

GILBERT LEVITT

## **La décomposition dynamique et la différentiabilité des feuilletages des surfaces**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 3 (1987), p. 85-116

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_3\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_85_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# LA DÉCOMPOSITION DYNAMIQUE ET LA DIFFÉRENTIABILITÉ DES FEUILLETAGES DES SURFACES

par Gilbert LEVITT

## Introduction.

Cet article, consacré aux feuilletages (singuliers) des surfaces compactes, comporte deux parties. Le but de la première est de montrer comment on peut canoniquement décomposer une surface munie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  à selles et épines de manière à isoler les diverses composantes de la récurrence de  $\mathcal{F}$ . La surface est ainsi découpée selon des courbes transverses en un nombre fini de sous-surfaces, et la dynamique s'étudie séparément dans chacune de ces sous-surfaces.

Dans la deuxième partie nous proposons une définition de ce que signifie "être de classe  $C^r$ " pour un feuilletage singulier d'une surface, et nous étudions quelles restrictions une hypothèse de différentiabilité (en particulier :  $\mathcal{F}$  est  $C^2$ ) impose à la topologie et à la dynamique du feuilletage. Nous verrons par exemple que dans un feuilletage  $C^2$  d'une surface de genre 0 il n'y a pas de feuille exceptionnelle (toute feuille est propre ou localement dense), et que sur le tore  $T^2$  certains feuilletages singuliers orientables ne peuvent pas être  $C^2$ .

Commençons par un exemple (voir fig. 1). Il existe dans un disque  $D$  un feuilletage  $\mathcal{F}_\rho$  transverse au bord, dont les singularités sont une selle à trois branches et trois épines, tel que toutes les feuilles régulières issues du bord restent dans l'intérieur de  $D$  ( $\mathcal{F}_\rho$  est un labyrinthe au sens de Rosenberg, voir [15] exemple 1 p. 6). Ces feuilles ont toutes le même ensemble limite  $K$ , un compact invariant d'intérieur vide dit *quasiminimal* car toute feuille régulière contenue dans  $K$  y est dense; une feuille régulière de  $\mathcal{F}_\rho$  est récurrente si et seulement si elle est contenue dans  $K$ .

En juxtaposant deux disques  $D_1$  et  $D_2$  munis de  $\mathcal{F}_\rho$  (voir fig. 2) on obtient sur un disque un nouveau labyrinthe  $\mathcal{F}_m$ , qui

*Mots-clés* : Feuilletages des surfaces – Dynamique – Différentiabilité – Récurrence – Quasiminimal.

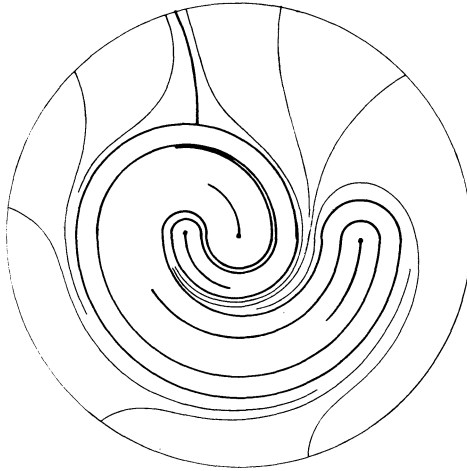
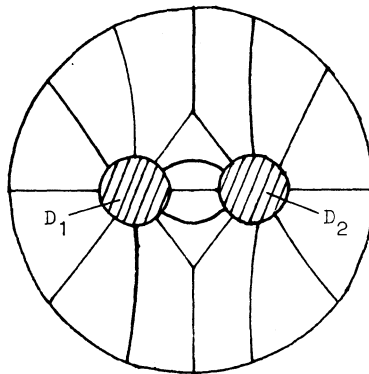


Figure 1

Figure 2. — Chacun des disques hachurés est muni de  $\mathfrak{F}_2$ .

possède deux quasiminimaux  $K(D_1)$  et  $K(D_2)$ . Les labyrinthes sont classifiés dans [15], mais cette classification ne fait pas apparaître le fait que  $\mathfrak{F}_m$  est dynamiquement beaucoup plus compliqué que  $\mathfrak{F}_2$ . Le seul moyen de faire ressortir cette complexité est de décomposer le disque en régions bordées par des courbes transverses, comme sur la figure 2.

De façon plus générale, étant donné sur une surface compacte  $M$  un feuilletage  $\mathfrak{F}$  à selles et épines, nous allons construire sa *décomposition dynamique*, c'est-à-dire une famille canonique  $\mathcal{D}$  de courbes transverses disjointes décomposant  $M$  en un nombre fini de régions, comme ci-dessus (il peut être nécessaire pour obtenir  $\mathcal{D}$  de

modifier  $\mathcal{F}$  par opérations de Whitehead, au sens de [3] ou [20]; d'autre part nous devons supposer que  $\mathcal{F}$  satisfait à certaines conditions peu restrictives d'*arationnalité*: en particulier  $\mathcal{F}$  n'aura ni cycle de feuilles ni feuille compacte homéomorphe à  $S^1$ .

Les régions de la décomposition seront de deux types: les *régions de récurrence* (comme  $D_1$  et  $D_2$  ci-dessus), dans lesquelles aucune feuille ne va du bord au bord et toutes les feuilles régulières issues du bord ont comme ensemble limite le même quasiminimal  $K(N)$ ; et les *régions de passage* dans lesquelles toute feuille régulière va du bord au bord. De plus chaque courbe de  $\mathcal{O}$  borde d'un côté une région de récurrence et de l'autre une région de passage.

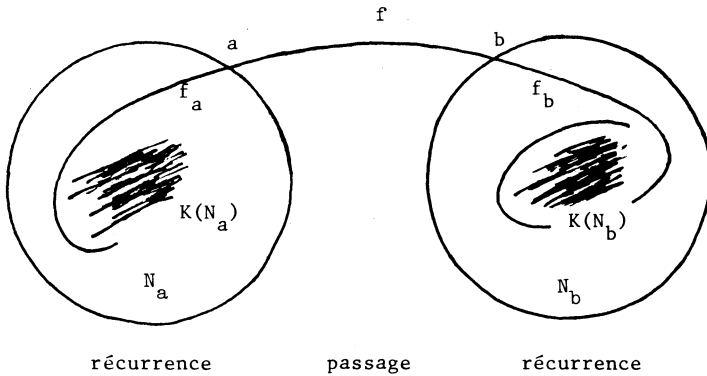


Figure 3. —  $\bar{f} = f \cup K(N_a) \cup K(N_b)$

En supposant pour simplifier que  $M$  est sans bord, il n'y a donc que deux types possibles pour une feuille régulière  $f$  de  $\mathcal{F}$ : ou bien  $f$  est entièrement contenue dans une région de récurrence  $N$ , et on montre alors que  $\bar{f} = K(N) \cup f$ ; ou bien (voir fig. 3) on peut écrire  $f$  comme l'union d'un segment compact  $[a, b]$  contenu dans une région de passage et de deux demi-feuilles  $f_a$  et  $f_b$  contenues dans des régions de récurrence (peut-être égales)  $N_a$  et  $N_b$ . Nous verrons que  $f$  est récurrente si et seulement si elle est du premier type et contenue dans  $K(N)$ .

Cette décomposition  $\mathcal{O}$  de  $M$  en régions de récurrence et régions de passage est essentiellement unique, si l'on demande que les régions de récurrence soient aussi "simples" que possible (en un sens que nous préciserons dans Ic). En d'autres termes, on obtient  $N$  en ajoutant à  $K(N)$  juste ce qu'il faut pour arriver à une région bordée par des courbes transverses. Nous appellerons  $N$  le *voisinage canonique* de  $K$ , et son genre  $g(N)$  sera le *genre* de  $K$ .

Par exemple les deux quasiminimaux de  $\mathfrak{F}_m$  sont de genre 0. Par contre tout quasiminimal d'un feuilletage orientable  $\mathfrak{F}$  est de genre au moins 1 (et donc  $\mathfrak{F}$  contient au plus  $g(M)$  quasiminimaux, conformément à [14]). Etant donné un entier  $n \geq 1$  et une surface  $M$ , il existe toujours sur  $M$  un feuilletage arationnel (non orientable) contenant  $n$  quasiminimaux, mais nous verrons dans IIb qu'un feuilletage arationnel de classe  $C^2$  contient au plus  $g(M)$  quasiminimaux.

Signalons d'autre part le fait suivant, que nous ne montrerons pas ici (voir [12], ch. III): on peut reconstruire  $N$  (munie du feuilletage induit) par des ouvertures de feuilles et de demi-feuilles à partir d'une surface fermée  $M(N)$  de genre  $g(N)$  munie d'un feuilletage  $\mathfrak{F}(N)$  à feuilles denses; le quasiminimal  $K(N)$  doit être considéré comme "isomorphe" à  $M(N)$  munie de  $\mathfrak{F}(N)$  (cette

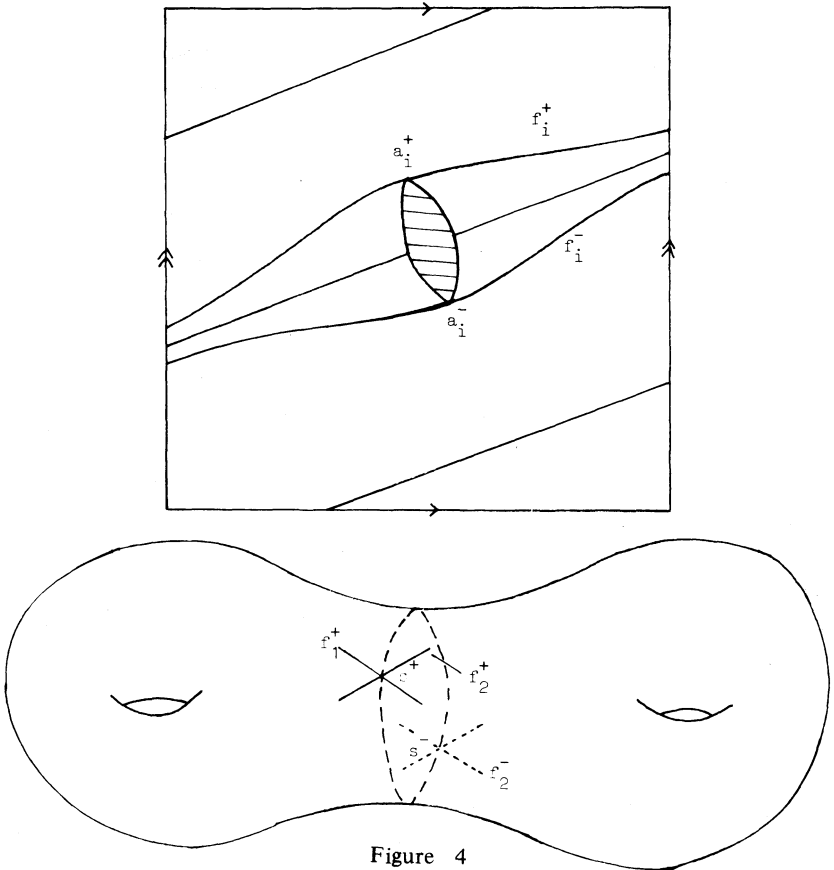


Figure 4

construction, ainsi que la notion de genre d'un quasiminimal, est due à Veech [22] pour un feuilletage orientable ; voir aussi [5]). Par exemple le quasiminimal de  $\mathcal{F}_q$  est de genre 0 et isomorphe à une sphère munie d'un feuilletage mesuré à 4 épines, quotient d'un flot irrationnel sur  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  par l'involution  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ .

Pour introduire la deuxième partie, considérons un autre exemple. Soient  $\mathcal{F}_i^d$  ( $i = 1, 2$ ) deux feuilletages non singuliers de  $T^2$  sans feuille compacte ni feuille dense, obtenus en ouvrant une feuille  $f_i$  dans un flot irrationnel (voir fig. 4) ; le complémentaire de l'union des feuilles comprises entre  $f_i^+$  et  $f_i^-$  est un compact invariant  $K_i$ . D'après Denjoy [2], le feuilletage  $\mathcal{F}_i^d$  ne peut pas être  $C^2$  (mais il peut être  $C^1$ ).

Découpons une boutonnière entre  $f_i^+$  et  $f_i^-$ , et recollons selon les boutonnières les deux tores troués qui restent, en identifiant  $a_1^+$  à  $a_2^+$  et  $a_1^-$  à  $a_2^-$ . On obtient sur une surface fermée de genre 2 un feuilletage  $\mathcal{F}_b$  dont les singularités sont deux selles à 4 branches  $s^+$  et  $s^-$  (voir fig. 4).

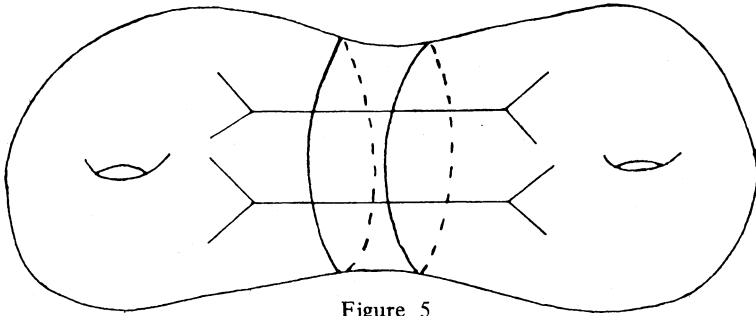


Figure 5

Ce feuilletage contient deux ensembles quasiminimaux  $K'_i$ , correspondant aux  $K_i$  ; ils se touchent en  $s^+$  et  $s^-$ . Pour les disjointer, il faut modifier  $\mathcal{F}_b$  par opérations de Whitehead en éclatant les selles  $s^+$  et  $s^-$  (voir fig. 5).

Ceci fait,  $K'_1$  et  $K'_2$  peuvent être séparés par une courbe transverse, et la décomposition dynamique de  $\mathcal{F}_b$  comporte deux régions de récurrence et une région de passage égale à un anneau (voir fig. 5). Chaque quasiminimal est de genre 1 et isomorphe à un flot irrationnel sur  $T^2$ .

Bien que  $\mathcal{F}_b$  soit orientable (i.e. il peut être défini par un champ de vecteurs), il est donc nécessaire pour en séparer les quasiminimaux et obtenir sa décomposition dynamique de *détruire son orientabilité* par des opérations de Whitehead. Nous allons voir que ce phénomène est lié à un *manque de différentiabilité* de  $\mathcal{F}_b$ .

Il est en effet raisonnable de penser que  $\mathcal{F}_b$ , obtenu à partir de feuilletages qui ne peuvent pas être  $C^2$ , n'est pas très différentiable. Mais en quel sens ? Pour un feuilletage singulier d'une surface, il n'existe pas de notion évidente de différentiabilité.

Demander que  $\mathcal{F}$  soit  $C^\infty$  dans le complémentaire des singularités (ou dans le cas orientable que  $\mathcal{F}$  soit défini par un champ de vecteurs  $C^\infty$ ) est trop faible à cause du théorème de Gutierrez ([5]; voir le début de IIa); par exemple  $\mathcal{F}_b$  peut être défini par un champ de vecteurs  $C^\infty$ . Il faut donc imposer des conditions supplémentaires près des singularités de  $\mathcal{F}$ .

Notre but dans la deuxième partie est en fait de proposer une *définition* d'un feuilletage de classe  $C^r$ , et d'essayer de *caractériser* les feuilletages qui sont topologiquement conjugués à un feuilletage  $C^r$  ( $r \geq 2$ ).

Notre définition s'exprime en termes des *applications de premier retour* induites sur les courbes transverses à  $\mathcal{F}$ . Les feuilletages  $C^r$  en notre sens comprennent en particulier les feuilletages auxquels on impose certains modèles locaux  $C^r$  près des singularités (par exemple les feuilletages  $C^r$  considérés dans [13] ou [19]), mais bien sûr pas de feuilletage topologiquement conjugué à  $\mathcal{F}_b$  si  $r \geq 2$ .

Après avoir donné cette définition, nous dégagerons certaines *propriétés topologiques* que possèdent les feuilletages arationnels de classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ).

Nous verrons par exemple que l'on ne peut pas de façon  $C^2$  ouvrir deux demi-feuilles de sens opposés dans un flot irrationnel (voir fig. 6). Nous montrerons également qu'un quasiminimal de genre 1 d'un feuilletage orientable arationnel est disjoint des autres quasiminimaux et peut en être séparé par des courbes transverses à  $\mathcal{F}$ ; cela nous permet de généraliser à des surfaces de genre quelconque un théorème que Stredder avait démontré en genre 2.

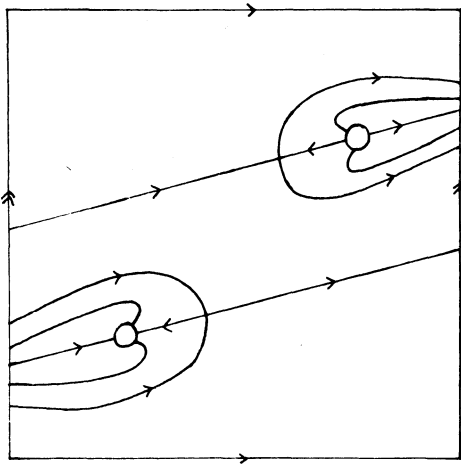


Figure 6

Pour les feuilletages non orientables, nous utiliserons un théorème de [13] pour montrer qu'un feuilletage arationnel  $C^2$  se comporte dans une certaine mesure comme un feuilletage orientable : sur une surface de genre 0 à bord non vide toute feuille est propre, et en genre plus grand le nombre de quasiminimaux est inférieur ou égal à  $g(M)$ .

Nous donnerons également des *conditions suffisantes* pour qu'un feuilletage orientable soit topologiquement conjugué à un feuilletage  $C^\infty$ , et nous construirons sur une surface fermée un *exemple* de feuilletage orientable  $C^\infty$  possédant exactement un quasiminimal mais ni feuille compacte ni feuille dense (ce feuilletage sera la suspension d'un échange d'intervalles affine, c'est-à-dire de pente constante sur chacun de ses intervalles de continuité); cet exemple répond à une question posée par Stredder et Veech. Précisons toutefois que nous ne savons pas caractériser complètement les feuilletages orientables topologiquement conjugués à un feuilletage  $C^2$  (ou  $C^\infty$ ).

Je tiens à remercier ici Jenny Harrison pour ses explications enthousiastes sur les rotations irrationnelles, et Harold Rosenberg pour ses encouragements et ses conseils. Certains des résultats de cet article sont des réponses à des questions qu'il m'a posées.



## I. LA DECOMPOSITION DYNAMIQUE

### I.a. Définitions ; propriétés élémentaires des ensembles quasiminimaux.

Dans tout ce travail nous désignons par  $M$  une surface compacte orientable, et par  $\mathcal{F}$  un feuilletage transverse à  $\delta M$  dont les singularités sont des épines et des selles (voir fig. 7).

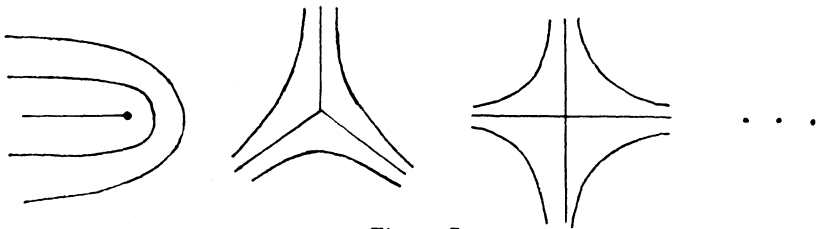


Figure 7

Nous supposons de plus que  $\mathcal{F}$  est *arationnel* au sens suivant :  $\mathcal{F}$  ne contient ni liaison selle-épine ou épine-épine, ni feuille (ou union de selles et de liaisons) homéomorphe à  $S^1$  (cette définition est un peu moins restrictive que celle de [13] ou [15]). Un feuilletage quelconque se ramène à un feuilletage arationnel par un nombre fini d'opérations simples (découpages, écrasements) ; on ne perd donc pas de généralité en se limitant aux feuilletages arationnels.

Nous aurons besoin de modifier  $\mathcal{F}$  par *opérations de Whitehead*, en éclatant une selle possédant plus de 3 branches ou au contraire en écrasant une liaison entre selles ([3], [20]). Deux feuilletages seront dits *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par des opérations de Whitehead et une *isotopie* (= conjugaison par un homéomorphisme isotope à l'identité).

Par définition, une *feuille* de  $\mathcal{F}$  est une feuille du feuilletage non singulier obtenu en retranchant de  $M$  les singularités de  $\mathcal{F}$ . Une feuille est dite *propre* ou *récurrente* selon que sa topologie de feuille coïncide ou non avec la topologie induite par celle de  $M$ . Les feuilles partant des singularités sont les *séparatrices* ; les autres feuilles sont dites *régulières*.

En enlevant un point à une feuille, on obtient deux *demi-feuilles* (attention, la définition de [9] ou [12] est légèrement différente). L'ensemble limite  $\beta(f)$  d'une demi-feuille infinie  $f$  est l'ensemble des points au voisinage desquels  $f$  passe une infinité de fois ; c'est aussi l'intersection des adhérences des demi-feuilles contenues dans  $f$ .

Un compact  $K \subset M$  est un *ensemble quasiminimal* si  $K$  est l'adhérence d'une feuille régulière récurrente et si toute feuille régulière contenue dans  $K$  y est dense. Il n'est pas très difficile d'établir les propriétés suivantes des quasiminimaux d'un feuilletage arationnel  $\mathcal{F}$  (voir [12] prop. III.3.1) :

**PROPOSITION I.1.** — *Un quasiminimal ne rencontre jamais  $\delta M$ , contient une infinité non dénombrable de feuilles, est soit égal à  $M$  soit d'intérieur vide. L'ensemble limite d'une demi-feuille infinie contient toujours un quasiminimal. Toute demi-feuille infinie contenue dans un quasiminimal y est dense (en particulier, l'intersection de deux quasiminimaux distincts ne peut contenir que des selles et des liaisons). Un feuilletage ne possède qu'un nombre fini de quasiminimaux.*

*Remarques.* — Nous verrons dans Ic que l'ensemble limite d'une demi-feuille infinie est toujours un quasiminimal. En particulier, on peut caractériser un quasiminimal comme l'adhérence d'une feuille récurrente.

— Un feuilletage peut posséder jusqu'à  $[(3g + b + e - 2)/2]$  quasiminimaux, où  $g$  est le genre de  $M$ ,  $b$  le nombre de composantes de  $\delta M$ , et  $e$  le nombre d'épines ([12], section III.5). Sur une surface donnée le nombre de quasiminimaux d'un feuilletage peut donc être arbitrairement grand. Par contre nous avons déjà indiqué que  $\mathcal{F}$  possède au plus  $g$  quasiminimaux s'il est orientable [14] ou arationnel de classe  $C^2$  (voir IIb).

— Si  $\mathcal{F}$  ne possède pas d'épines et si  $M$  est sans bord, on peut associer à  $\mathcal{F}$  une lamination géodésique  $\gamma$  (voir [11], [12] ch. II), et montrer que les quasiminimaux de  $\mathcal{F}$  correspondent naturellement aux *sous-laminations minimales* de  $\gamma$  ([12] section II.4.ii).

### I.b. Séparation des quasiminimaux.

Pour obtenir la décomposition dynamique de  $\mathcal{F}$ , nous allons d'abord montrer que, quitte à remplacer  $\mathcal{F}$  par un feuilletage équivalent, on peut séparer ses quasiminimaux par des courbes transverses (c'est le but de cette section). Nous associerons ensuite à une telle famille de courbes une complexité, et nous montrerons (théorème I.6) qu'il existe essentiellement *une seule* famille de complexité minimale.

**THEOREME I.2.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage arationnel de  $M$ . Il existe un feuilletage  $\mathcal{F}'$  équivalent à  $\mathcal{F}$  et une famille finie de courbes disjointes transverses à  $\mathcal{F}'$  qui possèdent les propriétés suivantes : ces courbes sont disjointes de  $\delta M$ , ne rencontrent aucun quasiminimal de  $\mathcal{F}'$ , et chaque composante du complémentaire de l'union de ces courbes contient au plus un quasiminimal.*

Nous allons seulement esquisser la démonstration de ce théorème, car elle fait appel à des techniques déjà assez connues. On trouvera une démonstration complète dans [12], ch. III.

On commence par remplacer  $\mathcal{F}$  par un feuilletage équivalent (encore noté  $\mathcal{F}$ ) dont les quasiminimaux sont disjoints. Le théorème I.2 se déduit alors facilement du :

**THEOREME I.3.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage arationnel dont les quasiminimaux sont disjoints. Soit  $C$  une courbe fermée simple ne rencontrant aucun quasiminimal ; on suppose que  $C$  ne borde pas de disque ne contenant aucun quasiminimal. Il existe un feuilletage  $\mathcal{F}_0$  à quasiminimaux disjoints et une courbe  $C_0$  transverse à  $\mathcal{F}_0$ , tels que  $(\mathcal{F}_0, C_0)$  puisse être obtenu à partir de  $(\mathcal{F}, C)$  en combinant les opérations suivantes : modification du feuilletage par opérations de Whitehead dans le complémentaire de la courbe, et isotopie de la courbe dans  $M$  privé des quasiminimaux du feuilletage.*

Ce théorème est une version "relative" d'un théorème plus simple (montré dans [3], prop. II.6 p. 81, pour les feuilletages mesurés à selles) :

**THEOREME I.4.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage arationnel et  $C$  une courbe fermée simple non homotope à 0. Il existe un feuilletage équivalent à  $\mathcal{F}$  et transverse à  $C$ .*

Nous ne prouverons pas ici ces théorèmes (montrés en détail dans [12], section III.11). Leur démonstration est essentiellement celle de la prop. II.6 p. 81 de [3], à condition de remplacer le lemme II.4 p. 80 par le "lemme d'extension" suivant :

LEMME I.5. — Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage arationnel. Soit

$$\Delta_0 = [a_0, b_0]$$

un intervalle compact contenu dans une feuille, et  $[a_0, a_1], [b_0, b_1]$  deux intervalles transverses disjoints. Supposons que l'application d'holonomie  $\varphi$  telle que  $\varphi(a_0) = b_0$  s'étende en un homéomorphisme de  $[a_0, a_1[$  sur  $[b_0, b_1[$ , engendrant une famille continue de segments  $\Delta_t = [a_t, b_t]$  contenus dans des feuilles de  $\mathfrak{F}$  ( $0 \leq t < 1$ ). Alors l'une des assertions suivantes est vraie (voir fig. 8) :

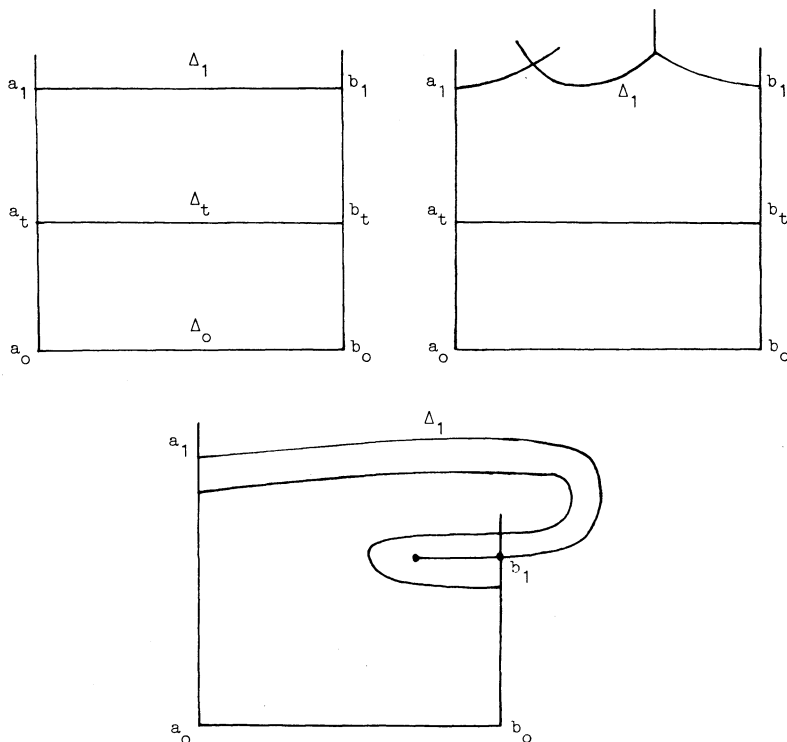


Figure 8

—  $\varphi$  s'étend continûment à  $a_1$ , et les segments  $\Delta_t$  ont comme position limite un segment  $\Delta_1 = [a_1, b_1]$  contenu dans une feuille de  $\mathfrak{F}$ .

–  $\varphi$  s'étend à  $a_1$ , et la position limite  $\Delta_1$  est un plongement (anguleux) contenant au moins une selle.

–  $\varphi$  s'étend à  $a_1$ , mais  $\Delta_1$  contient une épine et n'est pas un plongement.

Ce lemme exprime en fait que l'on peut relever  $\Delta_0$  sur les feuilles voisines jusqu'à ce qu'on arrive à une singularité. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises dans la prochaine section. Voir [11] ou [12, section III.10] pour un historique et une démonstration (dans un cadre un peu plus général).

### I.c. Décompositions de complexité minimale.

Soit  $\mathcal{O}$  une famille de courbes transverses disjointes séparant les quasiminimaux d'un feuilletage  $\mathfrak{F}'$  équivalent à  $\mathfrak{F}$ , comme dans l'énoncé du théorème I.2. L'adhérence d'une composante de  $M - \mathcal{O}$  qui contient un quasiminimal (resp. ne contient pas de quasiminimal) sera appelée une *région de récurrence* (resp. *région de passage*). Dans une région de passage, toute feuille régulière va du bord au bord (prop. I.1).

Nous dirons que  $(\mathfrak{F}', \mathcal{O})$  est une *décomposition* de  $\mathfrak{F}$  si toute courbe de  $\mathcal{O}$  borde d'un côté une région de passage et de l'autre une région de récurrence, et si aucune courbe de  $\mathcal{O}$  ne borde avec une composante de  $\delta M$  un anneau sur lequel  $\mathfrak{F}'$  induit un feuilletage produit.

Du théorème I.2 on déduit immédiatement que tout feuilletage arationnel  $\mathfrak{F}$  possède des décompositions. Nous voulons montrer qu'il existe une décomposition de  $\mathfrak{F}$ , essentiellement *unique*, pour laquelle les régions de récurrence sont aussi simples que possible.

Pour cela nous associons à une décomposition  $(\mathfrak{F}', \mathcal{O})$  une *complexité*  $(S, G)$  formée de deux nombres entiers:  $S$  est le nombre total de singularités contenues dans les régions de récurrence, comptées avec multiplicité (une selle à  $p$  branches équivalant à  $p - 2$  singularités);  $G$  est la somme des genres des régions de récurrence.

Nous ordonnons les couples  $(S, G)$  lexicographiquement, ce qui permet de parler de *décomposition de complexité minimale* (ou simplement décomposition minimale) d'un feuilletage donné  $\mathfrak{F}$ .

THEOREME I.6. — Soient  $(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}_1)$  et  $(\mathcal{G}_2, \mathcal{O}_2)$  deux décompositions de complexité minimale d'un feuilletage arationnel  $\mathcal{F}$  telles que toute liaison de  $\mathcal{G}_i$  rencontre  $\mathcal{O}_i$ . Alors il existe un homéomorphisme isotope à l'identité qui conjugue  $\mathcal{G}_1$  avec  $\mathcal{G}_2$  et envoie  $\mathcal{O}_1$  sur  $\mathcal{O}_2$ .

Remarques. — Si on ne suppose pas que toute liaison de  $\mathcal{G}_i$  rencontre  $\mathcal{O}_i$ , on passe d'une décomposition à l'autre par une isotopie et des opérations de Whitehead dans le complémentaire des courbes.

— Soit  $(\mathcal{G}, \mathcal{O})$  une décomposition minimale de  $\mathcal{F}$  telle que toute liaison de  $\mathcal{G}$  rencontre  $\mathcal{O}$ , et soit  $N$  la région de récurrence contenant un quasiminimal  $K$ . La surface  $N$ , feuilletée par  $\mathcal{G}|_N$ , sera appelée *voisinage canonique* de  $K$ ; d'après le théorème I.6, elle est bien définie à isotopie près. Son genre est le genre de  $K$ . On notera que la somme des genres des quasiminimaux de  $\mathcal{F}$  est inférieure ou égale au genre de  $M$ .

Le théorème I.6 sera montré dans la section suivante. Pour l'obtenir, nous devons commencer par étudier les *régions de récurrence d'une décomposition minimale*. Soit donc  $(\mathcal{G}, \mathcal{O})$  une décomposition de complexité minimale d'un feuilletage arationnel  $\mathcal{F}$ . Nous considérons une région de récurrence  $N$  contenant un quasiminimal  $K$ , munie du feuilletage induit  $\mathcal{G}_N$ .

PROPOSITION I.7. — 1) Toute courbe transverse à  $\mathcal{G}_N$  et disjointe de  $K \cup \delta N$  borde avec une composante de  $\delta N$  un anneau sur lequel  $\mathcal{G}_N$  induit un feuilletage produit.

— 2) Toute courbe fermée simple disjointe de  $K \cup \delta N$  ou bien borde un disque ne contenant pas  $K$  ou bien borde avec une composante de  $\delta N$  un anneau ne contenant pas  $K$ .

— 3) L'ensemble limite de toute demi-feuille infinie de  $\mathcal{G}_N$  est égal à  $K$ .

— 4) Soit  $\theta$  un arc plongé transverse à  $\mathcal{G}_N$ . On suppose que  $\theta$  est disjoint de  $K$  et rencontre  $\delta N$  précisément en ses extrémités. Alors  $\theta$  borde avec un arc  $\theta'$  de  $\delta N$  un disque  $D$  disjoint de  $K$ . De plus  $\mathcal{G}_N$  définit dans  $D$  une isotopie de  $\theta$  à  $\theta'$  à travers des arcs transverses (voir fig. 9b ci-dessous).

— 5) Aucune feuille de  $\mathcal{G}_N$  ne va du bord au bord. On ne peut pas joindre  $\delta N$  à  $\delta N$  par un chemin formé de feuilles singulières et de selles.

On déduit de 5 qu'une feuille de  $\mathcal{F}$  passe au plus une fois dans au plus une région de passage. En combinant avec 3, on obtient le résultat suivant (dû à Stredder [19] si  $\mathcal{F}$  est orientable) :

**COROLLAIRE I.8.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage arationnel d'une surface  $M$ . Toute demi-feuille infinie de  $\mathcal{F}$  a comme ensemble limite l'un des quasiminimaux de  $\mathcal{F}$ . Toute feuille n'appartenant à aucun quasiminimal est propre. Un ensemble  $K \subset M$  est un quasiminimal si et seulement si c'est l'adhérence d'une feuille récurrente.*

*Démonstration de la proposition I.7.* — 1 résulte de la définition d'une décomposition minimale et du fait qu'un feuilletage arationnel sans singularités d'une surface à bord est un feuilletage produit sur un anneau.

2 résulte de 1 et du théorème I.3.

Pour 3, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\mathcal{G}_N$  ne possède pas de liaison. Soit  $f$  une demi-feuille infinie telle que  $\beta(f)$  soit strictement plus grand que  $K$  (il contient  $K$  d'après la prop. I.1). Il existe alors une courbe transverse coupant  $f$  et disjointe de  $K$ . En appliquant 1 on voit que la feuille de  $\mathcal{G}_N$  qui contient  $f$  est régulière et rencontre  $\partial N$ ; il résulte en particulier de ce raisonnement que l'ensemble limite de toute séparatrice infinie est égal à  $K$ .

Soit  $a$  le point de  $\partial N$  dont la feuille contient  $f$ , et  $p$  un point de  $\beta(f) - K$ . Soit  $I$  un intervalle ouvert transverse contenant  $p$ , et  $p_n$  une suite de points de  $f \cap I$  tendant vers  $p$  de façon monotone sur  $I$ . Considérons le segment de feuille compris entre  $a$  et  $p_n$ , et relevons-le sur les feuilles voisines de façon qu'une de ses extrémités reste sur  $\partial N$  et que l'autre se déplace vers  $p$  en restant dans le sous-intervalle  $[p_n, p] \subset I$ .

La feuille de  $p$  ne peut pas rencontrer  $\partial N$ , et le relèvement s'arrête donc avant que l'extrémité située sur  $I$  n'atteigne  $p$ . Soit  $q_n \in ]p_n, p[$  la position limite de cette extrémité. Le lemme I.5 dit que  $q_n$  appartient à une séparatrice. On a d'autre part  $q_n \neq p$ , sauf peut-être pour une valeur de  $n$ . Le point  $p$  appartient donc à l'ensemble limite d'une séparatrice infinie, i.e. à  $K$ . C'est une contradiction, et 3 est prouvé.

Soit maintenant  $\theta$  comme dans 4. On déduit facilement de 2 la première assertion de 4. Soit  $C$  la composante de  $\delta N$  qui rencontre  $\theta$ . Trois cas sont a priori possibles pour la position des extrémités de  $\theta$  par rapport à  $C$  (voir fig. 9). Le cas *a* est exclu car en ajoutant à  $\mathcal{O}$  la courbe dessinée en pointillé on pourrait diminuer  $S$ . Dans le cas *b*, on voit en appliquant 1 à la courbe en pointillé que le feuilletage induit sur  $D$  est conjugué à celui dessiné sur la figure 9b.

Il ne reste donc plus qu'à exclure le cas *c*. Pour cela on applique le lemme d'extension dans  $N - D$  à partir d'une feuille proche de  $x$ , jusqu'à une position limite  $\Delta_1$  contenant une singularité. On n'arrive pas à une épine, car sinon  $N$  ne contiendrait pas de quasiminimal (voir fig. 10). On peut alors modifier le feuilletage par des opérations de Whitehead près de  $\Delta_1$  (voir fig. 11), et contredire 1 en considérant la courbe transverse en pointillé.

De 4 il résulte immédiatement qu'aucune feuille de  $\mathcal{G}_N$  ne peut aller du bord au bord. Si enfin on pouvait relier  $\delta N$  à  $\delta N$  par un chemin de feuilles singulières et de selles, 4 fournirait encore une contradiction, après opérations de Whitehead près du chemin si besoin est. □

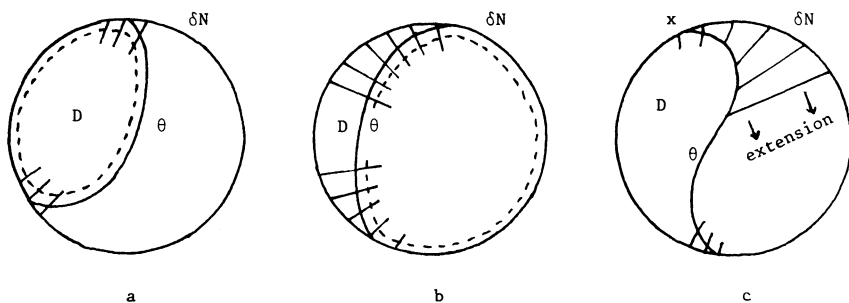


Figure 9

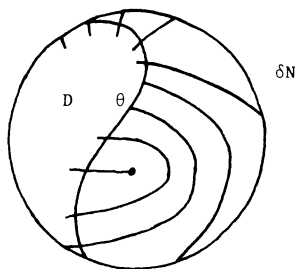


Figure 10



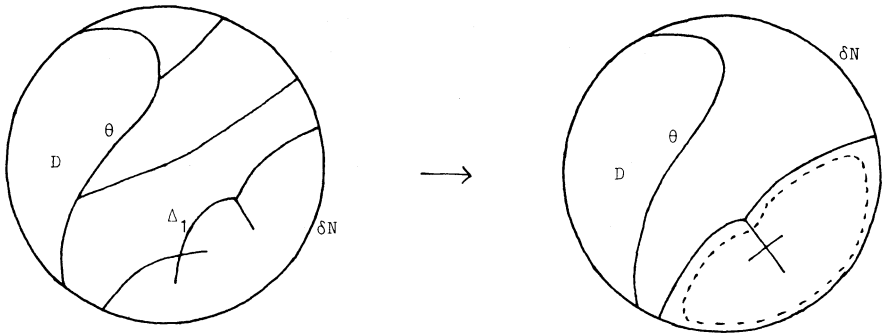


Figure 11

#### I.d. Unicité de la décomposition minimale.

Nous montrons ici le théorème I.6. Soient donc  $(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}_1)$  et  $(\mathcal{G}_2, \mathcal{O}_2)$  deux décompositions minimales de  $\mathcal{F}$  telles que  $\mathcal{O}_i$  coupe toute liaison de  $\mathcal{G}_i$ . On passe de  $\mathcal{G}_2$  à  $\mathcal{G}_1$  par des opérations de Whitehead (et une isotopie). Lorsqu'on effectue ces opérations on peut suivre les déformations subies par une courbe  $C$  de  $\mathcal{O}_2$  et s'arranger pour qu'à la fin  $C$  devienne une courbe  $C'$  immergée quasi-transversalement à  $\mathcal{G}_1$  (au sens de [3] p. 76).

Supposons d'abord que  $C'$  est entièrement contenue dans une région de récurrence  $N$  de  $(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}_1)$ . On peut par opérations de Whitehead dans  $N$  remplacer  $C'$  par une courbe transverse à un feuilletage équivalent à  $\mathcal{G}_1$ . L'assertion 1 de la proposition I.7 entraîne alors que  $C'$  était en fait transverse à  $\mathcal{G}_1$  et isotope à une composante de  $\delta N$  à travers des courbes transverses ; cette composante n'est pas contenue dans  $\delta M$  (se rappeler la définition d'une décomposition).

Si  $C'$  n'est pas entièrement contenue dans  $N$ , nous affirmons que  $C' \cap N$  se compose d'arcs transverses à  $\mathcal{G}_1$  et isotopes à un arc de  $\delta N$  à travers des arcs transverses (cf. fig. 9b). Considérons en effet dans  $C' \cap N$  un arc joignant deux points d'intersection successifs

de  $C'$  avec  $\delta N$ . On peut par des opérations de Whitehead et un petit déplacement le remplacer par un arc plongé transverse, et l'affirmation résulte de l'assertion 4 de la prop. I.7 et la quasi-transversalité de  $C'$ .

Cela permet par des isotopies de pousser hors des régions de récurrence de  $\mathcal{O}_1$  toutes les courbes quasi-transverses obtenues à partir des courbes de  $\mathcal{O}_2$ . On peut ensuite rendre ces courbes transverses par des opérations de Whitehead dans les régions de passage de  $\mathcal{O}_1$ , obtenant ainsi une décomposition  $\mathcal{O}'_2$  d'un feuilletage  $\mathcal{G}_3$ .

On passe de  $(\mathcal{G}_1, \mathcal{O}_1)$  à  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}_1)$  (resp. de  $(\mathcal{G}_2, \mathcal{O}_2)$  à  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}'_2)$ ) par une isotopie et des opérations de Whitehead dans les régions de passage; de plus, chaque région de récurrence de  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}_1)$  est contenue dans une région de récurrence de  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}'_2)$ .

Nous utilisons maintenant (pour la première fois) la minimalité de  $\mathcal{O}_2$  pour conclure que chaque région de récurrence de  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}'_2)$  est la réunion d'une région de récurrence de  $(\mathcal{G}_3, \mathcal{O}_1)$  et d'anneaux dont un bord appartient à  $\mathcal{O}_1$  et l'autre à  $\mathcal{O}'_2$ ; le feuilletage induit par  $\mathcal{G}_3$  sur ces anneaux est un produit.

Chacun des feuilletages  $\mathcal{G}_1$  (resp.  $\mathcal{G}_2$ ) est ainsi obtenu, à isotopie près, en écrasant les liaisons de  $\mathcal{G}_3$  qui ne rencontrent pas  $\mathcal{O}_1$  (resp.  $\mathcal{O}'_2$ ), et le théorème est prouvé.

□

## II. DIFFERENTIABILITE

### II.a. Qu'est-ce qu'un feuilletage $C'$ ?

Nous voulons ici définir ce que nous appelons un feuilletage  $C'$ . Nous avons déjà dit qu'il est insuffisant de demander que  $\mathcal{F}$  soit  $C'$  en dehors des singularités : par exemple un feuilletage singulier

orientable est topologiquement conjugué au feuilletage défini par un champ de vecteurs  $C^\infty$ , à la seule condition que tout quasiminimal contienne au moins une singularité (théorème de Gutierrez [5]).

Mais bien sûr ce champ de vecteurs peut avoir des singularités extrêmement dégénérées (pour les champs construits dans [5], tous les jets d'ordre fini sont nuls aux selles). Nous voulons donc imposer aux singularités une condition de non-dégénérescence, assez forte pour exclure des feuilletages tels que  $\mathcal{F}_b$ , mais quand même pas trop forte ; en particulier, nous ne voulons pas imposer de modèles locaux aux singularités.

Pour obtenir de façon naturelle une telle condition, remarquons que le comportement d'un feuilletage est dicté par sa *structure transverse*, et non par sa structure tangente (paramétrage des feuilles donné par un champ de vecteurs ou la longueur d'arc). Par exemple un feuilletage orientable arationnel est déterminé à conjugaison topologique près par l'application de premier retour (échange d'intervalles) induite sur une courbe transverse convenable (voir [9] § 6).

Considérons donc une courbe  $C$  transverse à un feuilletage  $\mathcal{F}$  (orientable ou non). Soit  $[x, x']$  un segment contenu dans une feuille de  $\mathcal{F}$ , tel que  $[x, x'] \cap C$  se compose exactement de  $x$  et  $x'$ . L'application d'holonomie (ou de premier retour) qui à  $x$  associe  $x'$  est définie et continue sur un intervalle ouvert maximal  $]a, b[$  autour de  $x$ , et d'après le lemme d'extension I.5 les points  $a$  et  $b$  appartiennent à des feuilles singulières de  $\mathcal{F}$  (voir quelques exemples sur la figure 12).

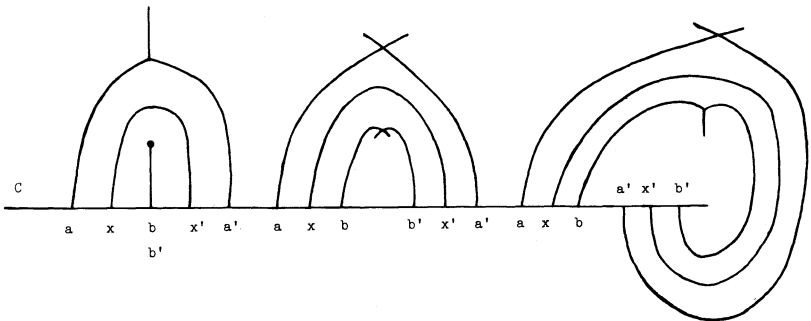


Figure 12

Si  $\mathcal{F}$  est défini par un champ de directions  $C^r$ , l'application d'holonomie  $T: ]a, b[ \longrightarrow ]a', b'[$  est un  $C^r$ -difféomorphisme. Mais a priori le comportement de  $T$  (ou de sa dérivée) aux bornes de l'intervalle peut être très sauvage.

Nous dirons que  $\mathcal{F}$  est de classe  $C^r$  si, pour toute courbe transverse  $C$ , toute application d'holonomie  $T$  comme ci-dessus s'étend en un  $C^r$ -difféomorphisme entre les intervalles compacts  $[a, b]$  et  $[a', b']$ . Il est facile de voir qu'il suffit en fait de vérifier cette propriété pour un nombre fini de courbes transverses.

Donnons quelques exemples. Les feuilletages de Morse  $C^r$  étudiés par Stredder [19] sont  $C^r$  dans notre sens, ainsi que les feuilletages  $C^r$  avec modèles locaux aux singularités de [13, § 2]. Considérons d'autre part sur le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un échange d'intervalles affine, c'est-à-dire de pente constante (strictement positive mais pas forcément égale à 1) sur chaque intervalle de continuité. Sa suspension ([9], prop. 6.1) est un feuilletage topologiquement conjugué à un feuilletage  $C^\infty$ . Il serait d'ailleurs intéressant de mieux comprendre ce type d'échanges d'intervalles.

## II.b. Feuilletages $C^2$ non orientables.

On sait [13] qu'il n'existe pas de labyrinthe de classe  $C^2$  sur le disque ou l'anneau. Nous allons ici généraliser ce résultat et en tirer quelques conséquences.

**THEOREME II.1.** — *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage arationnel de classe  $C^2$  d'une surface compacte orientable  $M$  de genre 0. Si  $\delta M \neq \emptyset$ , toute feuille régulière de  $\mathcal{F}$  est compacte (et va du bord au bord). Si  $M = S^2$ , toute feuille régulière est dense.*

*Démonstration.* — Dans le cas où  $\delta M$  n'est pas vide, c'est celle du théorème 5 de [13]. Le fait que par rapport à [13] les définitions de "arationnel" et de "de classe  $C^2$ " soient ici plus générales ne change rien. De même la démonstration de [13] s'applique sur toute surface de genre 0 à bord, pas seulement sur le disque et l'anneau.

Si  $M = S^2$ , on se ramène au cas précédent en raisonnant par l'absurde. Soit  $U$  un ouvert distingué ne rencontrant pas l'adhérence d'une feuille régulière  $f$ . Dans  $U$ , on découpe un disque

et on introduit deux singularités, comme sur la figure 13. Cette modification peut être faite de façon  $C^2$  et en préservant l'arationalité. On arrive ainsi à une contradiction. □

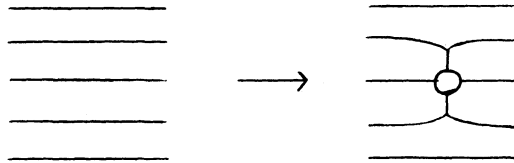


Figure 13

Pour un feuilletage qui n'est pas arationnel, on déduit facilement de [13] le résultat suivant :

**THEOREME II.2.** — *Dans un feuilletage d'une surface de genre 0 qui est topologiquement conjugué à un feuilletage  $C^2$ , il n'y a pas de feuille exceptionnelle: toute feuille est propre ou localement dense.*

Ce théorème peut être reformulé "à la Poincaré-Bendixson": *une demi-feuille infinie qui n'est pas localement dense spirale vers une feuille compacte ou une union de singularités et de liaisons.* On sait bien [1] que ce résultat est faux en genre  $\geq 1$  (même pour un feuilletage orientable  $C^\infty$ ). Le théorème II.1 a cependant des conséquences sur les surfaces de genre strictement positif.

Rappelons que le genre d'un quasiminimal est par définition le genre de son voisinage canonique, c'est-à-dire de la région de récurrence qui le contient dans une décomposition minimale de  $\mathfrak{F}$  (voir Ic).

**THEOREME II.3.** — *Soit  $M$  une surface différente de  $S^2$ , et  $\mathfrak{F}$  un feuilletage arationnel de  $M$  topologiquement conjugué à un feuilletage  $C^2$ . Alors tout quasiminimal de  $\mathfrak{F}$  est de genre au moins 1.*

**COROLLAIRE II.4.** — *Sous les mêmes hypothèses,  $\mathfrak{F}$  possède au plus  $g$  ensembles quasiminimaux ( $g$  est le genre de  $M$ ).*

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que le feuilletage  $\mathfrak{G}$

de la décomposition dynamique de  $\mathcal{F}$  (voir Ic) est conjugué à un feuilletage  $C^2$ , et donc que toute région de récurrence est de genre  $\geq 1$ . Le corollaire résulte du fait que la somme des genres des quasiminimaux de  $\mathcal{F}$  ne peut pas dépasser  $g$ .

□

Nous voyons ainsi qu'il existe certaines ressemblances entre d'une part les feuilletages orientables et d'autre part les feuilletages arationnels de classe  $C^2$  : en genre 0 tous ces feuilletages satisfont à un théorème à la Poincaré-Bendixson, et en genre plus grand ils ont au plus  $g$  quasiminimaux.

### II.c. Quelques propriétés des feuilletages orientables $C^2$ .

Dans toute la suite nous considérons sur une surface fermée orientée  $M$  de genre  $g \geq 2$  un feuilletage orienté  $\mathcal{F}$  dont les singularités sont des selles. Pour simplifier la discussion, nous supposerons de plus que les singularités de  $\mathcal{F}$  sont des selles à 4 branches et qu'il n'y a ni feuille compacte ni liaison.

Nous dirons qu'une séparatrice  $g$  n'est isolée d'aucun côté si tout intervalle transverse compact ou bien est disjoint de  $g$  ou bien coupe  $g$  une infinité de fois (en d'autres termes,  $g$  est récurrente et s'accumule sur elle-même des deux côtés).

Soit d'autre part  $\varphi_t$  un flot définissant  $\mathcal{F}$ . Un quasiminimal  $K$  de  $\mathcal{F}$  est attracteur (resp. répulseur) s'il possède un voisinage  $U$ , invariant par  $\varphi_t$  pour  $t > 0$  (resp.  $t < 0$ ), tel que  $\bigcap_{t>0} \varphi_t(U) = K$  (resp.  $\bigcap_{t<0} \varphi_t(U) = K$ ). Un quasiminimal sera dit pur s'il est soit attracteur soit répulseur. Ces définitions ne dépendent évidemment pas du choix de  $\varphi_t$ .

Enfin, notons que dans un feuilletage orientable tout quasiminimal est de genre au moins 1 (c'est essentiellement le théorème de Poincaré-Bendixson, voir ci-dessous démonstration du corollaire II.6).

**THEOREME II.5.** — *Supposons que  $\mathcal{F}$  soit topologiquement conjugué à un feuilletage de classe  $C^2$ . Alors :*

1) *Tout quasiminimal contient une séparatrice qui n'est isolée d'aucun côté.*

2) *Tout quasiminimal de genre 1 est pur.*

*Remarques.* — On sait obtenir des feuilletages  $C^\infty$  (dits de Cherry [1]) en ouvrant une, ou plusieurs, demi-feuilles de même sens d'un flot irrationnel (voir fig. 14). Par contre l'assertion 2 du théorème implique que l'on ne peut pas, de façon  $C^2$ , ouvrir deux demi-feuilles de sens opposés. Un résultat analogue a été obtenu indépendamment par Gutierrez, Lins, et de Melo [6]. Stredder avait d'autre part remarqué ([19], prop. 8.1.3.) que, si  $K$  est un quasiminimal de genre 1 d'un feuilletage  $C^2$ , alors toute feuille régulière  $f$  telle que  $\bar{f} = f \cup K$  est contenue dans  $K$ .

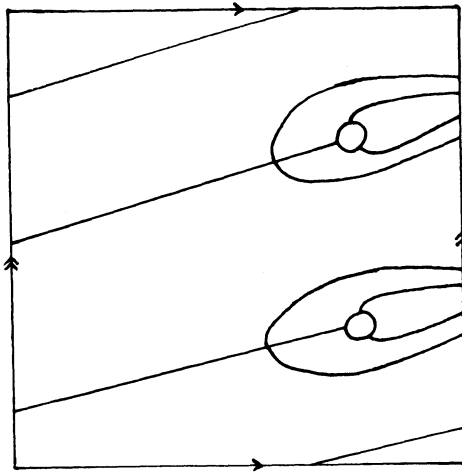


Figure 14

— Aucune des assertions 1 ou 2 n'est vraie pour  $\mathfrak{F}_b$ .

— Nous verrons dans II.e qu'un feuilletage  $C^2$  (ou même  $C^\infty$ ) peut contenir un quasiminimal impur (de genre  $> 1$ ).

Avant de montrer le théorème II.5, déduisons-en le résultat suivant, dû à Stredder pour un feuilletage à deux quasiminimaux d'une surface de genre 2 ([19], ch. 9) :

**COROLLAIRE II.6.** — *Supposons que  $\mathfrak{F}$  soit topologiquement conjugué à un feuilletage  $C^2$ . Si tous les quasiminimaux de  $\mathfrak{F}$  sont de genre 1 (en particulier s'il y a  $g$  quasiminimaux), ces quasiminimaux sont disjoints et peuvent être séparés par des courbes transverses à  $\mathfrak{F}$ .*

*Remarque.* — On peut de plus montrer que le voisinage canonique d'un quasiminimal de  $\mathcal{F}$  est obtenu à partir d'un flot irrationnel en ouvrant un nombre fini de demi-feuilles de même sens, comme sur la figure 14 (voir [12], section V.3).

*Démonstration du corollaire II.6.* — Soit  $K$  un quasiminimal, soit  $(\mathcal{G}, \mathcal{O})$  une décomposition minimale de  $\mathcal{F}$  telle que toute liaison rencontre  $\mathcal{O}$ , et soit  $N$  la région de récurrence qui contient  $K$ . Rappelons que dans  $N$  aucune feuille ne va du bord au bord et que l'ensemble limite de toute demi-feuille infinie est  $K$  (prop. I.7).

Le feuilletage  $\mathcal{G}_N$  induit sur  $N$  n'est pas forcément orientable, mais sa restriction à  $N$  privé des séparatrices rencontrant  $\delta N$  l'est (cette remarque montre en particulier, grâce au théorème de Poincaré-Bendixson, que  $N$  est de genre au moins 1). Pour prouver le corollaire II.6, il suffit de vérifier que, si  $K$  est pur, alors  $\mathcal{G}_N$  lui-même est orientable.

Supposons le contraire. Il existe alors dans  $N$  une selle à 3 branches  $s$  dont une séparatrice  $sm$  rencontre  $\delta N$  (voir fig. 15). Les demi-feuilles de  $\mathcal{G}_N$  issues de  $\delta N$  près de  $m$  ne sont pas dans  $K$ , mais ont  $K$  comme ensemble limite. D'un côté de  $m$  elles correspondent à des demi-feuilles positives de  $\mathcal{F}$ , de l'autre à des demi-feuilles négatives. Cela empêche  $K$  d'être pur.

□

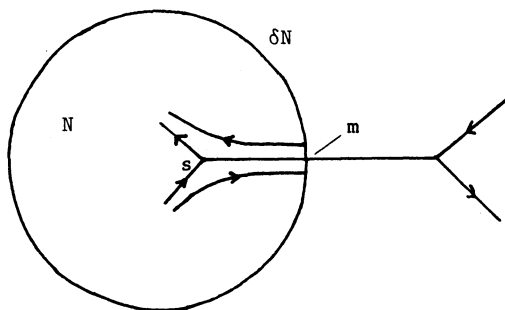


Figure 15

*Démonstration du théorème II.5.* — Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\mathcal{F}$  est  $C^2$ .

1) Soit  $K$  un quasiminimal dans lequel toute séparatrice est isolée d'un côté, et  $C$  une courbe transverse rencontrant  $K$ .



Soient  $k_1, \dots, k_m$  les points de  $K \cap C$  où l'application de premier retour  $T$  n'est pas définie. La restriction  $T_V$  de  $T$  à un voisinage suffisamment petit  $V \subset C$  de  $K \cap C - \{k_1, \dots, k_m\}$  est un  $C^2$ -difféomorphisme.

Puisque toute séparatrice contenue dans  $K$  est dans  $K$  et isolée d'un côté, chaque  $k_i$  est isolé d'un côté dans  $K \cap C$ . Parce que  $\mathcal{F}$  est  $C^2$  (au sens de II.a), on peut alors étendre  $T_V$  en un  $C^2$ -difféomorphisme défini sur un voisinage de  $K \cap C$  dans  $C$ , et envoyant  $K \cap C$  sur lui-même. Cela contredit Schwartz [17].

2) Nous allons prouver 2 en généralisant la démonstration du théorème de Denjoy ([2], [21]). Soit  $K$  un quasiminimal, et soient  $\mathcal{G}, \mathcal{O}, N, \mathcal{G}_N$  comme dans la démonstration du corollaire II.6. L'orientation de  $\mathcal{F}$  induit une orientation de  $\mathcal{G}_N$ , sauf peut-être le long des séparatrices qui rencontrent  $\delta N$ . Soit  $C \subset N$  une courbe transverse ne rencontrant aucune de ces séparatrices; nous l'identifions à  $R/Z$  de façon  $C^\infty$ .

L'application de premier retour sur  $C$  est définie sur une famille finie d'intervalles ouverts. Elle est de classe  $C^2$ , et sur chacun de ses intervalles de définition *le logarithme de la dérivée*  $DT$  est à variation bornée (nous confondons l'application de premier retour induite par  $\mathcal{G}_N$  et celle induite par  $\mathcal{F}$ ).

Nous savons que l'union des feuilles régulières de  $\mathcal{G}_N$  non contenues dans  $K$  forme un ouvert  $U$  (proposition I.7, assertion 3). Comme aucune feuille ne va de  $\delta N$  à  $\delta N$ , la trace sur  $C$  d'une composante  $U'$  de  $U$  se compose d'une infinité d'intervalles disjoints. Si  $U'$  ne rencontre pas  $\delta N$ , cette famille d'intervalles est de la forme :  $\{T^i(I); i \in \mathbf{Z}\}$ ; si  $U'$  rencontre  $\delta N$ , elle est de la forme :  $\{T^i(I); i \geq 0\}$  ou  $\{T^i(I); i \leq 0\}$ , c'est-à-dire indexée par les entiers positifs ou négatifs.

Supposons que  $K$  ne soit pas pur. Alors, les composantes de  $U$  ne peuvent pas être toutes indexées par les entiers positifs ou toutes indexées par les entiers négatifs. Ceci nous permet de trouver sur  $C$  deux intervalles ouverts  $I$  et  $J$  tels que tous les itérés  $T^i(I)$  et  $T^{-i}(J)$ , pour  $i \geq 0$ , existent et soient disjoints.

Notons  $l$  la longueur des intervalles. Pour tout entier  $p > 0$ , il existe des points  $x \in I$  et  $y \in J$  tels que

$$\begin{aligned} \text{Log} (|T^{p+1}(I)|/|I|) &= \text{Log DT}(x) \\ &+ \text{Log DT}(Tx) + \dots + \text{Log DT}(T^p x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Log} (|J|/|T^{-p-1}(J)|) \\ = \text{Log DT}(T^{-p-1}y) + \dots + \text{Log DT}(T^{-1}y). \end{aligned}$$

Lorsque  $p$  tend vers l'infini, les longueurs de  $T^{p+1}(I)$  et  $T^{-p-1}(J)$  tendent vers 0. Puisque  $\text{Log DT}$  est à variation bornée, il nous suffit de vérifier qu'il existe des entiers  $p$  arbitrairement grands tels que les deux familles d'intervalles  $\{I, T(I), \dots, T^p(I)\}$  et  $\{T^{-1}(J), \dots, T^{-p-1}(J)\}$  alternent sur  $C$ .

Nous supposons maintenant que  $K$ , et donc aussi  $N$ , est de genre 1. Alors,  $T$  préserve l'ordre sur  $C$ : si  $x, y, z$  sont des points de  $C$  en lesquels  $T$  est définie, l'ordre des points  $T(x), T(y), T(z)$  est le même que celui des points  $x, y, z$ . En effet, les segments de feuilles joignant  $x$  à  $T(x)$ ,  $y$  à  $T(y)$ ,  $z$  à  $T(z)$  ne peuvent pas "se croiser" dans  $N - C$  qui est de genre 0.

Les intervalles  $T^i(I)$  et  $T^{-j}(J)$  sont ainsi disposés sur  $C$  dans le même ordre que les points correspondants des orbites d'une rotation (nécessairement irrationnelle). Le théorème est donc une conséquence du lemme suivant :

**LEMME II.7.** — Soit  $r$  une rotation irrationnelle sur le cercle  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Etant donné deux points  $a$  et  $b$  de  $C$  tels que  $b$  ne soit pas un  $r^i a$  ( $i \geq 0$ ), il existe des entiers  $p$  arbitrairement grands tels que les ensembles  $\{a, ra, \dots, r^p a\}$  et  $\{b, r^{-1}b, \dots, r^{-p}b\}$  alternent sur  $C$ .

*Remarque.* — La démonstration du théorème de Denjoy utilise ce lemme dans le cas particulier où  $b = r^{-1}a$ .

*Démonstration du lemme II.7.* — Pour simplifier les notations, écrivons  $a(i) = r^i a$ ,  $b(i) = r^i b$ . Nous utiliserons un fait classique sur les notations irrationnelles ([8], ch. I, § 2) : il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs  $q_n$  ( $n \geq 1$ ) telle que, pour tout  $a \in C$  :

— la suite  $|a(q_n) - a|$  est strictement décroissante et converge vers 0.

- $a(q_n)$  et  $a(q_{n+1})$  sont situés de part et d'autre de  $a$ ,
- si  $|a(i) - a| < |a(q_n) - a|$ , avec  $i > 0$ , alors  $i \geq q_{n+1}$ .

Soit  $\epsilon > 0$  petit, et  $p'$  le plus petit entier positif ou nul tel que  $|a(p') - b| < \epsilon$ . On définit  $n$  par  $q_n \leq p' < q_{n+1}$ , et on appelle  $p$  un entier qui minimise  $|a(p) - b|$  parmi les entiers compris entre 0 et  $q_{n+1} - 1$ . Puisque  $b$  n'est pas un  $r^i a (i \geq 0)$ ,  $p'$  et  $p$  tendent vers l'infini quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Pour montrer que  $\{a, a(1), \dots, a(p)\}$  et  $\{b, \dots, b(-p)\}$  alternent, il nous suffit de vérifier que  $|a(p) - b| < |a(q_n) - a|$ . Disons pour fixer les idées que  $a(q_n)$  est situé à droite de  $a$ . Nous distinguons deux cas :

(i)  $a(p)$  est à droite de  $b$  (voir fig. 16i). Puisque  $0 \leq p - q_n \leq q_{n+1} - 1$ , le point  $a(p - q_n)$  est plus éloigné de  $b$  que  $a(p)$ , et est donc à gauche de  $b$ . On en déduit le résultat.

(ii)  $a(p)$  est à gauche de  $b$ . Il suffit alors de montrer que  $a(p + q_n)$  est à droite de  $b$ . Supposons le contraire (voir fig. 16ii). Alors  $a(p + q_n)$  et  $a(p + q_n - q_{n+1})$  sont tous deux plus proches de  $b$  que  $a(p)$ . Puisque  $p + q_n$  est positif et que

$$p + q_n - q_{n+1} < q_n \leq q_{n+1} - 1,$$

le choix de  $p$  entraîne les inéquations incompatibles

$$p + q_n > q_{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad p + q_n - q_{n+1} < 0.$$

□

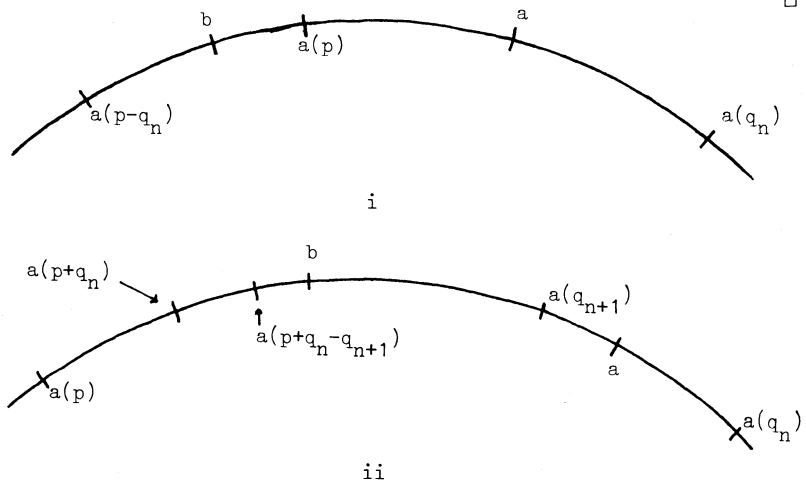


Figure 16

### II.d. Pureté est mère de lissité.

THEOREME II.8. — *Si tous les quasiminimaux de  $\mathcal{F}$  sont purs, alors  $\mathcal{F}$  est topologiquement conjugué à un feuilletage de classe  $C^\infty$ .*

*Remarque.* — Ce théorème et sa démonstration sont inspirés de [4].

*Démonstration.* — Le résultat est clair si  $\mathcal{F}$  ne possède qu'un seul quasiminimal (nécessairement égal à  $M$ ); dans ce cas  $\mathcal{F}$  possède une mesure transverse de support égal à  $M$  et est la suspension d'un échange d'intervalles de pente 1. Sinon il résulte du raisonnement fait dans la démonstration du corollaire II.6 que l'on n'a pas besoin de modifier  $\mathcal{F}$  pour obtenir sa décomposition dynamique. Pour chaque quasiminimal  $K$ , choisissons dans son voisinage canonique  $V(K)$  une courbe transverse  $C$  le rencontrant. Soit  $M'$  la surface (connexe) obtenue en découpant  $M$  selon ces courbes.

Il nous suffit pour prouver le théorème de munir le feuilletage induit sur  $M'$  d'une mesure transverse sans masse atomique et de support égal à  $M'$ , telle que le recollement à effectuer pour retrouver  $(M, \mathcal{F})$  soit, le long de chaque courbe, une *homothétie* pour cette mesure. En effet  $\mathcal{F}$  sera alors topologiquement conjugué à la suspension d'un échange d'intervalles affine (au sens de II.a).

Nous commençons la construction en définissant la mesure dans les régions de passage (c'est possible car dans une telle région toute feuille va du bord au bord).

Soit  $K$  un quasiminimal, disons attracteur pour fixer les idées. La surface  $V'$  obtenue en découpant  $V(K)$  selon  $C$  possède dans son bord deux composantes  $C^+$  et  $C^-$  provenant de  $C$ , et nous devons étendre à  $V'$  la mesure transverse déjà définie sur les autres composantes de  $\delta V'$ .

Dans  $V(K)$ , soit  $U$  l'ouvert dense formé par les feuilles régulières non contenues dans  $K$ . Puisque  $K$  est pur,  $U$  possède un nombre fini de composantes, qui rencontrent toutes  $\delta V(K)$ . Considérée dans  $V'$ , une composante  $W$  de  $U$  se trouve fractionnée en une infinité de rectangles (voir fig. 17); le premier joint à  $C^-$  un bord  $B$  de  $V'$  autre que  $C^-$  ou  $C^+$ , les suivantes joignent  $C^+$  à  $C^-$ .

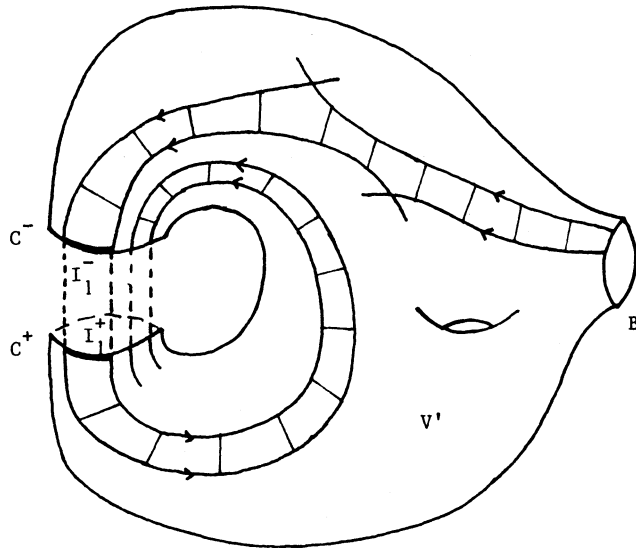


Figure 17

En suivant les feuilles, étendons la mesure définie sur  $B$  au premier rectangle, en particulier à un intervalle  $I_1^- \subset C^-$ . Puis transportons-la à l'intervalle correspondant  $I_1^+ \subset C^+$ , mais en la *divisant* par un nombre fixe  $\lambda > 1$ . Ensuite étendons-la successivement à tous les rectangles, en la divisant toujours par  $\lambda$  lors du passage d'un intervalle de  $C^-$  à l'intervalle correspondant de  $C^+$ . Effectuons successivement cette opération pour chaque composante de  $U$ .

La mesure transverse est maintenant définie sur un ouvert dense de  $V'$ , et la masse totale déposée sur  $C^-$  et  $C^+$  est finie. On peut donc l'étendre en une mesure transverse finie définie sur la totalité de  $V'$ ; pour cette mesure le recollement entre  $C^-$  et  $C^+$  est une homothétie de rapport  $1/\lambda$ .

□

### II.e. Un exemple.

Nous avons vu qu'un feuilletage possédant un quasiminimal impur de genre 1 n'est pas conjugué à un feuilletage  $C^2$ , et qu'un feuilletage dont tout quasiminimal est pur est conjugué à un feuilletage

$C^\infty$ . L'exemple suivant va montrer que la réciproque de la deuxième affirmation est fautive (celle de la première l'est également, à cause de l'assertion 1 du théorème II.5).

**PROPOSITION II.9.** — *Il existe un feuilletage orientable de classe  $C^\infty$  (sans feuille compacte ni liaison) qui possède exactement un quasiminimal  $K$  mais ne possède pas de feuille dense ( $K$  est donc impur).*

*Remarque.* — L'existence d'un tel feuilletage répond à des questions de Stredder [19] et Veech [22]. Signalons toutefois que la construction repose sur le fait que  $K$  supporte deux mesures transverses non proportionnelles ; on ignore si un feuilletage de classe  $C^2$  (ou  $C^\infty$ ) peut contenir un quasiminimal impur uniquement ergodique. On ignore de même si un échange d'intervalles affine (voir II.a), sans point périodique, uniquement ergodique, doit être à orbites denses.

*Démonstration.* — Partons d'une surface  $M_0$  munie d'un feuilletage orienté  $\mathfrak{F}_0$  dont toutes les feuilles sont denses mais qui n'est pas uniquement ergodique [16]. Choisissons une courbe transverse  $C$ .

Soit  $x_0$  un point de  $C$  situé sur une feuille régulière  $f$ , et  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  les points successifs d'intersection de  $f$  avec  $C$ . Soit  $\beta_n(x_0) \in H_1(M_0, \mathbb{Z})$  une classe d'homologie obtenue en suivant  $f$  de  $x_0$  à  $x_n$ , puis en revenant à  $x_0$  par un arc simple de  $C$ .

Puisque  $\mathfrak{F}_0$  n'est pas uniquement ergodique, il existe sur  $C$  deux points  $x_0$  et  $y_0$  appartenant à des feuilles régulières distinctes, tels que  $\beta_n(x_0)/n$  ait une limite  $\mu_x \in H_1(M_0, \mathbb{R})$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et que  $\beta_n(y_0)/n$  ait une limite  $\mu_y \neq \mu_x$  quand  $n$  tend vers  $-\infty$  (cela résulte de la théorie des cycles asymptotiques [18] et d'une remarque de Katok [7] ; voir [10] ou [12, section IV.3]).

Soit  $\mathfrak{F}$  un feuilletage obtenu à partir de  $\mathfrak{F}_0$  en ouvrant la demi-feuille positive issue de  $x_0$  et la demi-feuille négative issue de  $y_0$  (voir fig. 18), puis en recollant  $C_1$  et  $C_2$  (sans créer de liaison entre  $s_1$  et  $s_2$ ). Il possède exactement un quasiminimal, dont le complémentaire est l'union de  $C_1 (= C_2)$  avec les bulles  $B_1$  et  $B_2$  créées par les ouvertures (on convient que ces bulles sont ouvertes ; elles sont disjointes et se touchent le long de  $C_1 = C_2$ ).

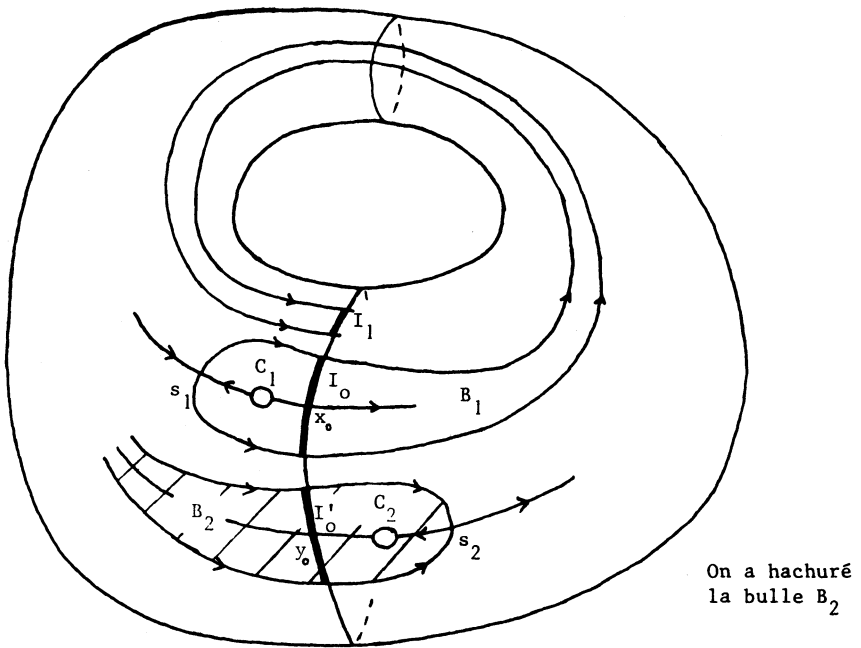


Figure 18

Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est conjugué à un feuilletage  $C^\infty$ , nous allons définir sur  $C$  une mesure  $\nu$ , sans atome et strictement positive sur tout ouvert, telle que l'application de premier retour induite sur la courbe  $C$  (identifiée par  $\nu$  à un cercle  $\mathbb{R}/t\mathbb{Z}$ ) soit un échange d'intervalles *affine* (voir II.a).

Soit  $\rho$  un homomorphisme continu de  $H_1(M_0, \mathbb{R})$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^{+*}$ , tel que  $\rho(\mu_y) < 1 < \rho(\mu_x)$  et  $\rho(C) = 1$  (où  $C \in H_1(M_0, \mathbb{Z})$  est l'une des classes définies par  $C$ ).

Pour  $n \geq 0$ , soit  $I_n$  l'intervalle de  $C \cap B_1$  correspondant à  $x_n$ ; le feuilletage définit un homéomorphisme de  $n$ -ième retour  $\varphi_n$  entre  $I_0$  et  $I_n$ .

Choisissons sur  $I_0$  une mesure finie  $\nu_0$ , sans atome et strictement positive sur tout ouvert. Puis munissons chaque  $I_n$  de la mesure  $\varphi_n(\nu_0)$  divisée par  $\rho(\beta_n(x_0))$ ; puisque  $\rho(C) = 1$ , le choix de l'arc simple de  $C$  utilisé pour définir  $\beta_n(x_0)$  n'importe pas. La

somme des masses déposées sur les  $I_n$  est finie, car  $\beta_n(x_0)/n$  converge vers  $\mu_x$  et  $\rho(\mu_x) > 1$ .

Transportons  $\nu_0$  sur l'intervalle  $I'_0$  de  $C \cap B_2$  qui correspond à  $y_0$ , en utilisant les feuilles de  $\mathcal{F}$  qui traversent  $C_1$ , puis étendons-la comme ci-dessus aux autres intervalles de  $C \cap B_2$ . La somme de toutes les mesures ainsi définies sur les composantes de  $C \cap (B_1 \cup B_2)$  est une mesure finie  $\nu$ , qui est strictement positive sur tout ouvert car  $B_1 \cup B_2$  est dense. C'est la mesure cherchée.

□

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. CHERRY, Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus, *Proc. London Math. Soc.*, 44 (1938), 175-215.
- [2] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. Pures et Appl.*, 11 (1932), 333-375.
- [3] FATHI, LAUDENBACH, POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque*, 66-67 (1979), SMF Paris.
- [4] C. GUTIERREZ, Smoothability of Cherry flows on two-manifolds, in Geometric Dynamics, Rio 1981, *Springer Lecture Notes*, 1007 (1983), 308-331.
- [5] C. GUTIERREZ, Smoothing continuous flows and the converse of Denjoy-Schwartz theorem, *Ann. Ac. Bras. de Cien.*, 51 (1979), 581-589.
- [6] GUTIERREZ, LINS, De MELO, Bifurcations of Cherry attractors, Communication orale de De Melo.
- [7] A. KATOK, Invariant measures of flows on oriented surfaces, *Soviet Math. Dokl.*, 14 (1973), 1104-1108.
- [8] S. LANG, *Introduction to diophantine approximation*, Addison Wesley, 1966.
- [9] G. LEVITT, Pantalons et feuilletages des surfaces, *Topology*, 21 (1982), 9-33.



- [10] G. LEVITT, Feuilletages des surfaces, *Ann. Inst. Fourier*, 32-2 (1982), 179-217.
- [11] G. LEVITT, Foliations and laminations on hyperbolic surfaces, *Topology*, 22 (1983), 119-135.
- [12] G. LEVITT, Feuilletages des surfaces, Thèse d'état, Université Paris 7, juin 1983.
- [13] G. LEVITT, H. ROSENBERG, Differentiability and topology of labyrinths in the disc and annulus, *Topology*, 26 (1987), 173-186.
- [14] A. MAIER, Trajectories on the closed orientable surfaces, *Math. Sb.*, 12 (54) (1943), 71-84 (en russe).
- [15] H. ROSENBERG, Labyrinths in the disc and surfaces, *Ann. of Math.*, 117 (1983), 1-33.
- [16] E. SATAEV, On the number of invariant measures for flows on orientable surfaces, *Math. USSR Izv.*, 9 (1975), 813-830.
- [17] A. SCHWARTZ, A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, *Amer. Jour. of Math.*, 85 (1963), 453-458.
- [18] S. SCHWARTZMAN, Asymptotic cycles, *Ann. of Math.*, 66 (1957), 270-284.
- [19] P. STREDDER, *Morse foliations*, Thesis, Warwick, 1976.
- [20] W. THURSTON, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, preprint.
- [21] E. VAN KAMPEN, The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Amer. J. Math.*, 57 (1935), 142-152.
- [22] W. VEECH, Quasiminimal invariants for foliations of orientable closed surfaces, preprint Rice university.

Manuscrit reçu le 26 mai 1986.

Gilbert LEVITT,  
Université de Paris-Sud  
Mathématiques  
91405 Orsay Cedex.