

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY TERJANIAN

## Sur une question de V.A. Lebesgue

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 3 (1987), p. 19-37

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_3\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_19_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR UNE QUESTION DE V.A. LEBESGUE

par

Guy TERJANIAN

A la page 55 d'un travail [1] consacré à l'équation

$$x^5 + y^5 = a z^5,$$

Victor Amédée Lebesgue énonce deux conjectures qu'on peut préciser comme suit :

(C) Si  $x, y$  et  $z$  sont des entiers relatifs tels que  $x$  et  $y$  soient non nuls et premiers entre eux et qu'on ait

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 = z^5,$$

on a  $(x, y, z) = (1, -1, 1)$  ou  $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$ .

(D) Si  $x, y, z$  sont des entiers relatifs tels que  $x$  et  $y$  soient non nuls et premiers entre eux et qu'on ait

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 = 5 z^5,$$

on a  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  ou  $(x, y, z) = (-1, -1, 1)$ .

Lebesgue montre dans sa proposition 4 que si  $(x, y, z)$  vérifie l'hypothèse de (C), mais non la conclusion de (C),  $x$  ou  $y$  est divisible par 5 et il n'obtient aucun résultat sur la conjecture (D). Il ne semble pas que ces questions aient été reprises depuis Lebesgue ; sur (C), je n'en sais guère plus que lui ; mais je démontrerai (D) par les méthodes élémentaires qu'il a utilisées, ma démonstration est classique et longue, mais elle fournit la solution de nombreuses équations diophantiennes ; les mêmes questions peuvent être abordées dans le corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$  et on trouvera quelques remarques à ce sujet à la fin de notre étude.

Dans les démonstrations qui suivent, les lettres  $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$

*Mot-clé* : Équations diophantiennes.

désigneront toujours explicitement ou implicitement des entiers relatifs de valeur 1 ou  $-1$ .

**PROPOSITION 1.** — Si  $x, y, z$  sont des entiers relatifs tels que  $x^4 - y^4 = 2z^2$ , on a  $x^2 = y^2$  et  $z = 0$ .

*Démonstration.* — Si cela est, on a  $(xy)^4 + z^4 = \left(\frac{x^4 + y^4}{2}\right)^2$ .

D'où  $xyz = 0$ ; d'où  $z = 0$  et le résultat.

**PROPOSITION 2.** — Si  $x, y$  et  $z$  sont des entiers relatifs tels que  $(x, y) = 1$  et que  $x^4 + 2x^2y - y^2 = 2z^4$ , on a

$$x^2 = y = z^2 = 1.$$

*Démonstration.* — Les nombres  $x$  et  $y$  sont impairs et on a  $x^4 - z^4 = 2\left(\frac{x^2 - y}{2}\right)^2$ .

La proposition 1 donne  $x^2 = y$ ; d'où  $x^2 = y = 1$  et le résultat.

**PROPOSITION 3.** — Soient  $x, y, z$  des entiers  $\geq 0$  tels qu'on ait  $(x, y) = 1$  et  $2xy$  et  $x^8 - 2x^4y^2 + 2y^4 = z^2$ , on a  $x = y = z = 1$ .

*Démonstration.* — On a  $(z + x^4 - y^2)(z - x^4 + y^2) = y^4$ .

D'où des entiers  $a$  et  $b$ , premiers entre eux, strictement positifs tels que

$$y = ab$$

$$z + x^4 - y^2 = a^4$$

$$z - x^4 + y^2 = b^4.$$

D'où :

$$2(x^4 - y^2) = a^4 - b^4$$

$$a^4 + 2a^2b^2 - b^4 = 2x^4.$$

Vu la proposition précédente, on a  $a = b = x = 1$ ; d'où  $x = y = z = 1$ .

PROPOSITION 4. — Si  $x, y, u, v$  sont des entiers relatifs tels qu'on ait

$$x^2 - 10 y^2 = u^2$$

$$x^4 - 50 y^4 = v^2,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde. On a alors des entiers  $x, y, u, v$  tous  $\geq 0$  tel que  $y > 0$  et que

$$x^2 - 10 y^2 = u^2$$

$$x^4 - 50 y^4 = v^2.$$

Les nombres  $x, y, u, v$  sont strictement positifs et on peut supposer  $(x, y) = 1$ . Il résulte de la relation  $x^2 - 10 y^2 = u^2$  que  $x$  n'est divisible ni par 2 ni par 5.

On a :

$$(x^2 + v)(x^2 - v) = 50 y^4.$$

Le p.g.c.d. de  $x^2 + v$  et de  $x^2 - v$  est 2 et soit  $x^2 + \epsilon v$  celui de ces deux nombres qui n'est pas divisible par 4. Si  $x^2 + \epsilon v$  est divisible par 5, il y a des entiers  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que  $(a, b) = 1$  et que

$$y = 2 a b$$

$$x^2 + \epsilon v = 50 a^4$$

$$x^2 - \epsilon v = 16 b^4.$$

D'où  $x^2 = 25 a^4 + 8 b^4$  et 2 est résidu quadratique de 5, ce qui est absurde.

Par suite,  $x^2 + \epsilon v$  n'est pas divisible par 5 et il y a des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $c$  soit impair, que  $(c, d) = 1$  et que

$$y = 2 c d$$

$$x^2 + \epsilon v = 2 c^4$$

$$x^2 - \epsilon v = 400 d^4.$$

D'où  $x^2 = c^4 + 200 d^4$ .

On a aussi  $(x + u)(x - u) = 10 y^2$ .

D'où des entiers  $e, f, e'$  tels que  $e > 0, f > 0$ , que  $e$  soit impair, que  $(e, f) = 1$  et que

$$y = 2 e f$$

$$x + e' u = 2 e^2$$

$$x - e' u = 20 f^2 .$$

D'où

$$x = e^2 + 10 f^2$$

$$cd = ef$$

$$c^4 + 200 d^4 = (e^2 + 10 f^2)^2 .$$

Il y a des entiers  $p, q, r, s$ , strictement positifs, deux à deux premiers entre eux tels que  $c = pq, d = rs, e = pr$  et  $f = qs$ . Le nombre  $r$  est impair et on a

$$p^4 q^4 + 200 r^4 s^4 = (p^2 r^2 + 10 q^2 s^2)^2 .$$

D'où

$$(q^4 - r^4) p^4 - 20 q^2 r^2 p^2 s^2 + 100 (2r^4 - q^4) s^4 = 0 .$$

Le polynôme

$$(q^4 - r^4) X^2 - 20 q^2 r^2 X + 100 (2r^4 - q^4)$$

a ses zéros rationnels; son discriminant  $\Delta$  est donc le carré d'un rationnel et on a

$$\begin{aligned} \Delta &= 400 q^4 r^4 - 400 (q^4 - r^4) (2r^4 - q^4) \\ &= 400 (q^8 - 2 q^4 r^4 + 2 r^8) . \end{aligned}$$

Il y a un entier  $t$  tel que

$$q^8 - 2 q^4 r^4 + 2 r^8 = t^2$$

et vu la proposition précédente, on a  $q = r = 1$ ; d'où

$$-20 p^2 s^2 + 100 s^4 = 0 ,$$

ce qui est absurde.

**PROPOSITION 5.** — *Il y a un quadruplet et un seul  $(x, y, u, v)$  formé d'entiers strictement positifs tels que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait les relations*

$$x^2 - 2y^2 = u^2$$

$$x^4 - 2y^4 = v^2,$$

à savoir (3, 2, 1, 7).

*Démonstration.* — Si  $(x, y, u, v)$  est un tel quadruplet, on a  $(x^2 + v)(x^2 - v) = 2y^4$ .

D'où des entiers  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que  $a$  soit impair, que  $(a, b) = 1$  et que

$$y = 2ab$$

$$x^2 = a^4 + 8b^4.$$

De  $x^2 - 2y^2 = u^2$ , on tire des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $c$  soit impair, que  $(c, d) = 1$  et que

$$y = 2cd$$

$$x = c^2 + 2d^2.$$

On a

$$ab = cd$$

$$a^4 + 8b^4 = (c^2 + 2d^2)^2.$$

D'où des entiers  $p, q, r, s$  strictement positifs, deux à deux premiers entre eux tels que  $a = pq$ ,  $b = rs$ ,  $c = pr$  et  $d = qs$ . Le nombre  $r$  est impair et on a

$$p^4 q^4 + 8r^4 s^4 = (p^2 r^2 + 2q^2 s^2)^2.$$

D'où

$$(q^4 - r^4)p^4 - 4q^2 r^2 p^2 s^2 + 4(2r^4 - q^4)s^4 = 0.$$

Le discriminant du polynôme

$$(q^4 - r^4)X^2 - 4q^2 r^2 X + 4(2r^4 - q^4)$$

est un carré ; d'où un entier  $t$  tel que

$$q^8 - 2q^4 r^4 + 2r^8 = t^2.$$

La proposition 3 nous donne  $q = r = 1$  ; d'où

$$-4p^2s^2 + 4s^4 = 0, \quad \text{d'où } p = s = 1;$$

d'où  $a = b = c = d = 1$ ; d'où  $x = 3, y = 2$ ; d'où  $u = 1$  et  $v = 7$ ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 6.** — *Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul formé d'entiers strictement positifs tels que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait*

$$x^4 + 30x^2y^2 + 25y^4 = z^4,$$

à savoir  $(6, 1, 7)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. Si  $x$  et  $y$  sont impairs, on a  $z^4 \equiv 56 \equiv 8 \pmod{16}$ , ce qui est absurde. Ainsi  $x$  et  $y$  sont de parités différentes et  $z$  est impair. Il est clair que  $x$  n'est pas divisible par 5.

Supposons  $y$  pair. On a

$$(x^2 + 15y^2 + z^2)(x^2 + 15y^2 - z^2) = 200y^4.$$

Le p.g.c.d. des facteurs du premier membre est 2 et soit  $x^2 + 15y^2 + \epsilon z^2$  celui de ces facteurs qui n'est pas divisible par 4. Si ce facteur est divisible par 5, on a des entiers  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$x^2 + 15y^2 + \epsilon z^2 = 50a^4$$

$$x^2 + 15y^2 - \epsilon z^2 = 4b^4.$$

D'où

$$x^2 + 15y^2 = 25a^4 + 2b^4$$

$$x^2 \equiv 2b^4 \pmod{5}$$

ce qui est absurde.

Ainsi  $x^2 + 15y^2 + \epsilon z^2$  n'est pas divisible par 5 et on a des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $c$  soit impair, que  $d$  soit pair, que  $(c, d) = 1$  et qu'on ait

$$y = cd$$

$$x^2 + 15y^2 + \epsilon z^2 = 2c^4$$

$$x^2 + 15y^2 - \epsilon z^2 = 100d^4.$$

D'où

$$x^2 = c^4 - 15 c^2 d^2 + 50 d^4$$

$$\epsilon z^2 = c^4 - 50 d^4 .$$

D'où  $\epsilon \equiv 1 \pmod{8}$ , puis  $\epsilon = 1$  et  $x^2 = (c^2 - 5 d^2) (c^2 - 10 d^2)$ ,  
 $z^2 = c^4 - 50 d^4$ .

D'où un entier  $e$  tel que  $c^2 - 10 d^2 = e^2$ .

La proposition 4 donne  $d = 0$ , ce qui est absurde.

Ceci montre que  $y$  ne peut être pair et, par suite,  $x$  est pair et  $y$  est impair. On a

$$(3 x^2 + 5 y^2 + z^2) (3 x^2 + 5 y^2 - z^2) = 8 x^4 .$$

D'où des entiers  $f > 0$ ,  $g > 0$  et  $\epsilon'$  tels que  $f$  soit impair, que  $g$  soit pair, que  $(f, g) = 1$  et qu'on ait

$$x = fg$$

$$3 x^2 + 5 y^2 + \epsilon' z^2 = 2 f^4$$

$$3 x^2 + 5 y^2 - \epsilon' z^2 = 4 g^4 .$$

On a :

$$5 y^2 = f^4 - 3 f^2 g^2 + 2 g^4$$

$$\epsilon' z^2 = f^4 - 2 g^4 .$$

Vu les parités de  $f$  et  $g$ , on a

$$5 y^2 = (f^2 - g^2) (f^2 - 2 g^2)$$

$$z^2 = f^4 - 2 g^4 .$$

Il y a un entier  $h$  tel que

$$f^2 - 2 g^2 = h^2$$

puisque  $f^2 - 2 g^2$  ne peut être divisible par 5.

La proposition 5 nous donne  $f = 3$  et  $g = 2$ ; on en déduit  $x = 6$ ,  $y = 1$  et  $z = 7$ ; d'où le résultat.

PROPOSITION 7. — *Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers strictement positifs tel que  $(x, y) = 1$  et que*

$$x^8 - y^4 = 5 z^2 ,$$

*à savoir  $(7, 31, 984)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. Si  $z$  est impair, on a  $x^8 \equiv 5 \pmod{8}$  ou bien  $x^8 \equiv 6 \pmod{8}$ , ce qui est absurde. Par suite  $z$  est pair et on a  $(x^4 + y^2)(x^4 - y^2) = 5z^2$ .

D'où des entiers  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $\epsilon$  tels que  $(a, b) = 1$  et que

$$z = 2ab$$

$$x^4 + \epsilon y^2 = 2a^2$$

$$x^4 - \epsilon y^2 = 10b^2.$$

D'où

$$x^4 = a^2 + 5b^2$$

$$\epsilon y^2 = a^2 - 5b^2.$$

Si  $b$  est impair, on a

$$(x^2 + a)(x^2 - a) = 5b^2.$$

D'où des entiers  $c$  et  $d$  tels que

$$2x^2 = c^2 + 5d^2$$

$$2x^2 \equiv c^2 \pmod{5}$$

ce qui est absurde.

Par suite,  $a$  est impair et  $b$  est pair; le nombre  $\epsilon$  vaut 1 et on a

$$(a + y)(a - y) = 5b^2.$$

D'où des nombres  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $(c, d) = 1$  et qu'on ait

$$b = 2cd$$

$$a = c^2 + 5d^2$$

$$y = |c^2 - 5d^2|.$$

$$\text{D'où } x^4 = (c^2 + 5d^2)^2 + 20c^2d^2 = c^4 + 30c^2d^2 + 25d^4.$$

La proposition précédente nous donne  $(x, c, d) = (7, 6, 1)$ ; d'où  $a = 41$ ,  $b = 12$ ,  $y = 31$ ; d'où  $z = 984$ ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 8.** — *Il y a trois triplets  $(x, y, z)$  et trois seulement d'entiers strictement positifs tels que  $(x, y) = 1$  et que*

$$x^8 - 10 x^4 y + 5 y^2 = -4 z^4,$$

à savoir  $(1, 1, 1)$ ,  $(7, 433, 31)$  et  $(7, 4\ 369, 31)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. On a

$$x^8 - z^4 = 5 \left( \frac{x^4 - y}{2} \right)^2.$$

Si  $x^4 = y$ , on a  $x = y = 1$ ; d'où  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ .

Si  $x^4 \neq y$ , on a  $(x, z) = 1$  et vu la proposition précédente, on a

$$x = 7$$

$$z = 31$$

$$|x^4 - y| = 1\ 968.$$

D'où

$$y = x^4 \pm 1\ 968 = 2\ 401 \pm 1\ 968.$$

D'où le résultat.

**PROPOSITION 9.** — Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers strictement positifs tels qu'on ait  $(x, y) = 1$  et

$$x^8 - 10 x^4 y^2 + 5 y^4 = -4 z^4,$$

à savoir  $(1, 1, 1)$ .

Cela résulte immédiatement de la proposition précédente.

**PROPOSITION 10.** — Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers  $\geq 0$  tels que  $y$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait

$$x^8 - 5 x^4 y^4 + 5 y^8 = z^2,$$

à savoir  $(1, 1, 1)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. Le nombre  $x$  est impair, n'est pas divisible par 5 et on a

$$(5 y^4 - 2 x^4 + 2 z) (5 y^4 - 2 x^4 - 2 z) = 5 y^8.$$

D'où des entiers  $a, b, \epsilon, \epsilon'$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $(a, b) = 1$  et que

$$y = a b$$

$$5 y^4 - 2 x^4 + \epsilon z = \epsilon' a^8$$

$$5 y^4 - 2 x^4 - \epsilon z = 5 \epsilon' b^8 .$$

D'où

$$- 4 x^4 = \epsilon' a^8 - 10 a^4 b^4 + 5 \epsilon' b^8 .$$

Les nombres  $a$  et  $b$  sont impairs et on a

$$- 4 \equiv 6 \epsilon' - 10 \pmod{8} .$$

D'où  $\epsilon' = 1$  et

$$- 4 x^4 = a^8 - 10 a^4 b^4 + 5 b^8 .$$

Vu la proposition précédente, on a  $a = b = x = 1$  ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 11.** — *Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers  $\geq 0$  tel que  $y$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait*

$$x^4 + 10 x^2 y^4 + 5 y^8 = z^2 ,$$

à savoir  $(1, 1, 4)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. On a

$$(x^2 + 5 y^4 + z) (x^2 + 5 y^4 - z) = 20 y^8 .$$

D'où des nombres  $a, b, \epsilon$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $(a, b) = 1$  et que

$$y = a b$$

$$x^2 + 5 y^4 + \epsilon z = 2 a^8$$

$$x^2 + 5 y^4 - \epsilon z = 10 b^8 .$$

D'où

$$x^2 = a^8 - 5 a^4 b^4 + 5 b^8 .$$

Vu la proposition précédente, on a  $a = b = x = 1$  ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 12.** — *Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers  $\geq 0$  tels que  $y$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait*

$$16 x^4 - 20 x^2 y^4 + 5 y^8 = z^2,$$

à savoir  $(1, 1, 1)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. On a

$$(8 x^2 - 5 y^4 + 2 z) (8 x^2 - 5 y^4 - 2 z) = 5 y^8.$$

D'où des nombres  $a, b, \epsilon, \epsilon'$  tels que  $a > 0, b > 0$ , que  $a$  et  $b$  soient impairs, que  $(a, b) = 1$  et qu'on ait

$$y = a b$$

$$8 x^2 - 5 y^4 + 2 \epsilon z = \epsilon' a^8$$

$$8 x^2 - 5 y^4 - 2 \epsilon z = 5 \epsilon' b^8.$$

D'où

$$16 x^2 = \epsilon' a^8 + 10 a^4 b^4 + 5 \epsilon' b^8.$$

$$0 \equiv 6 \epsilon' + 10 \pmod{16}.$$

D'où  $\epsilon' = 1$  et

$$16 x^2 = a^8 + 10 a^4 b^4 + 5 b^8.$$

Vu la proposition précédente, on a  $a = b = x = 1$ ; d'où  $y = 1$  et  $z = 1$ ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 13.** — Si  $x, y$  et  $z$  sont des entiers relatifs tels que  $x$  soit impair et qu'on ait

$$x^8 + 320 y^8 = z^2,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde. On a alors des entiers  $x, y, z$  strictement positifs tels que  $x$  soit impair et qu'on ait

$$x^8 + 320 y^8 = z^2.$$

On peut supposer  $(x, y) = 1$ . Le nombre  $x$  n'est pas divisible par 5 et on a

$$(z + x^4) (z - x^4) = 320 y^8.$$

Soit  $z + \epsilon x^4$  celui des facteurs du premier membre qui n'est

pas divisible par 4. Si ce facteur est divisible par 5, on a des entiers  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que  $a$  soit impair, que  $(a, b) = 1$  et que

$$z + \epsilon x^4 = 10 a^8$$

$$z - \epsilon x^4 = 32 b^8.$$

$$\text{D'où } \epsilon x^4 = 5 a^8 - 16 b^8.$$

D'où  $\epsilon \equiv 5 \pmod{8}$ , ce qui est absurde.

Par suite,  $z + \epsilon x^4$  n'est pas divisible par 5 et on a des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $c$  ne soit pas divisible ni par 2 ni par 5, que  $(c, d) = 1$  et que

$$z + \epsilon x^4 = 2 c^8$$

$$z - \epsilon x^4 = 160 d^8.$$

$$\text{D'où } \epsilon x^4 = c^8 - 80 d^8.$$

D'où  $\epsilon = 1$  et

$$c^8 - x^4 = 5 (4 d^4)^2.$$

Les nombres  $c$  et  $x$  sont premiers entre eux et la proposition 7 donne  $4 d^4 = 984$ ; d'où  $d^4 = 246$ ; ce qui est absurde.

**PROPOSITION 14.** — Si  $x, y$  et  $z$  sont des entiers relatifs tels que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^4 - 5 y^8 = z^2,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde. On a alors des entiers  $x, y, z$  strictement positifs tels que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^4 - 5 y^8 = z^2.$$

Le nombre  $x$  n'est divisible ni par 2 ni par 5 et on a

$$(x^2 + z)(x^2 - z) = 5 y^8.$$

Si  $y$  est impair, il y a des nombres  $a$  et  $b$  tels que

$$2 x^2 = a^8 + 5 b^8$$

$$2 x^2 \equiv a^8 \pmod{5},$$

ce qui est absurde.

Par suite,  $y$  est pair et nous noterons  $\epsilon$  l'entier tel que  $x^2 + \epsilon z$  ne soit pas divisible par 4. Si 5 divise  $x^2 + \epsilon z$ , il y a des entiers  $c$  et  $d$  tels que

$$x^2 + \epsilon z = 10 c^8$$

$$x^2 - \epsilon z = 128 d^8.$$

D'où

$$x^2 = 5 c^8 + 64 d^8$$

$$x^2 \equiv 5 c^8 \pmod{8},$$

ce qui est absurde.

Ainsi  $x^2 + \epsilon z$  n'est pas divisible par 5 et on a des entiers  $e > 0$  et  $f > 0$  tels que

$$x^2 + \epsilon z = 2 e^8$$

$$x^2 - \epsilon z = 640 d^8.$$

D'où

$$x^2 = e^8 + 320 d^8.$$

Vu la proposition précédente, on a  $d = 0$ , ce qui est absurde.

**PROPOSITION 15.** — Si  $x, y, z$  sont des entiers relatifs tels que  $x$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait

$$x^4 + 20 y^8 = z^2,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde. On a alors des entiers  $x, y, z$  strictement positifs tels que  $x$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^4 + 20 y^8 = z^2.$$

On a

$$(x + x^2)(z - x^2) = 20 y^8.$$

D'où des entiers  $a, b, \epsilon$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $(a, b) = 1$ , que  $a$  et  $b$  soient des parités différentes et que

$$z + \epsilon x^2 = 2 a^8$$

$$z - \epsilon x^2 = 10 b^8.$$

D'où

$$\epsilon x^2 = a^8 - 5 b^8 .$$

Si  $a$  est pair, on a  $\epsilon \equiv -5 \pmod{8}$ , ce qui est absurde ; ainsi,  $b$  est pair,  $\epsilon$  vaut 1 et on a

$$x^2 = a^8 - 5 b^8 .$$

Vu la proposition précédente, on a  $b = 0$ , ce qui est absurde.

**PROPOSITION 16.** — Si  $x, y, z$  sont des entiers relatifs tels que  $(x, y) = 1$ , que  $z$  soit impair et qu'on ait

$$x^2 + 10 x y^4 + 5 y^8 = z^4 ,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Soient  $x, y, z$  comme dans l'énoncé, on a  $(y, z) = 1$  et

$$z^4 + 20 y^8 = (x + 5 y^4)^2 .$$

La proposition précédente nous donne  $y = 0$ . C.Q.F.D.

**PROPOSITION 17.** — Si  $x, y, z$  sont des entiers relatifs tels que  $x$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^8 - 20 x^4 y^4 + 80 y^8 = z^2 ,$$

on a  $y = 0$ .

*Démonstration.* — Raisonnant par l'absurde, on a des entiers  $x, y, z$  strictement positifs tels que  $x$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^8 - 20 x^4 y^4 + 80 y^8 = z^8 .$$

On a

$$(x^4 - 10 y^4 + z) (x^4 - 10 y^4 - z) = 20 y^8 .$$

D'où des entiers  $a, b, \epsilon, \epsilon'$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $(a, b) = 1$  et

$$x^4 - 10 y^4 + \epsilon z = 2 \epsilon' a^8$$

$$x^4 - 10 y^4 - \epsilon z = 10 \epsilon' b^8 .$$

D'où

$$x^4 = \epsilon' a^8 + 10 a^4 b^4 + 5 \epsilon' b^8 .$$

$$1 \equiv \epsilon' (a^4 + b^4)^2 \quad (4).$$

D'où  $\epsilon = 1$  et

$$x^4 = a^8 + 10 a^4 b^4 + 5 b^8 .$$

Vu la proposition précédente, on a  $b = 0$ , ce qui est absurde.

**PROPOSITION 18.** — *Il y a un triplet  $(x, y, z)$  et un seul d'entiers strictement positifs, tels que  $x$  soit impair, que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait*

$$x^4 + 40 x^2 y^4 + 80 y^8 = z^2 ,$$

à savoir  $(1, 1, 11)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. On a

$$(x^2 + 20 y^4 + z)(x^2 + 20 y^4 - z) = 320 y^8 .$$

Soit  $x^2 + 20 y^4 + \epsilon z$  celui des facteurs du premier membre qui n'est pas divisible par 4. Si ce facteur n'est pas divisible par 5, il y a des entiers  $a, b, \epsilon$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$ , que  $a$  soit impair, que  $(a, b) = 1$  et que

$$y = a b$$

$$x^2 + 20 y^4 + \epsilon z = 2 a^8$$

$$x^2 + 20 y^4 - \epsilon z = 160 b^8 .$$

D'où

$$x^2 = a^8 - 20 a^4 b^4 + 80 b^8 ,$$

ce qui est absurde, vu la proposition précédente.

Ainsi,  $x^2 + 20 y^4 + \epsilon z$  est divisible par 5 et on a des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que  $c$  soit impair, que  $(c, d) = 1$  et que

$$y = c d$$

$$x^2 + 20 y^4 + \epsilon z = 10 c^8$$

$$x^2 + 20 y^4 - \epsilon z = 32 d^8 .$$

D'où

$$x^2 = 5 c^8 - 20 c^4 d^4 + 16 d^8 .$$

Vu la proposition 12, on a  $c = d = x = 1$  ; d'où  $y = 1$  et  $z = 11$  ; d'où le résultat.

**PROPOSITION 19.** — *Il y a deux triplets  $(x, y, z)$  et deux seulement formés d'entiers relatifs tels que  $xy \neq 0$  et  $(x, y) = 1$  et que*

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 = 5 z^5 ,$$

*à savoir  $(1, 1, 1)$  et  $(-1, -1, 1)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(x, y, z)$  un tel triplet. Le nombre  $z$  est impair. Posons

$$u = x - y$$

$$v = x + y .$$

On a

$$u^4 + 10 u^2 v^2 + 5 v^4 = 80 z^5 .$$

Ainsi  $u$  est divisible par 5 et posant  $u = 5 w$ , on a

$$v^4 + 50 v^2 w^2 + 125 w^4 = 16 z^5 .$$

Le p.g.c.d. de  $u$  et de  $v$  vaut 1 ou 2 ; il en est de même du p.g.c.d. de  $v$  et  $w$  ; par suite, ni  $v$  ni  $z$  ne sont divisibles par 5 .

Nous noterons  $A$  l'anneau des entiers du corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$  et  $\eta$  le nombre  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ; on sait que  $A$  est un anneau principal, que  $A$  est le  $\mathbf{Z}$ -module engendré par 1 et  $\eta$  et que les unités de  $A$  sont les nombres  $\eta^k$  et  $-\eta^k$  pour  $k$  dans  $\mathbf{Z}$  .

On a

$$(v^2 + 25 w^2 + 10\sqrt{5} w^2)(v^2 + 25 w^2 - 10\sqrt{5} w^2) = 16 z^5 .$$

Les facteurs ci-dessus ont 4 pour p.g.c.d. et il y a des entiers relatifs  $k$  et  $\epsilon$  et un élément  $\alpha$  de  $A$  qui n'est divisible ni par 2 ni par  $\sqrt{5}$  tels que

$$v^2 + 25 w^2 + 10\sqrt{5} w^2 = 4 \epsilon \eta^k \alpha^5 .$$

Puisque  $\alpha^5$  est congru à un entier relatif modulo  $(\sqrt{5})^3$ ,  $\eta^{|k|}$  est congru à un entier relatif modulo  $(\sqrt{5})^3$  et  $k$  est divisible par 5 . Il y a donc un élément  $\beta$  de  $A$  qui n'est divisible ni par 2 ni par  $\sqrt{5}$  tel qu'on ait

$$v^2 + 25 w^2 + 10 \sqrt{5} w^2 = 4 \beta^5 .$$

Supposons que  $\beta$  soit de la forme  $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{5})$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers relatifs impairs. On a

$$8(v^2 + 25 w^2) = a(a^4 + 50 a^2 b^2 + 125 b^4)$$

$$16 w^2 = b(a^4 + 10 a^2 b^2 + 5 b^4) .$$

Il résulte de là que  $a$  et  $b$  sont strictement positifs, que  $(a, b) = 1$  et qu'il y a des entiers  $c > 0$  et  $d > 0$  tels que

$$b = c^2$$

$$a^4 + 10 a^2 b^2 + 5 b^4 = d^2 .$$

Le nombre  $c$  est impair et on a  $(a, c) = 1$  et

$$a^4 + 10 a^2 c^4 + 5 c^8 = d^2 .$$

Vu la proposition 11, on a  $a = c = 1$ ; d'où  $b = |w| = 1$ ; d'où  $8(v^2 + 25) = 176$ ; ce qui est absurde.

Ainsi  $\beta$  est de la forme  $e + f\sqrt{5}$  avec  $e$  et  $f$  entiers relatifs de parités différentes et on a

$$v^2 + 25 w^2 = 4 e(e^4 + 50 e^2 f^2 + 125 f^4)$$

$$w^2 = 2 f(e^4 + 10 e^2 f^2 + 5 f^4) .$$

Supposons  $f$  non nul. Les nombres  $e$  et  $f$  sont strictement positifs,  $e$  est impair et  $f$  est pair et on a  $(e, f) = 1$ . Il y a des entiers  $g > 0$  et  $h > 0$  tels que  $(g, h) = 1$  et que

$$|w| = 2 g h$$

$$f = 2 g^2$$

$$e^4 + 10 e^2 f^2 + 5 f^4 = h^2 .$$

D'où

$$e^4 + 40 e^2 g^4 + 80 g^8 = h^2 .$$

La proposition 18 donne  $(e, g, h) = (1, 1, 11)$ ; d'où  $f = 2$  et  $|w| = 22$ ; d'où

$$v^2 + 12 100 = 8 804 ,$$

ce qui est absurde.

Ainsi  $f$  est nul; donc  $w$  est nul et on a  $u = 0$ ; d'où  $x = y$ ; d'où  $(x, y) = (1, 1)$  ou bien  $(x, y) = (-1, -1)$ ; d'où le résultat.

Nous avons démontré (D). On en déduit la propriété suivante que Lebesgue a démontrée d'une autre manière.

**PROPOSITION 20.** — *Soit  $a$  un entier strictement positif, divisible par 5, n'ayant aucun diviseur premier congru à 1 modulo 5, il y a deux triplets  $(x, y, z)$  et deux seulement formés d'entiers relatifs tels que  $xy \neq 0$ , que  $(x, y) = 1$  et qu'on ait*

$$x^5 - y^5 = a z^5,$$

à savoir  $(1, 1, 0)$  et  $(-1, -1, 0)$ .

*Démonstration.* — Raisonons par l'absurde. On a des entiers relatifs  $x, y, z$  tels que  $xyz \neq 0$ , que  $(x, y) = 1$  et que

$$x^5 - y^5 = a z^5.$$

D'où

$$(x - y) (x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4) = a z^5.$$

Le p.g.c.d. des facteurs du premier membre est 5 et le second de ces facteurs est divisible par 5 et non par 25 et a tous ses diviseurs premiers autres que 5 congrus à 1 modulo 5 comme il est bien connu. Il y a donc un entier  $u$  tel que

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 = 5 u^5.$$

Vu la proposition précédente, on a  $x = y$ ; d'où  $z = 0$ , ce qui est absurde.

Les arguments ci-dessus permettent de montrer quand il sont convenablement généralisés que l'équation

$$x^5 - y^5 = \sqrt{5} z^2$$

avec  $x, y, z$  entiers de  $\mathfrak{Q}(\sqrt{5})$  tels que  $xyz \neq 0$  et que  $(x, y) = 1$  a essentiellement les solutions suivantes :

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} \right),$$

$$(1 + 2\sqrt{5}, 1 - 2\sqrt{5}, 22).$$

On en déduit que l'équation

$$x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 + y^4 = 5 z^5$$

a la solution  $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1\right)$ , mais je ne sais pas résoudre généralement cette équation lorsqu'on suppose que  $x, y, z$  sont des entiers du corps  $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ , que  $xyz \neq 0$  et que  $(x, y) = 1$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.A. LEBESGUE, Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée  $x^5 + y^5 = a z^5$ , *Journal de Mathématiques*, 8 (1843), 49-70.

Manuscrit reçu le 9 septembre 1986.

Guy TERJANIAN,  
Université Paul Sabatier (M.I.G.)  
118, route de Narbonne  
31062 Toulouse Cedex (France).