athanase Papadopoulos qui m'a introduit à la théorie des réseaux ferroviaires.

## 1. Définitions, énoncé des résultats.

**1.1.** Soit  $M$  une surface fermée de genre 2 ou plus, orientable. Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté de  $M$ , dont les singularités sont des selles généralisées. On désigne par  $M^*$  le complémentaire des singularités, et  $\mathcal{F}^*$  la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $M^*$ . On demande à  $\mathcal{F}^*$  d'être  $C^1$ .

Deux feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  de  $M$  sont dits transverses s'ils ont mêmes singularités et si  $\mathcal{F}^*$  et  $\mathcal{G}^*$  sont transverses. On appellera feuille de  $\mathcal{F}$  (respectivement demi-feuille) une feuille (respectivement demi-feuille) de  $\mathcal{F}^*$ . Elle sera dite régulière si elle n'est pas séparatrice, c'est-à-dire si elle n'aboutit pas à une singularité. Un feuilletage est dit *minimal* si toute demi-feuille régulière est dense dans  $M$ .

Une *liaison* est une feuille de  $\mathcal{F}$  allant d'une singularité à une autre. Deux séparatrices issues d'une même selle sont dites *adjacentes* si elles définissent au voisinage de cette selle un secteur angulaire ne contenant pas d'autre séparatrice.

On appellera *liaison large* un chemin de liaisons adjacentes, dont les seuls points doubles sont des singularités (fig. 1.1). Une telle liaison large est approximable par un chemin sans point double (en discontinu sur la figure 1.1).

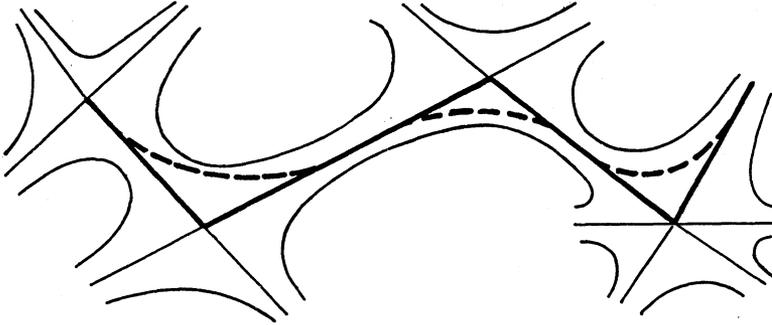


Figure 1.1

Une liaison large est dite *séparante* si elle est fermée et si son approximation sans point double est homologue à 0.

**1.2.** On appelle *section globale* de  $\mathcal{F}$  une courbe fermée simple transverse à  $\mathcal{F}$  et rencontrant toute demi-feuille régulière.

Lorsque l'on a une section globale, l'application de premier retour sur cette transversale est un échange d'intervalles, non nécessairement linéaire. Réciproquement, étant donné un échange d'intervalles, on sait construire la suspension, c'est-à-dire un feuilletage et une section globale, ayant cet échange d'intervalles pour application de premier retour. Un feuilletage  $\mathcal{F}$  est suspension d'un échange d'intervalles si et seulement si il existe une section globale rencontrant aussi toute liaison ([L.1]).

**1.3.** Un feuilletage est dit *connexe* au sens de Novikov si, par deux points non singuliers quelconques, il passe une transversale fermée.

On appellera *cycle orienté* de feuilles de  $\mathcal{F}$  une feuille compacte ou un cycle de liaisons dont l'orientation est cohérente avec celle de  $\mathcal{F}$ . On appelle *barrière* de  $\mathcal{F}$  un ouvert de  $M$ , qui est réunion de feuilles de  $\mathcal{F}$ , et dont le bord est réunion de feuilles compactes ou de cycles orientés de liaisons ; ce bord étant toujours entrant ou toujours sortant pour l'orientation transverse de  $\mathcal{F}$ . Par exemple une composante de Reeb est une barrière. L'existence de telles barrières est une obstruction évidente à la construction de sections globales de  $\mathcal{F}$ . Notons que cette définition est différente de celle de Levitt.

1.4. Un feuilletage est dit *mesuré* (sous-entendu au sens de Thurston), s'il porte une mesure transverse régulière par rapport à la mesure de Lebesgue, dont la densité est lisse, et strictement positive aux points non singuliers. Un tel feuilletage est défini par une forme fermée. On dira qu'une forme fermée  $\omega$  est transverse à un feuilletage  $\mathcal{F}$ , donné par un champ de vecteurs  $X$  si  $\omega(X)$  est non nul en dehors des singularités, et  $\omega = 0$  aux singularités. Cela revient à dire que le feuilletage mesuré noyau de  $\omega$  est transverse à  $\mathcal{F}$ .

1.5. Nous démontrons :

THÉORÈME A (ou théorème des formes transverses). — *Sont équivalents :*

- i) *Quels que soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  cycles orientés de  $\mathcal{F}$ ,  $\langle c_1 + \dots, \gamma_k \rangle$  est non nul dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ .*
- ii)  *$\mathcal{F}$  est sans barrière.*
- iii)  *$\mathcal{F}$  est connexe au sens de Novikov.*
- iv) *Il existe une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ .*

THÉORÈME B (ou théorème de la section globale). — *Sont équivalents :*

- 1)  *$\mathcal{F}$  a une section globale.*
- 2)  *$\mathcal{F}$  est suspension d'un échange d'intervalles.*
- 3) *Il existe  $\mathcal{G}$ , transverse à  $\mathcal{F}$ , dont les feuilles régulières sont compactes et isotopes.*
- 3') *Il existe  $\mathcal{G}'$  mesuré, transverse à  $\mathcal{F}$ , et sans liaison large séparante.*
- 3'') *Il existe  $\mathcal{G}''$ , transverse à  $\mathcal{F}$ , et minimal.*

1.6. Un réseau ferroviaire  $\tau$  sur une surface  $M$  est un sous-espace compact de  $M$ , homéomorphe à un graphe sans bord, et dont les arêtes sont des segments différentiables de  $M$ , tangents entre eux aux sommets. On se limitera au cas où un sommet n'appartient qu'à trois arêtes. Les sommets sont appelés aiguillages. Puisqu'un réseau a un espace tangent en chaque point, on parlera de réseaux orientables lorsque l'espace tangent est orientable.

Sauf indication contraire, on supposera dans la suite que les composantes connexes du complémentaire de  $\tau$  sont homéomorphes à des disques dont le bord n'est pas lisse.

**1.7.** Un *voisinage adapté*  $V(\tau)$  d'un réseau est un épaississement de  $\tau$ , dont le bord a des singularités du type pointe ; cet épaississement a autant de singularités sur son bord que le réseau de départ. Un tel voisinage est obtenu par exemple en recollant par les côtés, un rectangle pour chaque arête du réseau. Un *feuilletage par traverses* de  $V(\tau)$  est un feuilletage de  $V(\tau)$ , transverse au bord, et dont toutes les feuilles vont du bord au bord. En écrasant les feuilles du feuilletage par traverses, qui sont des segments appelés *traverses*, on obtient un réseau appelé *réseau ferroviaire*. Ce réseau n'est pas forcément égal à  $\tau$ , puisqu'il existe d'autres feuilletages par traverses que celui provenant de l'épaississement de  $\tau$ .

**1.8.** Lorsque l'on a un voisinage adapté  $V$  d'un réseau  $\tau$ , muni d'un système de traverses, on appelle *feuilletage longitudinal* un feuilletage de  $V$ , ayant pour feuilles le bord de  $V$ , et sans singularités intérieures.

Si les composantes connexes du complémentaire de  $\tau$  sont homéomorphes à des disques dont le bord n'est pas lisse, il en est de même pour celles de  $M \setminus V$ .

Si l'on a un feuilletage longitudinal de  $V$ , on peut écraser chaque composante connexe du complémentaire de  $V$ , en faisant apparaître au plus une selle (fig. 1.2). On obtient alors un feuilletage total de  $M$ ,

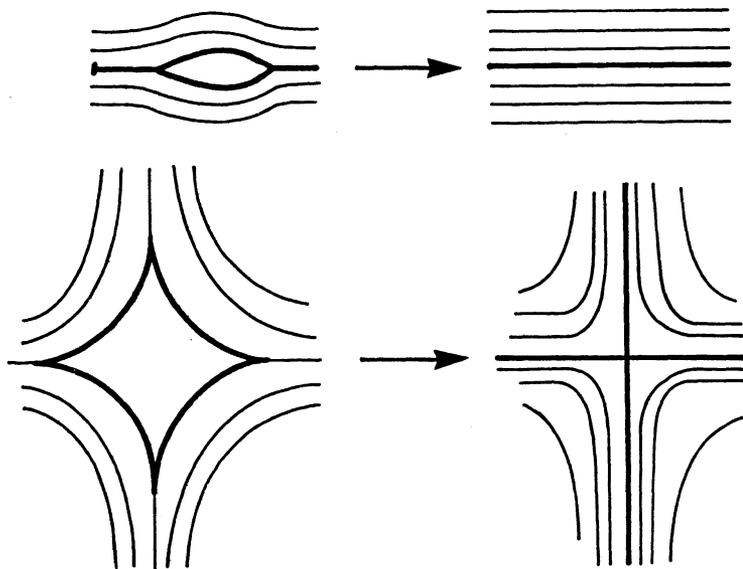


Figure 1.2.

ayant une singularité au centre de chaque composante du complémentaire de  $V$ , sauf pour les bigones. Le nombre de séparatrices de cette selle est égal au nombre de pointes sur le bord de la composante du complémentaire de  $V$ .

1.9. On dira qu'un feuilletage  $\mathcal{F}$  est porté par le réseau  $\tau$  si l'on a

- 1) un voisinage adapté  $V$ ;
- 2) un feuilletage par traverses  $\mathcal{C}$  de  $V$ ;
- 3) un feuilletage longitudinal  $\mathcal{F}_1$  de  $V$ ;

vérifiant :

- 1) le réseau obtenu en écrasant les traverses de  $\mathcal{C}$  est  $\tau$ ;
- 2)  $\mathcal{F}$  s'obtient à partir de  $\mathcal{F}_1$  par écrasement des composantes du complémentaire de  $V$ ;
- 3)  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{F}_1$  sont transverses.

Alors, si  $\tau$  porte  $\mathcal{F}$ , toute feuille de  $\mathcal{F}$  provient d'une feuille de  $\mathcal{F}_1$ , qui est pistée par un chemin lisse dans le réseau  $\tau$ .

1.10. On appelle système de poids  $\mu$  pour  $\tau$  la donnée, pour chaque arête  $a$  de  $\tau$  d'un poids  $\mu(a)$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ , ces poids vérifiant les relations de compatibilité aux aiguillages (fig. 1.3)  $\mu(a) = \mu(b) + \mu(c)$ . On dit qu'un réseau est récurrent s'il possède un système de poids.

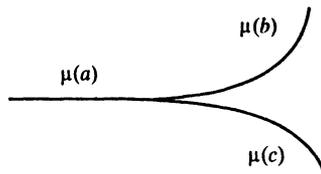


Figure 1.3.

Si l'on a un réseau  $\tau$  muni d'un système de poids  $\mu$ , on peut remplacer chaque arête par un rectangle feuilleté de largeur  $\mu(a)$ . Grâce à la compatibilité, les rectangles se recollent pour donner un feuilletage mesuré d'un voisinage adapté  $V(\tau)$ . On a donc un feuilletage mesuré porté par  $\tau$ . On montre que l'application qui, à un système de poids associe la classe d'isotope du feuilletage mesuré correspondant est injective, si le réseau ne comporte pas de bigones.

A chaque réseau récurrent  $\tau$ , on associe le cône ouvert  $E(\tau)$  des systèmes de poids de  $\tau$ . Si  $A$  est le nombre d'arêtes de  $\tau$ ,  $E(\tau)$  est,

dans  $\mathbb{R}^4$ , l'intersection du sous-espace linéaire des solutions des équations de compatibilité, et du cône positif.

A chaque élément de  $E(\tau)$  correspond un feuilletage mesuré porté par  $\tau$ . Les réseaux ferroviaires et les systèmes de poids ont été introduits par Thurston ([T]).

Rappelons enfin ([F.L.P.], exp. 9, III), qu'un feuilletage mesuré sans liaison est minimal. Notre démarche pour rechercher des feuilletages mesurés minimaux va consister à en chercher qui n'ont pas de liaisons.

### 1.11. Nous démontrons :

**THÉORÈME 1** (ou critère de la liaison séparante). — *Un réseau ferroviaire orientable  $\tau$  porte un feuilletage minimal si et seulement si il porte un feuilletage sans liaison large séparante.*

Au cours de la démonstration nous établissons un algorithme pour savoir si la condition est satisfaite.

Le Théorème 1 est l'outil essentiel de la démonstration du théorème des sections globales. Mais les réseaux ferroviaires sont aussi utilisés dans la démonstration du théorème des formes transverses.

*Remarque.* — Ce théorème montre un aspect original de la théorie des réseaux orientables. En effet, un réseau ferroviaire dont le complémentaire ne comporte que des triangles porte toujours un feuilletage minimal. Ce fait classique utilise deux résultats profonds : d'une part la minimalité de l'action du groupe des difféomorphismes sur l'espace des classes de feuilletages mesurés, d'autre part le fait qu'un tel réseau « paramètre » un ouvert de cet espace.

En revanche, nous ne savons pas à quelle condition un réseau ferroviaire non orientable quelconque porte un feuilletage minimal.

## 2. Formes fermées transverses.

**2.1.** On dira qu'un réseau ferroviaire est *transverse* à  $\mathcal{F}$  si le graphe sous-jacent est transverse à  $\mathcal{F}$  (on dispose d'une notion d'espace tangent pour tous les points du graphe), et si en plus chaque composante de  $M \setminus \tau$  contient au plus une singularité de  $\mathcal{F}$ .

Prenons une composante  $C$  de  $M \setminus \tau$ . Son bord est transverse à  $\mathcal{F}$ . Toute demi-feuille régulière  $L_x$  de  $\mathcal{F}$ , issue d'un point  $x$  dans  $C$ , rejoint le bord de  $C$ . En effet, supposons que  $L_x$  est contenue dans  $C$ . Alors  $L_x$  est une feuille compacte ou bien a un point d'accumulation. S'il y a un point d'accumulation, on en déduit une transversale fermée, contenue dans  $C$ . Cette transversale borde donc un disque, qui contient une singularité d'indice positif, ce qui est impossible (les seules singularités admises sont des selles). Si  $L_x$  est compacte, elle borde un disque, et on a la même impossibilité.

Pour des raisons de caractéristiques d'Euler, et comme  $\mathcal{F}$  a au plus une singularité dans  $C$ , il y a dans  $C$  une singularité  $s_C$  à  $n$  séparatrices, où  $n$  est le nombre de côtés de  $C$ . (Si  $C$  est un bigone, il n'y a pas de singularité, l'aspect de  $\mathcal{F}$  est représenté sur la figure 2.1.)

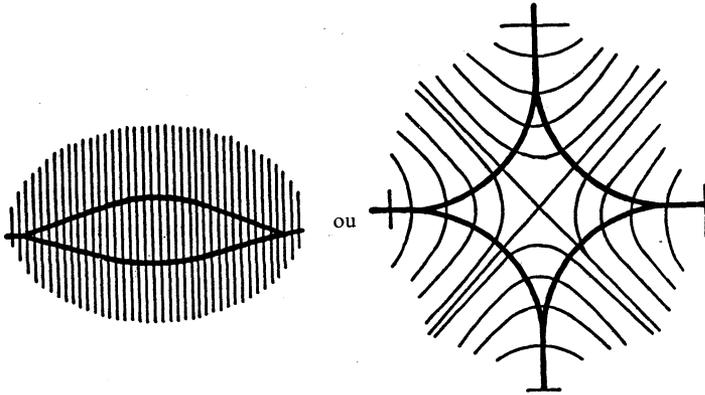


Figure 2.1.

Si  $C$  n'est pas un bigone, soit  $[x,y]$  un côté de  $C$ . Pour  $\varepsilon$  petit, les feuilles rentrant dans  $C$  en  $x + \varepsilon$  et  $y - \varepsilon$  ne ressortent pas par le même côté de  $C$ . Comme toutes les feuilles régulières ressortent, il y a une séparatrice issue de  $s_C$  coupant  $[x,y]$ . Comme  $s_C$  a  $n$  séparatrices, et une au moins coupe chaque côté de  $C$ , il y en a exactement une sur chaque côté de  $C$ . Comme toutes les feuilles régulières vont au bord, l'aspect de  $\mathcal{F}$  dans  $C$  est celui de la figure 2.1.

On a donc un voisinage adapté de  $\tau$  pour lequel  $\mathcal{F}$  apparaît comme feuilletage par traverses, et l'opération d'écrasement pour passer d'un feuilletage partiel à un feuilletage porté par  $\tau$  se fait selon les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Donc tout feuilletage porté par  $\tau$  est isotope à un feuilletage transverse à  $\mathcal{F}$ .

**2.2. PROPOSITION.** — Soit  $\mathcal{F}$  tel que par tout point non singulier il passe une courbe fermée transverse à  $\mathcal{F}$ . Alors il existe une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ .

*Preuve.* — On veut construire un réseau ferroviaire transverse à  $\mathcal{F}$ , à l'aide de courbes fermées, pour être sûr qu'il est récurrent.

Soit  $s$  une selle de  $\mathcal{F}$ . On se place dans un voisinage standard  $U$  de  $s$ . Numérotions  $S_1, \dots, S_n$  les séparatrices de  $s$ , qui sont en nombre pair, le feuilletage étant orientable. Soit  $y_k$  un point de  $S_{2k}$  situé dans  $U$ . L'hypothèse dit qu'il existe une courbe fermée  $C_k$ , transverse à  $\mathcal{F}$ , passant par  $y_k$ . Soit  $[\alpha_k, \beta_k]$  un segment de  $C_k$ , orienté par l'orientation transverse, inclus dans  $U$ , et contenant  $y_k$ .

On a, dans l'intersection de  $U$  avec le secteur angulaire délimité par  $S_k$  et  $S_{k+2}$ , et contenant  $S_{k+1}$ , le dessin de la figure 2.2. Ce secteur contient  $\alpha_k$  et  $\beta_{k+1}$ .

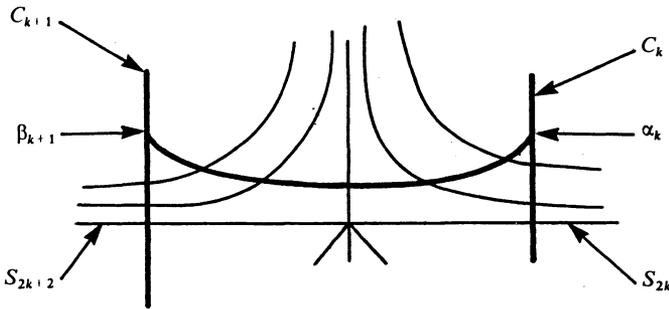


Figure 2.2. — Le feuilletage en fin, les transversales en gras.

On construit alors un segment transverse  $\gamma_k$ , allant de  $\alpha_k$  à  $\beta_{k+1}$ , tangent à  $C_k$  en  $\alpha_k$  et à  $C_{k+1}$  en  $\beta_{k+1}$ .

La réunion des segments  $[\alpha_k, \beta_k]$  de  $C_k$  avec les  $\gamma_k$  borde un voisinage  $V_s$  de  $s$ , homéomorphe à un disque.

$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n/2} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n/2}$  peut être considéré comme la réunion des transversales fermées  $C_1, \dots, C_{n/2}, C'$ , avec :

$$C' = \gamma_1 * [\beta_2, \alpha_2] * \gamma_2 * \dots * \gamma_{n/2} * [\alpha_1, \beta_1].$$

Ici,  $[\beta_k, \alpha_k]$  est le segment de  $C_k$  d'extrémités  $\beta_k$  et  $\alpha_k$  ne rencontrant pas  $y_k$ . On a représenté cela sur la figure 2.3. Sur celle-ci,  $C'$  consiste en l'extérieur du « trèfle ».

Prenons maintenant un point  $x$  qui n'est pas dans le voisinage  $V_s$  d'une singularité. On prend une courbe transverse  $C_x$  passant par  $x$ , et on construit un voisinage  $V_x$  de  $x$ , homéomorphe à un disque, découpé par deux courbes fermées transverse, comme sur la figure 2.4.

On choisit  $x_1, \dots, x_n$  de manière à ce que  $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots$  recouvrent le complémentaire des voisinages  $V_s$  des singularités.

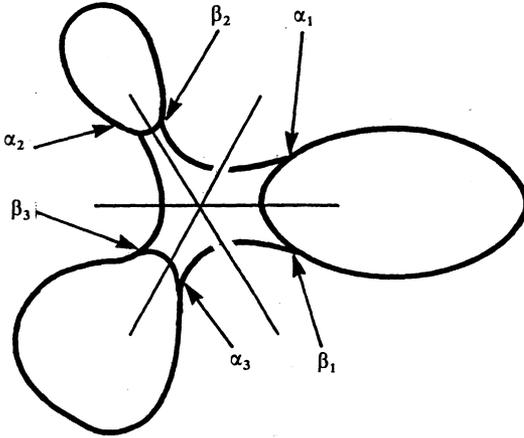


Figure 2.3.

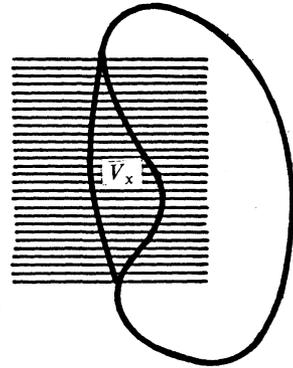


Figure 2.4.

On a ainsi construit un système de courbes fermées transverse découpant la surface en composantes homéomorphes à des disques et contenant au plus une singularité de  $\mathcal{F}$ . Si on pince les intersections de ces courbes en faisant apparaître deux aiguillages à trois brins (fig. 2.5), on obtient un réseau ferroviaire transverse à  $\mathcal{F}$  dans le sens de 2.1. Comme toute arête appartient à une courbe fermée, on sait construire un système de poids (strictement positifs) pour ce réseau, et donc une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ . □

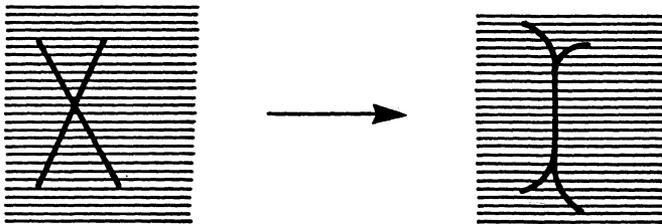


Figure 2.5.

**2.3.** Nous allons démontrer le théorème des formes transverses, qui donne une série de conditions équivalentes à l'existence d'un feuilletage mesuré transverse à un feuilletage donné. Ce théorème a été énoncé en 1.5.

On rajoute la condition suivante :

iii') *Par tout point non singulier, il passe une transversale fermée.*

Il est clair que iii)  $\Rightarrow$  iii'). (Rappelons que  $\mathcal{F}$  est connexe au sens de Novikov si par deux points non singuliers quelconques, il passe une transversale fermée.)

La proposition 2.2 montre que iii')  $\Rightarrow$  iv).

Il est connu (par exemple [F.L.P.]), que toute feuille régulière d'un feuilletage mesuré est compacte ou récurrente. Donc si iv) est vrai, prenons un point  $x$  et la demi-feuille de la forme fermée partant de  $x$ . Lorsqu'elle repasse près de  $x$ , on peut refermer en construisant ainsi une transversale fermée. Donc iv)  $\Rightarrow$  iii').

D'autre part, iii')  $\Rightarrow$  i), puisque l'intersection algébrique d'une courbe transverse avec  $\gamma_1 + \dots + \gamma_k$  est positive, et qu'on peut la rendre non nulle en prenant une courbe transverse rencontrant  $\gamma_1$ . Donc  $\gamma_1 + \dots + \gamma_k$  est non nul dans  $H_1(M, \mathbb{Z})$ .

i)  $\Rightarrow$  ii) découle directement de la définition d'une barrière, que l'on a donnée en 1.3.

**2.4. PROPOSITION.** — ii)  $\Rightarrow$  iii), *c'est-à-dire si  $\mathcal{F}$  est sans barrière, alors  $\mathcal{F}$  est connexe au sens de Novikov.*

*Preuve.* — Soit  $x$  un point de  $M$ , qui n'est pas une singularité, et  $A_x$  l'ensemble des  $y$  de  $M^*$  (non singuliers) tels qu'il existe une transversale à  $\mathcal{F}$  dans  $M$ , orientée positivement, allant de  $x$  à  $y$ . Il est clair que  $A_x$  est un ouvert connexe de  $M$ , qui est réunion de feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Il est bien connu que la frontière de  $A_x$  est alors réunion de feuilles compactes et de cycles orientés de liaisons.

Or si un point est dans la frontière de  $A_x$ , l'orientation transverse de  $\mathcal{F}$  en ce point entre dans  $A_x$ , puisque dans le cas contraire, ce point serait dans  $A_x$ .  $A_x$  est donc égal à  $M^*$  entier, ou bien est une barrière.

Donc si le feuilletage est sans barrière, on peut trouver une transversale à  $\mathcal{F}$  positive allant de  $x$  à  $y$  quels que soient les deux points non singuliers  $x$  et  $y$ . Comme on peut en trouver une allant de  $y$  à  $x$ , on obtient en recollant une transversale fermée passant par  $x$  et  $y$ . Donc  $\mathcal{F}$  est connexe au sens de Novikov.  $\square$

Cela achève aussi la démonstration du théorème A.

### 3. Réseaux portant un feuilletage minimal.

3.1. Le but de ce paragraphe est de dire à quelles conditions un réseau ferroviaire orienté donné porte un feuilletage mesuré minimal. Pour cela, nous cherchons à savoir s'il porte un feuilletage mesuré sans liaison.

Soit  $\tau$  un réseau ferroviaire orientable pouvant avoir des bigones, et  $\mathcal{G}$  le feuilletage mesuré associé à un système de poids  $\mu(a_i)$ .

Une liaison de  $\mathcal{G}$  est pistée, dans le réseau, par un chemin lisse allant d'une pointe d'une cellule du complémentaire de  $\tau$  qui n'est pas un bigone, à la pointe d'une autre telle cellule, ce chemin étant approximable par un chemin de  $M$  sans point double (une liaison ne se coupe pas elle-même).

Oublions  $\mathcal{G}$ .

Soit  $\tau$  un réseau ferroviaire dont les composantes du complémentaire sont homéomorphes à des disques dont le bord n'est pas lisse.

Dans chaque composante  $C$  de  $M \setminus \tau$  qui n'est pas un bigone, choisissons un centre  $x_C$ .

Soit  $\gamma$  un chemin lisse de  $M$ , allant de  $x_C$  à  $x_{C'}$  et pouvant s'écrire  $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ , où  $\gamma_1$  (respectivement  $\gamma_3$ ) est un chemin dans  $C$  (respectivement  $C'$ ) joignant  $x_C$  à une pointe de  $C$  (respectivement joignant une pointe de  $C'$  à  $x_{C'}$ ). Quant à  $\gamma_2$ , il est tracé dans  $\tau$ .

On dit que  $\gamma$  est un *chemin liant* s'il est approximable dans  $M$  par un chemin sans point double (sauf peut-être les extrémités).



Figure 3.1. — On a représenté un chemin liant.  
Les composantes  $C$  et  $C'$  sont pointillées.

Si maintenant  $\mathcal{G}$  est un feuilletage porté par  $\tau$ , et si  $\mathcal{G}$  a une liaison  $L$ , il existe un chemin liant de  $\tau$  qui piste  $L$ .

3.2. Maintenant, prenons un chemin liant  $\gamma$  et un système de poids sur  $\tau$ , et regardons ce qui se passe d'un côté de  $\gamma$ . On numérote les arêtes rejoignant  $\gamma$  à gauche (respectivement à droite) de  $a_1$  à  $a_n$  selon l'orientation de  $\gamma$  (respectivement  $b_1$  à  $b_m$ ). On pose  $\varepsilon_j = 1$  si  $a_j$  arrive sur  $\gamma$ , et  $-1$  si  $a_j$  part de  $\gamma$ . De même, on pose  $\varepsilon'_j = 1$  si  $b_j$  arrive sur  $\gamma$ , et  $-1$  si  $b_j$  part de  $\gamma$ . Il existera une liaison pistée par  $\gamma$  dans le feuilletage mesuré associé au système de poids  $\mu$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$1^\circ \sum_{j=1 \dots n} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) = 0 \quad (\text{équation } E_\gamma).$$

$$2^\circ \text{ Pour tout } j_0 < n, \quad \sum_{j=1 \dots j_0} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) > 0, \text{ et pour tout } j_0 < m, \\ \sum_{j=1 \dots j_0} \varepsilon'_j \cdot \mu(b_j) > 0.$$

Pour voir cela, on regarde la séparatrice partant d'une pointe. Les conditions du 2° expriment que celle-ci ne part pas à droite ou à gauche avant d'arriver à l'autre extrémité de  $\gamma$ , et la condition 1° exprime qu'elle aboutit sur la pointe. On a dessiné un exemple sur la figure 3.2. Sur cet exemple, 1° est  $\sum_{j=1 \dots 6} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) = 0$ , et pour 2°, il suffit que l'on ait  $\sum_{j=1 \dots 4} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) > 0$ , et  $\sum_{j=1,2} \varepsilon'_j \cdot \mu(b_j) > 0$ . (Notons qu'une liaison large est donnée par les cas d'égalité dans les inéquations de 2°, d'où le nom.)

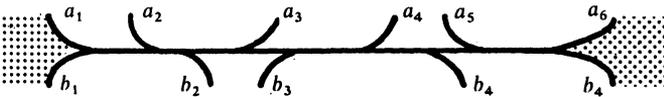


Figure 3.2.

Remarquons que la condition  $\sum \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) = 0$  est équivalente à la condition  $\sum \varepsilon'_j \cdot \mu(b_j) = 0$ . On a donc bien des conditions symétriques. Remarquons aussi qu'il suffit de vérifier les conditions de type 2° pour les  $j_0$  pour lesquels on a un dessin comme sur la figure 3.3, c'est-à-dire pour lesquels  $\varepsilon_{j_0} = -1$ , et  $\varepsilon_{j_0+1} = 1$ , si le schéma est du côté gauche, et  $\varepsilon'_j = -1$ , et  $\varepsilon'_{j_0+1} = 1$ , si le schéma est du côté droit.

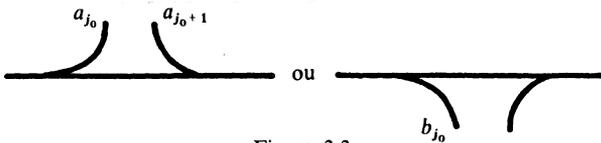


Figure 3.3.

**3.3.** On note  $E_\gamma$  l'équation de 1°, et  $H_\gamma$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  des solutions de  $E_\gamma$ . C'est en général un hyperplan, car  $E_\gamma$  peut être l'équation nulle. On note toujours  $E(\tau)$  l'espace des systèmes de poids de  $\tau$ , qui est l'intersection d'un sous-espace linéaire avec  $(\mathbb{R}_+^*)^4$ .

Il y a alors deux cas :

- i)  $E(\tau) \subset H_\gamma$  (la relation  $E_\gamma$  est forcée par les relations d'aiguillages).
- ii)  $E(\tau)$  n'est pas inclus dans  $H_\gamma$ . Alors  $E(\tau) \cap H_\gamma$  est un fermé d'intérieur vide de  $E(\tau)$ .

Dans le cas de ii), les systèmes de poids de  $E(\tau) \setminus H_\gamma$  (qui est un ouvert dense de  $E(\tau)$ ), donnent des feuilletages n'ayant pas de liaisons (larges) pistées par  $\gamma$ .

Nous allons maintenant nous intéresser aux chemins liants  $\gamma$  vérifiant i). Considérons donc un système de poids de  $E(\tau) \cap H_\gamma$ , qui satisfait à  $E_\gamma$ .

**3.4. LEMME.** — *Si  $\gamma$  vérifie i),  $\gamma$  est injectif (sauf peut-être si ses deux extrémités sont égales).*

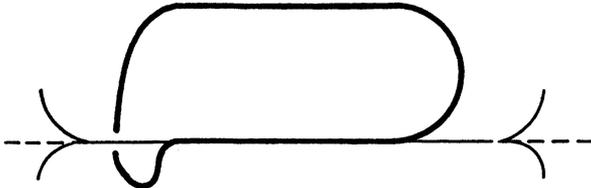


Figure 3.4. — L'idée de la démonstration : si  $\gamma$  n'est pas injectif, il fait une boucle. A cause de l'orientation, cette boucle est lisse, elle nous fournit un cycle lisse dessiné en gras. En rajoutant du poids au cycle gras, on obtient un nouveau système de poids, et on a fait passer du poids de la droite à la gauche de  $\gamma$ , on a donc détruit l'égalité des poids qui arrivent et des poids qui partent à gauche.

*Preuve.* — Par définition  $\gamma$  s'écrit  $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ , avec  $\gamma_2$  tracé sur  $\tau$ . Donc  $\gamma_2$  est une suite d'arêtes de  $\tau$ , que l'on note  $c_1, c_2, \dots$ .

Supposons que  $\gamma_2$  a un point double. Alors il existe  $n_0$  et  $m$  tel que le chemin formé de  $c_{n_0+1}, \dots, c_{n_0+m}$  soit fermé. Comme  $\gamma_2$  est lisse, il a une orientation qui coïncide avec celle de  $\tau$ , et donc le cycle formé de  $c_{n_0+1}, \dots, c_{n_0+m}$  est lisse. On appelle  $\mathcal{C}$  ce cycle,  $s$  le sommet commun à  $c_{n_0+1}$  et  $c_{n_0+m}$ . On appelle, avec un ordre cyclique,  $c'_1 = c_{n_0+1}, c'_2, \dots$  les arêtes de  $\mathcal{C}$ .

On a choisi  $n_0$  et  $m$  de telle sorte que si  $i$  et  $j$  sont distincts dans  $\{1, \dots, m\}$ , on ait  $c_{n_0+1} \neq c_{n_0+j}$ , ce qui revient à choisir une boucle plongée dans  $\tau$ . Il suffit pour satisfaire cette hypothèse de choisir  $m$  minimal. Une arête donnée figure alors au plus une fois dans la liste  $c'_1, \dots, c'_m$ .

On construit un nouveau système de poids  $\mu'$  sur  $\tau$  en posant :  $\mu'(a) = \mu(a) + p(a) \cdot \eta$ . La valeur de  $p(a)$  est 1 si l'arête  $a$  est égale à une  $c'_i$ , et 0 sinon.  $\eta$  est un nombre réel strictement positif.

Comme  $\mathcal{C}$  est un cycle lisse, si on avait trois arêtes  $a, b, c$  issues d'un même sommet, et telles que  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(c)$ , on a  $p(a) + p(b) = p(c)$ , et donc  $\mu'$  vérifie bien les relations de compatibilité. On a donc  $\mu' \in E(\tau)$ .

Comme  $\mathcal{C}$  est un cycle lisse,  $c_{n_0+m+1} = c_{n_0+1} = c'_1$ , donc il existe un entier  $j_0$  tel que :  $c_{n_0+m+i} = c_{n_0+i} = c'_i$  si  $0 < i < j_0$ , et  $c_{n_0+m+j_0} \neq c_{n_0+j_0} = c'_{j_0}$ .

*Remarque.* — Comme  $\gamma$  est approximable par un chemin sans point double, si, pour l'orientation de  $\gamma$ ,  $c_{n_0}$  est à gauche (resp. à droite) de  $c_{n_0+m} = c'_m$ , alors  $c_{n_0+j_0} = c'_{j_0}$  est à gauche (resp. à droite) de  $c_{n_0+m+j_0}$ .

On appelle contact de  $\gamma$  et  $\mathcal{C}$ , des entiers  $n$  et  $j$  tels qu'il existe  $p$  vérifiant :  $c_n \neq c'_p$  ; pour tout  $i > 0$  et  $i < j$ ,  $c_{n+i} = c'_{p+i}$  ; et  $c_{n+j} \neq c'_{p+j}$ .

On note  $\mathcal{J}(n, j)$  la réunion des  $c'_{n+i}$  pour  $0 < i < j$ .

On dit que  $(n, j)$  est un contact de type  $I^+$  si  $c_n$  est à droite de  $c'_p$  et  $c_{n+j}$  est à gauche de  $c'_{p+j}$ .

On dit que  $(n, j)$  est un contact de type  $I^-$  si  $c_n$  est à gauche de  $c'_p$  et  $c_{n+j}$  est à droite de  $c'_{p+j}$ .

Dans les autres cas, on parlera de contact de type  $II$ . Les contacts de type  $I$  correspondent à «  $\gamma$  traverse  $\mathcal{C}$  ».

Il est clair qu'il ne peut exister à la fois un contact de type  $I^+$  et un contact de type  $I^-$ , puisque  $\gamma$  doit être approximable par un chemin sans point double.

Soit  $N(\square)$  le nombre de contacts de type  $\square$ . En vertu de la remarque (qui dit que  $(n_0, j_0)$  est un contact de type  $I$ ),  $N(I^+) + N(I^-) \neq 0$ . On vient de noter que  $N(I^+) \cdot N(I^-) = 0$ .

Regardons les arêtes  $a_i$  rejoignant  $\gamma$  à gauche telles que  $\mu'(a_i) \neq \mu(a_i)$ . Alors  $a_i$  est  $c'_p$  pour un contact de type  $I^+$ , ou  $c'_{p+j}$  pour un contact de type  $I^-$ , ou  $c'_p$  ou  $c'_{p+j}$  pour un contact de type  $II$ .

On en déduit que  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) = \sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) + N(I^+) \eta - N(I^-) \eta$ . Or  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) = 0$ , donc  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) \neq 0$ .

Donc  $\mu' \in E(\tau) \setminus H_\gamma$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $E(\tau) \subset H_\gamma$ .  $\square$

**3.5. LEMME.** — Si  $\gamma$  vérifie i), la cellule origine de  $\gamma$  est identique à la cellule extrémité de  $\gamma$  ( $\gamma$  est un chemin fermé).

*Preuve.* — Supposons que  $\gamma$  n'est pas fermé, et prenons  $\mu$  dans  $H_\gamma$ . La cellule  $C$ , contenant l'origine de  $\gamma$  est un polygone à  $2n$  côtés,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{2n}$ , avec  $n \geq 2$ . On a numéroté les côtés à partir de la pointe origine de  $\gamma_2$ , et dans le sens des aiguilles d'une montre. Soit  $\eta$  un réel positif strictement plus petit que  $\inf(\mu(a))$ .

On définit  $\mu'$  par  $\mu'(a) = \mu(a) + \sum_{i=1 \dots 2n} (-1)^i p_i(a) \eta$ . Avec  $p_i(a) = 1$  si  $a \subset \mathcal{C}_i$ , et 0 dans le cas contraire. Le dessin est fait sur la figure 3.5.

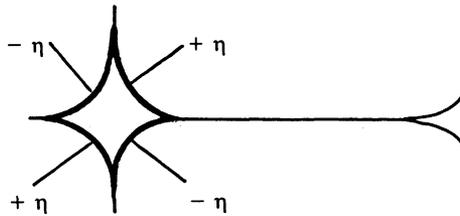


Figure 3.5.

Remarquons qu'à cause de l'orientabilité,  $a$  ne peut apparaître qu'une fois dans  $\mathcal{C}_i$ .

Prenons trois arêtes  $a, b, c$ , ayant un sommet  $s$  en commun, et vérifiant  $\mu(a) + \mu(b) = \mu(c)$ . Si les poids ont été changés, ou bien  $s$  est dans l'intérieur d'un  $\mathcal{C}_i$ , ou bien  $s$  est le sommet de  $C$  entre  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Dans les deux cas, on aura  $\mu'(a) + \mu'(b) = \mu'(c)$ . (On peut mettre un ordre cyclique sur les côtés à cause de la parité de leur nombre.) Donc  $\mu' \in E(\tau)$ .

On regarde les arêtes  $a_i$  à gauche de  $\gamma_2$ . Sur  $a_1$ , on a rajouté  $\eta$ , (qu'on va peut-être enlever dans le cas où les deux côtés de  $a_i$  sont

dans la cellule origine de  $\gamma$ ). Si on a aussi rajouté  $\pm \eta$  au poids de  $a_i$  (si les deux côtés de  $a_i$  sont dans la cellule origine de  $\gamma$ , on considère que l'on a rajouté, puis enlevé  $\eta$ ), le sommet  $s_i$  par lequel  $a_i$  se rattache à  $\gamma$  est dans le bord de  $C$ . Comme on a supposé que le chemin n'est pas fermé, il y a une arête commune à  $\gamma_2$  et au bord de  $C$ . Prenons un intervalle maximum de contact, contenant cette arête. Comme  $C$  ne contient pas d'arête de  $\tau$ , on est dans l'un des cas de la figure 3.6. On associe ainsi à  $i$  un  $i'$  pour lequel  $\varepsilon_i \mu'(a_i) + \varepsilon_{i'} \mu'(a_{i'}) = \varepsilon_i \mu(a_i) + \varepsilon_{i'} \mu(a_{i'})$ .



Figure 3.6.

On en déduit que  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) = \sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) + \eta$ .

Or  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) = 0$ , donc  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) \neq 0$ .

Donc  $\mu' \in E(\tau) \setminus H_\gamma$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $E(\tau) \subset H_\gamma$ . □

**3.6. LEMME.** — Si  $\gamma$  vérifie i),  $\gamma$ , qui est un chemin fermé simple, est homologue à 0.

*Preuve.* — Supposons que  $\gamma$  ne sépare pas. Prenons encore  $\mu$  dans  $H_\gamma$ . Comme le graphe est connexe et n'a que des cellules homéomorphes à des disques dont le bord n'est pas lisse, il existe un chemin  $\alpha$  plongé dans  $\tau$ , qui n'est pas nécessairement lisse, joignant un côté de  $\gamma$  à l'autre. On suppose de plus que  $\alpha$  ne rencontre  $\gamma$  qu'en ses deux extrémités, notées  $x$  et  $y$ .

On peut écrire  $\alpha = \alpha_1 * \dots * \alpha_k$ , les chemins  $\alpha_i$  étant lisses, et leurs extrémités différentes de  $x$  et  $y$  étant des rebroussements de  $\alpha$ . Soit  $\beta$  le chemin de  $\gamma$  joignant  $y$  à  $x$ .

$\delta = \alpha_1 * \dots * \alpha_k * \beta$  est un cycle plongé.

Le réseau étant orientable, ce cycle possède un nombre pair de points de rebroussements.

On pose  $\mu'(a) = \mu(a)$  si  $a$  n'est pas inclus dans  $\delta$ , et  $\mu'(a) = \mu(a) + (-1)^i \eta$  si  $a$  appartient au  $i^{\text{ème}}$  segment lisse de  $\delta$ . Le nombre réel  $\eta$  est positif et plus petit que tous les  $\mu(a)$ . De manière analogue au lemme 3.5,  $\mu' \in E(\tau)$ .

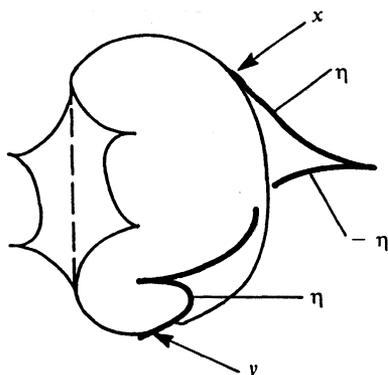


Figure 3.7. — (La courbe en gras et la courbe fine ne se coupent qu'en  $x$  et  $y$ .)

Regardons les deux arêtes arrivant sur  $\gamma$  en  $x$  et  $y$ . L'une est à droite, l'autre est à gauche. Donc il existe un unique  $i$  tel que  $\mu'(a_i) \neq \mu(a_i)$ , et donc  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) = \sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) \pm \eta$ .

Or  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu(a_i) = 0$ , donc  $\sum \varepsilon_i \cdot \mu'(a_i) \neq 0$ .

Donc  $\mu' \in E(\tau) \setminus H_\gamma$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse  $E(\tau) \subset H_\gamma$ .  $\square$

En regroupant les résultats des lemmes 3.4, 3.5, 3.6, on voit que les chemins liants  $\gamma$  vérifiant  $E(\tau) \subset H_\gamma$  sont fermés, simples, et séparants. Montrons la réciproque.

**3.7. LEMME.** — Soit  $\tau$  un réseau ferroviaire orientable muni d'un système de poids. Soit  $\tau'$  la partie de  $\tau$  obtenue en prenant  $n$  sommets de  $\tau$ , et toutes les arêtes qui y sont attachées. Alors la somme des poids des arêtes libres sortantes de  $\tau'$  est égale à la somme des poids des arêtes libres entrantes dans  $\tau'$ .

On montre le résultat par récurrence sur  $n$ . Pour 1 sommet, c'est la relation d'aiguillage à ce sommet, la récurrence est immédiate, à cause de l'orientation du réseau.

**3.8.** Soit donc un chemin liant  $\gamma$  fermé, simple et séparant. Si on l'enlève à  $\tau$ , on obtient  $\tau'_d$  et  $\tau'_g$  en prenant les sommets de  $\tau$  à droite et à gauche de  $\gamma$ , et les arêtes qui y sont attachées. Soit un système

de poids sur  $\tau$ . Alors  $\sum \varepsilon_j \cdot \mu(a_j)$  est égal à la somme des poids des arêtes libres sortantes de  $\tau'_g$ , diminuée de la somme des poids des arêtes libres entrantes dans  $\tau'_g$ . En vertu du lemme 3.4, on a donc  $\sum \varepsilon_j \cdot \mu(a_j) = 0$ . Donc  $\gamma$  vérifie  $E(\tau) \subset H_\gamma$ . On a donc démontré la proposition suivante :

**PROPOSITION.** — *Un chemin liant  $\gamma$  vérifie  $E(\tau) \subset H_\gamma$  si et seulement si il est fermé, simple et séparant.*

Notons que tous ces résultats utilisent toujours de manière essentielle l'orientabilité du réseau.

### 3.9. Nous voulons démontrer le théorème 1 :

**THÉORÈME 1 (Critère de la liaison séparante).** — *Un réseau ferroviaire orientable  $\tau$  porte un feuilletage minimal, si et seulement si il porte un feuilletage sans liaison large séparante.*

Remarquons que les chemins vérifiant la proposition 3.8 étant sans point double, ils sont en nombre fini. Nous allons maintenant nous intéresser à ces chemins, que nous appellerons  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ . On ne considère ici que les chemins élémentaires dans le sens où ils ne sont pas homotopes à la réunion de deux chemins liants fermés, simples, et séparants. Cela est suffisant, car si l'on prend un chemin non élémentaire, homotope à  $\gamma * \gamma'$ , et si  $\mathcal{F}$  n'a pas de liaison large pistée par ce chemin, alors  $\gamma$  ou  $\gamma'$  ne piste pas de liaison large de  $\mathcal{F}$ . Cela permet d'alléger l'algorithme.

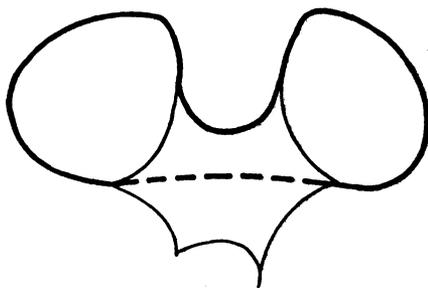


Figure 3.8. — La courbe en gras est un chemin liant qui est homotope au composé de deux chemins liants

— Ou bien  $\gamma_i$  n'a pas de schéma du type de ceux de la figure 3.3, tous les feuilletages portés par  $\tau$  ont une liaison pistée par  $\gamma_i$ .

— Ou bien  $\gamma_i$  a un schéma de la figure 3.3, que l'on supposera pour simplifier à gauche. C'est-à-dire qu'il existe  $j_0$  tel que  $\varepsilon_{j_0} = -1$ ,

et  $\varepsilon_{j_0+1} = +1$ . Il peut alors se produire deux cas :

- \* Ou bien  $\sum_{j=1 \dots j_0} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j)$  est toujours positif dans  $E(\tau)$ ;
- \* Ou bien  $\sum_{j=1 \dots j_0} \varepsilon_j \cdot \mu(a_j)$  est strictement négatif pour  $\mu$  dans un demi-espace ouvert de  $E(\tau)$ .

Donc le sous-ensemble de  $E(\tau)$  formé des feuilletages n'ayant pas de liaison large pistée par  $\gamma_i$  est un ouvert  $O_i$ , qui est vide, ou bien réunion de demi-espaces ouverts  $O_{i,1}; \dots; O_{i,l(i)}$ , correspondant à certains schémas de la figure 3.3 pour le chemin  $\gamma_i$ . On a donc le lemme suivant :

**3.10. LEMME.** — *Le sous-ensemble de  $E(\tau)$  formé des feuilletages n'ayant de liaison large pistée par aucun des  $\gamma_i$  est un ouvert, noté  $O$  et donné par  $O = \bigcap_{i=1 \dots k} O_i$ .*

*Remarque.* — Cet ouvert peut être vide, même si les  $O_i$  ne le sont pas. Par exemple, on peut avoir deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , avec  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ , c'est-à-dire que  $O_1$  et  $O_2$  sont les deux demi-espaces correspondant à un même hyperplan.

**3.11. LEMME.** — *Si  $O$  est non vide,  $\tau$  porte un feuilletage sans liaisons.*

*Preuve.* — Soit  $\theta$  un chemin liant de  $\tau$ , qui n'est pas fermé simple et séparant. Il y a un nombre dénombrable de tels chemins dans  $\tau$ . En vertu de ce qui a été dit dans 3.3, l'ensemble  $O'_\theta$  des feuilletages n'ayant pas de liaison pistée par  $\theta$  contient un ouvert dense de  $E(\tau)$ . Donc l'intersection des  $O'_\theta$  est dense dans  $E(\tau)$ . Donc  $O \cap (\bigcap O'_\theta)$  est non vide. Or cette intersection correspond justement aux feuilletages sans liaison de  $E(\tau)$ .  $\square$

**3.12.** Sachant que  $O$  est non vide si  $\tau$  porte un feuilletage sans liaison large séparante, et ([F.L.P.], exp. 9, III), qu'un feuilletage mesuré sans liaison est minimal, on voit que si  $\tau$  porte un feuilletage sans liaison large séparante, il porte un feuilletage minimal. La réciproque est vraie, puisqu'une liaison large séparante ne coupant aucune autre feuille, elle empêche les demi-feuilles d'être denses.

Nous avons donc démontré le théorème 1.

On a même montré que les systèmes de poids donnant des feuilletages minimaux sont denses dans un ouvert de  $E(\tau)$ .

La démonstration du critère de la liaison séparante fournit un algorithme.

**3.13. THÉORÈME 1'.** — *Il existe un algorithme pour décider si  $\tau$  porte un feuilletage minimal.*

Il suffit d'analyser les étapes de la démonstration du critère de la liaison séparante.

La première étape consiste à chercher dans  $\tau$  les chemins liants fermés, simples et séparants,  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ . Ensuite, pour chacun, on cherche si  $O_i$  est non vide. Pour cela, il faut pour certains schémas comme ceux de la figure 3.3, vérifier la validité d'une inéquation. Enfin il faut voir si  $O$  est non vide, et cela se ramène à vérifier que des intersections de demi-espaces sont non vides.

**3.14.** Enfin, nous donnons sur la figure 3.9 l'exemple de deux réseaux sur le tore à deux trous, presque semblables, mais dont l'un porte des

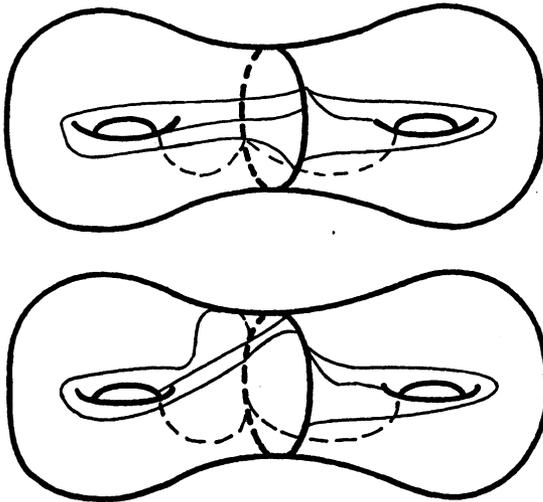


Figure 3.9.

feuilletages minimaux, alors que l'autre n'en porte pas. Nous avons représenté sur la figure 3.10 les deux graphes sous-jacents, projetés dans le plan. Dans le premier cas, le cycle gras porte toujours une bande

de feuilles compactes séparantes, de largeur  $\mu(e)$ . Dans le second cas, si  $\mu(a) > \mu(e)$ , le cycle gras ne porte rien. Ici, on a un seul  $\gamma_1$  présentant un schéma à étudier, et  $O_1 = \{\mu/\mu(a) > \mu(e)\}$ .

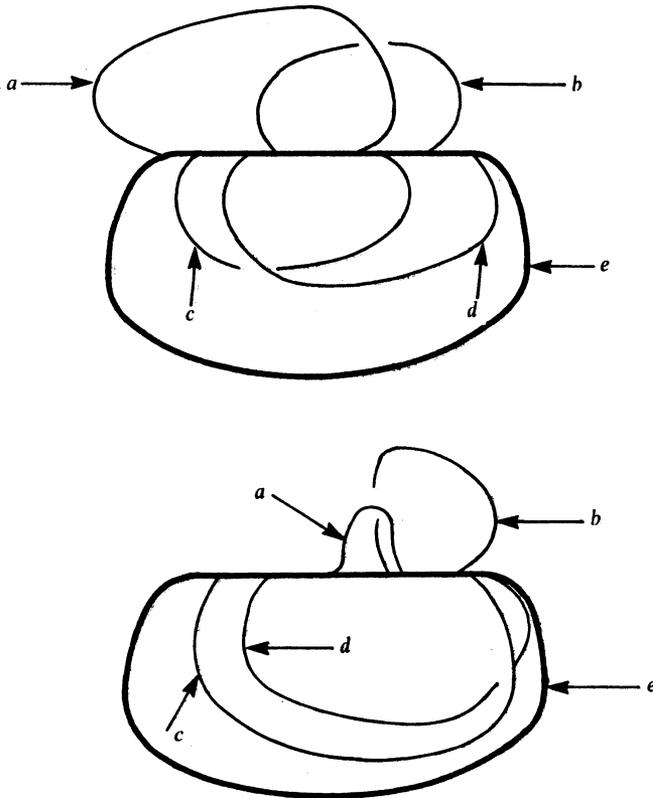


Figure 3.10.

#### 4. Sections globales.

Nous allons, dans ce paragraphe, démontrer le théorème de la section globale, énoncé en 1.5.

**4.1. LEMME.** — *Soit une surface à bord, munie d'un feuilletage transverse au bord, tel que toute demi-feuille régulière rencontre le bord. Alors le feuilletage est constitué de bandes régulières ouvertes allant du bord au bord, et bordées par des séparatrices.*

Autrement dit,  $(M, \mathcal{F})$  est obtenu en recollant des bandes selon leur bord.

La démonstration est évidente.

**4.2. LEMME.** — *Si il existe une section globale  $\alpha$  de  $\mathcal{F}$ , il en existe une autre,  $\beta$ , qui rencontre en plus toute liaison.*

*Preuve.* — Rappelons qu'une section globale est une courbe fermée simple transverse à  $\mathcal{F}$ , et rencontrant toute demi-feuille régulière. Découpons  $M$  selon  $\alpha$ . On obtient une seule composante connexe, puisque,  $\alpha$  coupant toute demi-feuille régulière, il doit y avoir un bord entrant  $C_e$  et un bord sortant  $C_s$ . Appelons cette composante  $M_1$ , et  $\mathcal{F}_1$  le feuilletage induit par  $\mathcal{F}$ . Comme  $\alpha$  était une section globale de  $\mathcal{F}$ ,  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  vérifie les hypothèses du lemme 4.1. Supposons maintenant que  $\alpha$  ne coupe pas une liaison, notée  $L$ . Cette liaison est alors intérieure à  $M_1$ ; soit  $x$  un point de  $L$ ,  $V$  une carte au voisinage de  $x$  ne rencontrant pas d'autre séparatrice,  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $V$  situés de part et d'autre de  $L$ . Soit  $B_i$  la bande ouverte régulière contenant  $x_i$ . Soit  $\gamma_i$  une transversale à  $\mathcal{F}_1$  contenue dans  $V$ , et joignant  $x_i$  à  $x$ . Soit  $\gamma$  le composé de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2^{-1}$ .

Soit  $F(x_i)$  la feuille passant par  $x_i$ .  $F(x_i) \cap \gamma_i = \{x_i\}$ , car on est dans  $B_i$ .  $F(x_1) \cap \gamma_2$  est soit vide soit réduit à un point  $x'_1$ . Mais alors  $B_1 = B_2$ , et  $F(x_2) \cap \gamma_1 = \{x'_2\}$ . Quitte à remplacer  $(x_1, x_2)$  par  $(x'_1, x'_2)$ , on peut supposer que  $F(x_i) \cap \gamma = \{x_i\}$ .

On construit alors, en approximant la composée de la partie de  $F(x_1)$  joignant  $C_e$  à  $x_1$ , puis  $\gamma$ , puis la partie de  $F(x_2)$  joignant  $x_2$  à  $C_s$ , une transversale allant de  $C_e$  à  $C_s$ , sans point double, et rencontrant  $L$ . On complète cette transversale dans  $M$  à l'aide de  $\alpha$  (en faisant au

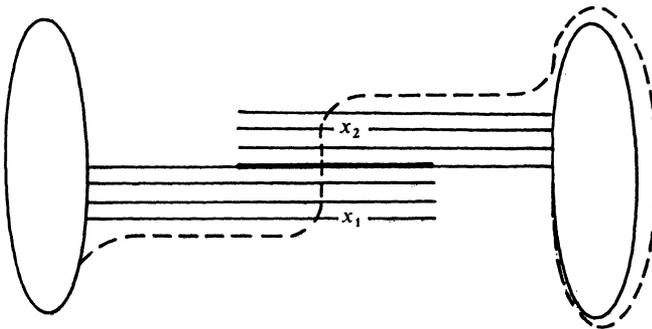


Figure 4.1.

moins un tour pour couper toutes les feuilles). Cela donne une section globale  $\beta$  coupant  $L$ , et toutes les liaisons que coupait  $\alpha$ . En itérant, on en déduit le lemme 4.2.  $\square$

Or ([L.1]), un feuilletage est suspension d'un échange d'intervalles si et seulement si il existe une section globale rencontrant toute liaison. On a donc montré  $2) \Leftrightarrow 1)$ .

**4.3. PROPOSITION.** — *Si il existe une section globale pour  $\mathcal{F}$ , alors il existe un feuilletage  $\mathcal{G}$  transverse à  $\mathcal{F}$  dont toutes les feuilles régulières sont compactes et isotopes. Autrement dit  $1) \Leftrightarrow 3)$ .*

*Preuve.* — Prenons une courbe  $\beta$  comme celle du lemme 4.2, c'est-à-dire coupant toute liaison. Découpons  $M$  selon  $\beta$ , et appelons comme précédemment  $M_1$  la surface à bord, et  $\mathcal{F}_1$  le feuilletage induit. D'après le lemme 4.1,  $M_1$  est réunion de bandes feuilletées régulières, dont chaque bord horizontal ne contient qu'une singularité, puisque  $\beta$  rencontre toutes les liaisons. On a représenté ceci sur la figure 4.2.

Construisons une forme fermée transverse comme indiqué sur la figure 4.2 avec un cycle de liaisons passant par toutes les singularités, et en mettant une mesure transverse 1 sur chaque demi-feuille de  $\mathcal{F}_1$  allant de ce cycle au bord. Lorsque l'on a fait ceci sur toutes les bandes, on recolle, et on a construit un feuilletage transverse à  $\mathcal{F}$ , dont toutes les feuilles régulières sont compactes et isotopes à  $\beta$ .  $\square$

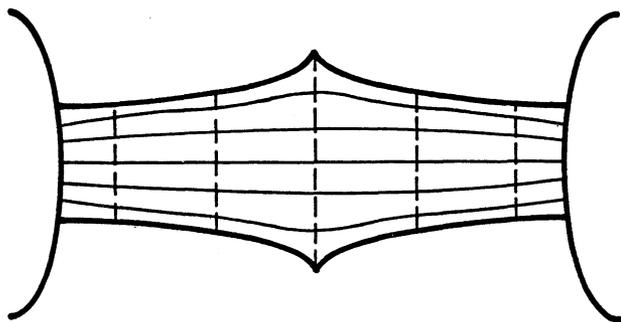


Figure 4.2.

**4.4.** Prenons un feuilletage  $\mathcal{G}$  comme dans 3). Deux feuilles compactes bordent un anneau, sur lequel on a un feuilletage induit à feuilles compactes, sans singularités à cause de la caractéristique d'Euler. Il s'agit donc du feuilletage par les cercles.

Donc lorsque l'on enlève toutes les liaisons de  $\mathcal{G}$ , on obtient un anneau ouvert qui est la réunion de toutes les feuilles compactes. On n'a donc pas disconnecté  $M$ . Le feuilletage  $\mathcal{G}$  est donc sans liaison large séparante. Or il est mesuré. Donc il existe un feuilletage mesuré transverse à  $\mathcal{F}$  sans liaison large séparante (3)  $\Rightarrow$  3')).

**4.5. PROPOSITION.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage orienté et  $\mathcal{G}$  une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ . Il existe un réseau  $\tau$  transverse à  $\mathcal{F}$  au sens de 3.1, qui porte  $\mathcal{G}$ .

Pour cela, décollons  $\mathcal{G}$  suivant ses séparatrices, comme sur la figure 4.3. On y a représenté  $\mathcal{F}$  en trait discontinu. C'est l'opération inverse de l'écrasement défini à la section 1.

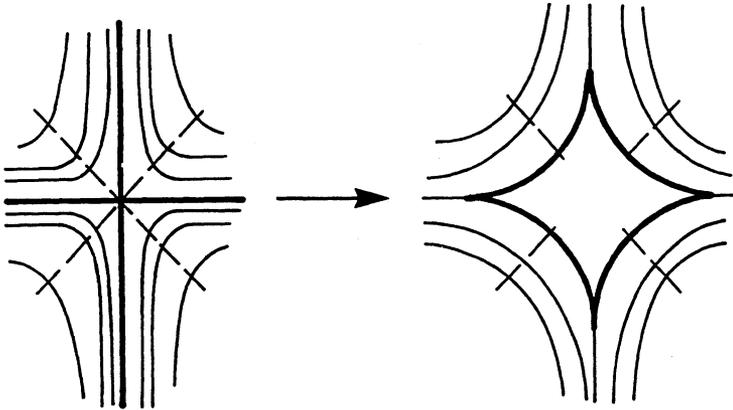


Figure 4.3.

On obtient une partie de  $M$  dont le bord a des singularités du type pointes rentrantes, muni d'un feuilletage longitudinal  $\mathcal{G}_1$ , et qui admet  $\mathcal{F}$  pour feuilletage transverse. En ouvrant, si les feuilles de  $\mathcal{F}$  ne vont pas toutes du bord au bord, un certain nombre de bigones selon les feuilles de  $\mathcal{G}_1$  (fig. 4.4), on obtient un certain  $V$ , muni du feuilletage longitudinal  $\mathcal{G}_2$  provenant de  $\mathcal{G}_1$ , transverse à  $\mathcal{F}$ , et sur lequel les feuilles de  $\mathcal{F}$  vont du bord au bord, c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage

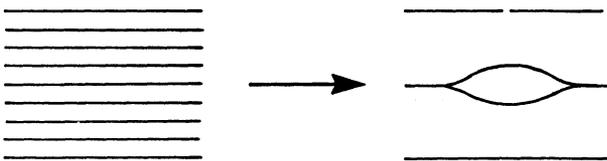


Figure 4.4.

par transverses. En écrasant ces traverses, on trouve un réseau  $\tau$  portant  $\mathcal{G}$ . Comme les traverses sont les feuilles de  $\mathcal{F}$ , ce réseau est transverse à  $\mathcal{F}$ . (Au sens de 3.1, en effet, il ne peut y avoir plus d'une singularité de  $\mathcal{F}$  dans chaque composante du complémentaire.)  $\square$

**4.6. PROPOSITION.** — *Si il existe une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ , sans liaison large séparante, il existe une forme fermée transverse à  $\mathcal{F}$ , et minimale. Autrement dit 3')  $\Rightarrow$  3").*

Soit, d'après la proposition 4.5, un réseau  $\tau$ , transverse à  $\mathcal{F}$ , portant  $\mathcal{G}$ . Alors  $\tau$  porte un feuilletage sans liaison large séparante, et donc d'après le théorème 1 (critère de la liaison séparante), il porte un feuilletage minimal. Comme  $\tau$  est transverse à  $\mathcal{F}$  au sens de 3.1, il existe un feuilletage minimal transverse à  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**4.7. LEMME.** — *S'il existe un feuilletage  $\mathcal{G}''$  transverse à  $\mathcal{F}$  et minimal, il existe un section globale de  $\mathcal{F}$ . Autrement dit 3")  $\Rightarrow$  1).*

On note encore  $M^*$  le complémentaire des singularités, et  $\mathcal{F}^*$  et  $\mathcal{G}''^*$  les feuilletages réguliers induits. Choisissons un système fini de cartes carrées pour  $\mathcal{F}^*$  et  $\mathcal{G}''^*$ . Prenons  $L$  une demi-feuille régulière de  $\mathcal{G}''$ . Comme  $\mathcal{G}''$  est minimal,  $L$  est dense. Soit donc un segment  $[a, b]$  de  $L$  passant dans toutes les cartes.

Soit maintenant  $I$  un petit intervalle transverse à  $\mathcal{G}''$ , contenant  $a$  et ne rencontrant pas le segment  $[a, b]$ , et rajoutons le segment  $[b, c]$  le plus court, inclus dans  $L$ , tel que  $c$  soit sur  $I$ . On peut alors refermer en suivant  $I$  pour obtenir une courbe fermée transverse simple rencontrant toute demi-feuille de  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire une section globale.  $\square$

Ceci achève la démonstration du théorème B.

## BIBLIOGRAPHIE

- [D.] C. DANTHONY, Réseaux ferroviaires et feuilletages orientés de surfaces, Thèse, Université Paris XI, 1986.  
 [F.L.P.] A. FATHI, LAUDENBACH, V. POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque, (1979), 66-67.  
 [L.1] G. LEVITT, Pantalons et feuilletages de surfaces, Topology, 21 (1982), 9-33.

- [L.2] G. LEVITT, Feuilletages des surfaces, Ann. Inst. Fourier, 32-2 (1982), 179-217.
- [T.] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, cours polycopié, Princeton University.

Manuscrit reçu le 6 février 1987  
révisé le 13 novembre 1987.

Claude DANTHONY,  
Université Paris XI,  
Mathématiques, bât. 425,  
91405 Orsay Cedex.

*adresse actuelle :*

IMPA,  
Estrada Dona Castorina, 110,  
Jardim Botânico,  
22460-Rio-de-Janeiro R.J.  
(Brésil).