

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TAMBEKOU ROGER TCHANGANG

Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire

Annales de l'institut Fourier, tome 37, n° 2 (1987), p. 19-31

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_19_0

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES DU GROUPE MODULAIRE

par Roger Tambekou TCHANGANG

En 1983, Ivanov affirme dans [8] que le groupe $M_g^* = \pi_0 \text{Diff } F_g$ est complet (où $\pi_0 \text{Diff } F_g$ désigne le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de la surface fermée orientable F_g), c'est-à-dire que tout automorphisme du groupe M_g^* est intérieur. L'année suivante, grâce à une étude des sous-groupes virtuellement abéliens de M_g^* et en particulier des divers rangs qui leur sont associés, J. McCarthy [10] précise ce résultat et en donne une démonstration qui s'appuie notamment sur le théorème de classification des difféomorphismes de surfaces de W. Thurston. Dans ce qui suit, on se propose d'établir le théorème d'Ivanov (cf. Théorème I ci-dessous) en ne faisant appel qu'à des techniques simples de théorie des groupes et de topologie des surfaces. Comme on le verra au théorème II, la méthode proposée permet aussi de retrouver le résultat d'Ivanov dans le cas des surfaces pointées⁽¹⁾.

Je remercie A. Papadopoulos qui m'a conseillé la lecture du manuscrit de McCarthy, ainsi que J. L. Loday et C. Squier par l'intermédiaire desquels j'ai su que $\text{Out } B_n \approx Z_2$.

Le groupe modulaire $M_g = \pi_0 \text{Diff}^+ F_g$ est le sous-groupe de M_g^* des classes d'isotopie de difféomorphismes orientés de la surface F_g . On désigne par $\text{Out } G$ le groupe des automorphismes extérieurs du groupe G , c'est-à-dire le quotient du groupe $\text{Aut } G$ des automorphismes de G par le sous-groupe distingué $\text{Int } G$ des automorphismes intérieurs de G .

(¹) Dans *Algebraic properties of the mapping class group*, preprint E-1-85, Steklov Mathematical Institute, Leningrad, 1985, Ivanov affirme avoir obtenu le même résultat pour les difféomorphismes de F_g fixant un nombre quelconque de points.

THÉORÈME I. — Lorsque $g \geq 3$, on a

$$\text{Out } M_g \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_g^* = 1;$$

lorsque $g = 2$,

$$\text{Out } M_2 \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_2^* \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2.$$

Lorsque $g \geq 3$, l'unique automorphisme extérieur non trivial de M_g est déterminé par la conjugaison par un difféomorphisme (quelconque) renversant l'orientation de F_g . Les automorphismes de M_2 et de M_2^* seront caractérisés plus loin.

1. Rappels.

A. Intersection géométrique. — Soient C_1 et C_2 deux courbes simples fermées sur F_g . On définit leur nombre d'intersection géométrique $i(C_1, C_2)$ en posant :

$$i(C_1, C_2) = \inf (\text{cardinal de } C \cap C'),$$

où C et C' sont des courbes simples isotopes respectivement à C_1 et à C_2 . Lorsque $i(C_1, C_2) = 0$, on peut choisir des représentants des classes d'isotopie de C_1 et de C_2 qui sont disjoints. Rappelons que la surface F_g étant orientable, deux courbes homotopes ont un nombre d'intersection nul. On note $T_C \in M_g$ le twist de Dehn suivant la courbe C . Comme T_C ne dépend que de la classe d'isotopie Γ de C , on utilisera également dans la suite la notation T_Γ . Soit $n \in \mathbf{Z}^*$; on a :

$$i(C_1, C_2) \neq 0 \Leftrightarrow i(C_2, T_{C_1}^n(C_2)) \neq 0. \quad (*)$$

On obtient l'équivalence (*) en considérant l'action d'un représentant de T_{C_1} dont le support est contenu dans un voisinage tubulaire convenable de C . (Voir [5], p. 68-69, pour des résultats plus forts qui impliquent (*).)

Appliquée à deux courbes C_1 et C_2 vérifiant $i(C_1, C_2) \neq 0$, l'équivalence (*) montre que tout twist de Dehn suivant une courbe C_1 non triviale est d'ordre infini. Les remarques suivantes permettront de dire si deux courbes simples fermées sont isotopes.

1. Soit $f \in M_g$: on a :

$$f \circ T_C \circ f^{-1} = T_{f(C)}.$$

Ceci est une conséquence de la définition d'un twist de Dehn.

2. Si C_1 et C_2 ne sont pas isotopes, alors il existe une courbe simple fermée C_3 sur F_g telle que $i(C_1, C_3) \neq 0$ et $i(C_2, C_3) = 0$.

En effet, il suffit de constater que toute composante connexe de $F_g - C_2$ est de genre supérieur ou égal à 1.

3. Soient n et p des entiers non nuls. Si $T_{C_1}^n = T_{C_2}^p$, alors C_1 est isotope à C_2 , et $n = p$.

Pour le voir, on suppose d'abord C_1 et C_2 non isotopes. On applique $T_{C_1}^n$ et $T_{C_2}^p$ à une courbe C_3 satisfaisant aux conditions de la remarque 2. L'équivalence (*) conduit alors à une contradiction. Puisque C_1 et C_2 sont isotopes et que le twist T_{C_1} est d'ordre infini, on a $n = p$.

4. Soit $f \in M_g$ une difféotopie vérifiant : $f \circ T_C^p \circ f^{-1} = T_C^p$, où p est un entier non nul. Alors, la classe d'isotopie $f(C)$ contient C .

En effet, par la remarque 1, on a $T_{f(C)}^p = T_C^p$; on applique ensuite la remarque 3.

5. Si T_{C_1} commute avec T_{C_2} , alors $i(C_1, C_2) = 0$.

En effet, $T_{C_1}(C_2)$ est isotope à C_2 , d'après la propriété 4. L'équivalence (*) permet de conclure.

B. Involution hyperelliptique. — On dit qu'un élément h de M_g est une *involution hyperelliptique* s'il existe un difféomorphisme \tilde{h} d'ordre 2 représentant h et ayant exactement $2g + 2$ points fixes (voir [4]).

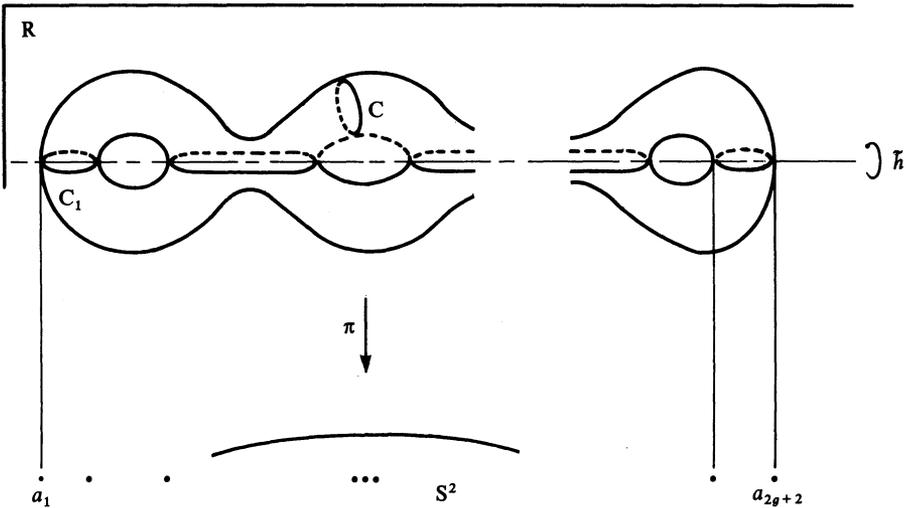


Fig. 1.

Rappelons quelques faits dont on pourra trouver une démonstration dans [2]. Soit h une involution hyperelliptique, représentée par l'involution \tilde{h} de F_g . Par la formule de Riemann-Hurwitz, F_g/\tilde{h} est une sphère et la projection $\pi: F_g \rightarrow F_g/\tilde{h}$ est un revêtement ramifié à deux feuillettes. En particulier, \tilde{h} préserve l'orientation de F_g . Soit

$$A_{2g+2} = \{a_1, \dots, a_{2g+2}\} \subset S^2 \approx F_g/\tilde{h}$$

l'ensemble des points de branchement de π et soit $(I_i)_{1 \leq i \leq 2g+1}$ un système de $2g+1$ arcs de S^2 , d'intérieurs 2 à 2 disjoints et contenus dans $S^2 - A_{2g+2}$ et d'extrémités respectives a_i et a_{i+1} . Dans F_g , les relevés par π des arcs I_i forment une chaîne $(C_i)_{1 \leq i \leq 2g+1}$ de $2g+1$ courbes simples fermées invariantes par \tilde{h} . Soit T_i le twist de Dehn suivant C_i , cf. fig. 1.

On note $N(h)$ le sous-groupe de M_g formé des éléments qui commutent avec h . Le groupe $N(h)$ admet la présentation :

$$\begin{aligned} \langle T_1, \dots, T_{2g+2} \mid & [T_i, T_j] = 1, \quad i - j \geq 2 \\ & T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2g \\ & (T_1 \dots T_{2g+1})^{2g+2} = 1 \\ & (T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1)^2 = 1 \\ & [T_g T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1, T_1] = 1 \rangle \end{aligned}$$

et on a $h = T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1$. On établit ce fait à partir de la suite exacte :

$$1 \rightarrow \{1, h\} \rightarrow N(h) \xrightarrow{p} \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \rightarrow 1$$

et de la présentation classique de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$:

$$\begin{aligned} \langle S_1, \dots, S_{2g+2} \mid & [S_i, S_j] = 1, \quad i - j \geq 2 \\ & S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2g \\ & (S_1 \dots S_{2g+1})^{2g+2} = 1 \\ & S_1 \dots S_{2g} S_{2g+1}^2 S_{2g} \dots S_1 = 1 \rangle \end{aligned}$$

où $S_i = p(T_i)$ est un *demi-twist de Dehn* autour de l'arc I_i . Les remarques 1 à 5 demeurent vraies pour les demi-twists, si l'on remplace les courbes fermées par des arcs simples. Sur ces présentations, on lit que $N(h)$ et $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$ sont des quotients du groupe des tresses

$$B_{2g+2} = \pi_0 \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+2}, \text{rel } \partial D^2)$$

qui pour sa part admet la présentation

$$\langle s_1, \dots, s_{2g+2} \mid [s_i, s_j] = 1, i - j \geq 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, i - j \leq 2 \rangle.$$

Enfin, le centre de $N(h)$ est engendré par h . Ceci résulte du fait que si un élément laisse invariant chaque classe d'isotopie de courbe C_i , on peut le représenter par un difféomorphisme laissant invariant $\bigcup_1^{2g+1} C_i$ ([5], p. 53), et que $F_g - \bigcup_1^{2g+1} C_i$ est la réunion de deux disques disjoints.

2. Démonstration du théorème I.

LEMME 1. — Soient h et h' deux involutions hyperelliptiques dans M_g . Alors, h est conjugué à h' dans M_g .

Démonstration. — Pour le montrer, il suffit de relever dans $\text{Diff}^+ F_g$ un difféomorphisme entre les espaces quotients envoyant points de branchement sur points de branchement, ce qui est toujours possible, d'après le théorème de monodromie d'Hurwitz (voir [2]). \square

Dans toute la suite, on travaille avec une involution hyperelliptique \tilde{h} fixée une fois pour toutes.

LEMME 2. — Tout difféomorphisme $\bar{\alpha}$ de (S^2, A_{2g+2}) d'ordre $2g + 1$ admet dans $\text{Diff}^+ F_g$ un relèvement $\tilde{\alpha}$ d'ordre $2(2g+1)$, et on a

$$\alpha^{2g+1} = h,$$

où α désigne la classe d'isotopie de $\tilde{\alpha}$ dans M_g .

Démonstration. — Tout difféomorphisme de (S^2, A_{2g+2}) se relève en deux difféomorphismes qui se déduisent l'un de l'autre par multiplication par h . Soit $\tilde{\alpha}$ un relèvement de $\bar{\alpha}$. $\tilde{\alpha}^{2g+2}$ induit l'identité sur (S^2, A_{2g+2}) . En outre, $\bar{\alpha}$ étant d'ordre impair, on peut choisir $\tilde{\alpha}$ d'ordre $2(2g+1)$. \square

Remarque. — L'automorphisme $T_1 \dots T_{2g}$ est d'ordre $2(2g+1)$. Il permute circulairement les points a_1, \dots, a_{2g+1} et fixe a_{2g+2} .

LEMME 3. — Soit α un élément d'ordre $2(2g+1)$ de M_g . Alors, il existe une réalisation $\tilde{\alpha}$ de α d'ordre $2(2g+1)$ et α^{2g+1} est une involution hyperelliptique.

Démonstration. — L'existence de $\tilde{\alpha}$ est la conséquence d'un théorème de Fenchel-Nielsen (cf. [13]). D'autre part, en vertu d'un résultat de Harvey utilisant pour l'essentiel la formule de Riemann-Hurwitz [6], la projection $F_g \rightarrow F_g/\tilde{\alpha}$ a $2g + 4$ points de ramification x_1, \dots, x_{2g+4} sur lesquels $\tilde{\alpha}$ induit la permutation

$$(x_1, \dots, x_{2g+1})(x_{2g+2})(x_{2g+3}, x_{2g+4}).$$

Par conséquent, $\tilde{\alpha}^{2g+1}$ laisse fixes les points x_1, \dots, x_{2g+2} . \square

PROPOSITION 1. — *Soit Φ un automorphisme de M_g . Alors, $\Phi(h)$ est une involution hyperelliptique.*

Démonstration. — D'après le lemme 2, il existe $\alpha \in M_g$ d'ordre $2(2g+1)$ tel que $h = \alpha^{2g+1}$. Donc $h' = \Phi(h) = \Phi(\alpha)^{2g+1}$ est aussi une involution hyperelliptique, d'après le lemme 3. \square

COROLLAIRE 1. — *Tout élément Φ de $\text{Out } M_g$ admet un représentant Φ tel que $\Phi(h) = h$ et par conséquent $\Phi(N(h)) = N(h)$.* \square

Soit Φ un tel représentant. Il induit un automorphisme

$$\bar{\Phi} : \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \approx N(h)/h \rightarrow N(h)/h.$$

PROPOSITION 2. — *On a $\text{Out } N(h) \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.*

Démonstration. — Pour le voir, on exhibe deux éléments ρ et σ d'ordre 2 de $\text{Out } N(h)$ et l'on montre que leur produit $\rho\sigma$ est d'ordre 2, ce qui définit une injection de $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ dans $\text{Out } N(h)$ dont on montre ensuite la surjectivité.

Soit R une réflexion (involution renversant l'orientation) de la surface F_g respectant chacune des courbes C_i . On exige en outre que la réflexion R laisse invariante la courbe C de la figure 1, ce qui la détermine à isotopie près. Une isotopie convenable permet enfin d'imposer à R de commuter avec \tilde{h} (figure 1). Alors, l'involution ρ est la restriction à $N(h)$ de la conjugaison par R dans M_g^* .

Soit maintenant $s : N(h) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ l'application définie par la composition

$$N(h) \xrightarrow{P} \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \xrightarrow{P} \mathcal{S}_{2g+2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$$

où ε est l'homomorphisme de signature du groupe symétrique \mathcal{S}_{2g+2} et P l'homomorphisme de restriction à A_{2g+2} des difféotopies de la paire

(S^2, A_{2g+2}) . On définit alors l'involution σ de $N(h)$ en posant :

$$\sigma(x) = xh^{s(x)}.$$

Lorsque $1 \leq i \leq 2g + 1$, aucun des trois éléments $\rho(T_i) = T_i^{-1}$, $\sigma(T_i) = T_i h$ et $\sigma\rho(T_i) = T_i^{-1}h$ ne peut être conjugué à T_i dans M_g . En effet, supposons par exemple que $T_i h$ soit conjugué à T_i . D'après la remarque 1, $T_i h$ est un twist de Dehn T_D , et on a $T_i^2 = (T_i h)^2 = T_D^2$; d'après la remarque 3, la courbe D est isotope à C_i , ce qui conduit à l'absurdité $h = \text{Identité}$.

On en déduit que $(\rho\sigma)$ est d'ordre 2 dans $\text{Out } N(h)$ et que l'application $Z_2 \times Z_2 \rightarrow \text{Out } N(h)$ ainsi définie est injective. La surjectivité résulte des cinq lemmes suivants :

LEMME 4. — *Le groupe $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, \text{rel } A_{2g+2})$ est un sous-groupe caractéristique de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$.*

En outre, tout élément ψ de $\text{Out } N(h)$ admet un représentant ψ dans $\text{Aut } N(h)$ qui induit l'identité sur

$$\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) / \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, \text{rel } A_{2g+2}) \approx \mathcal{S}_{2g+2}.$$

La première assertion permet de définir, par passage au quotient, un morphisme $\text{Out } N(h) \rightarrow \text{Out } \mathcal{S}_{2g+2}$. La seconde dit que ce morphisme est trivial.

Démonstration. — Comme $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$ est un quotient de B_{2g+2} , la première assertion du lemme découle immédiatement du résultat suivant ([1]) :

Tout épimorphisme $B_{2g+2} \rightarrow \mathcal{S}_{2g+2}$ se déduit de l'homomorphisme standard par composition à gauche avec un automorphisme de \mathcal{S}_{2g+2} . D'autre part, on sait que lorsque $g \geq 3$, on a $\text{Out } \mathcal{S}_{2g+2} = 1$ (cf. [1]) ; d'où la seconde assertion dans le cas $g \neq 2$.

Lorsque $g = 2$, on a $\text{Out } \mathcal{S}_6 \approx Z_2$ et l'élément non trivial de ce groupe peut être représenté par un automorphisme transformant la permutation circulaire $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ en $(1\ 2\ 3)(5\ 6)$. Or tout élément d'ordre 6 (donc fini) de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_6)$ se réalise comme un automorphisme pour une certaine structure conforme sur (S^2, A_6) , c'est-à-dire comme une rotation, et donc induit sur A_6 un cycle de longueur 6 (voir ([12])). On en déduit que tout automorphisme de \mathcal{S}_6 qui provient d'un automorphisme de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_6)$ est nécessairement un automorphisme intérieur de A_6 . \square

Dans ce qui suit, $\psi \in \text{Aut } N(h)$ désigne un automorphisme induisant l'identité sur \mathcal{S}_{2g+2} .

LEMME 5. — L'automorphisme $\bar{\Psi}$ de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$ induit par ψ laisse invariant le sous-groupe $B(i) = \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+1}, a_i)$ de $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$, où $1 \leq i \leq 2g + 2$.

Démonstration. — Le groupe $B(i)$ est tout simplement l'image réciproque par $P: \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \rightarrow \mathcal{S}_{2g+2}$ du sous-groupe $S(i)$ des permutations de A_{2g+2} fixant a_i . \square

LEMME 6. — On a $\bar{\Psi} = \text{Identité}$ ou bien $\bar{\Psi}(S_i) = S_i^{-1}$ pour $1 \leq i \leq 2g + 1$.

Démonstration. — Puisque $S^2 - a_i$ est isomorphe au disque ouvert D^2 , on a $B(i) \approx \pi_0 \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1})$. En examinant la suite exacte de fibration de Cerf :

$$\text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1}, \text{rel } \partial D^2) \rightarrow \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1}) \rightarrow \text{Diff}^+ \partial D^2,$$

on voit que $B(i) \approx B_{2g+1}/\mathcal{L}$, où le twist de Dehn \mathcal{L} suivant le bord de D^2 engendre le centre (cyclique infini) de B_{2g+1} . Or l'un des énoncés démontrés par J. Dyer et E. Grossman dans [3] assure que

$$\text{Out } B_n/\mathcal{L} \approx Z_2.$$

L'élément exhibé dans [3] pour représenter la classe non triviale de $\text{Out } B_n/\mathcal{L}$ est la restriction à $B(i)$ de l'automorphisme non trivial défini dans l'énoncé.

Montrons que si $\bar{\Psi}|_{B(2g+1)} = \text{Identité}$, alors, $\bar{\Psi} = \text{Identité}$: Comme S_{2g+1} est conjugué à S_1 et que $\bar{\Psi}$ induit l'identité sur \mathcal{S}_{2g+2} , la difféotopie $\bar{\Psi}(S_{2g+1})$ est un demi-twist de Dehn autour d'un arc I d'extrémités a_{2g+1} et a_{2g+2} . D'autre part, puisque S_{2g+1} commute avec S_1, \dots, S_{2g-1} , la difféotopie $\bar{\Psi}(S_{2g+1})$ commute avec $\bar{\Psi}(S_1) = S_1, \dots, \bar{\Psi}(S_{2g-1}) = S_{2g-1}$. On peut donc choisir l'arc I disjoint des arcs I_1, \dots, I_{2g-1} , d'après la remarque 5. Puisque $S^2 - \bigcup_1^{2g-1} I_i$ est homéomorphe à un disque, I est forcément isotope à I_{2g+1} . D'autre part, on vérifie (comme dans la proposition 2), que l'automorphisme non trivial de l'énoncé est extérieur. \square

LEMME 7. — Lorsque $\bar{\Psi} = \text{Identité}$, alors $\psi = \text{Identité}$ ou bien $\psi = \sigma$.

Démonstration. — On a alors $\psi(x) = x$ ou bien $\psi(x) = xh$, pour $x \in N(h)$. Remarquons que $\alpha^k T_1 \alpha^{-k} = T_{k+1}$, où $\alpha = T_1 \dots T_{2g+1}$ et $0 \leq k \leq 2g$. D'où : $\psi(T_{k+1}) = \psi(\alpha)^k \psi(T_1) \psi(\alpha)^{-k} = \alpha^k \psi(T_1) \alpha^{-k}$. Par suite, la donnée de $\psi(T_1)$ détermine entièrement ψ sur $N(h)$. \square

LEMME 8. — Si $\bar{\Psi}(S_i) = S_i^{-1}$ lorsque $1 \leq i \leq 2g + 1$, alors $\psi = \rho$ ou $\psi = \rho\sigma$.

Démonstration. — On applique le lemme 7 à $\rho\psi$. \square

Le lemme 8 termine la démonstration de la proposition. \square

COROLLAIRE 2. — On a $\text{Out } M_2 \approx Z_2 \times Z_2$.

En effet, $M_2 = N(h)$ (cf. [2]). \square

PROPOSITION 3. — Lorsque $g \geq 3$, les automorphismes σ et $\rho\sigma$ ne se prolongent pas à M_g .

Démonstration. — Supposons en effet que σ se prolonge à M_g . Soit T le twist de Dehn suivant la courbe C représentée sur la figure 1. Puisque C et C_1 sont disjointes, on a

$$[T, T_1] = 1, \quad \text{d'où} \quad \sigma([T, T_1]) = [\sigma(T), \sigma(T_1)] = [\sigma(T), hT_1] = 1.$$

On a également

$$[T, T_1^2] = 1, \quad \text{d'où} \quad [\sigma(T), \sigma(T_1^2)] = [\sigma(T), T_1^2] = 1.$$

Ainsi, $\sigma(T)$ commute avec T_1^2 et laisse donc invariant à isotopie près la courbe C_1 , d'après la remarque 4. Par conséquent, $\sigma(T)$ commute avec T_1 et donc avec h . On en déduit que $\sigma(T) \in N(h)$ et donc que $T \in \sigma^{-1}(N(h)) = N(h)$, d'où contradiction.

Comme ρ s'étend évidemment à M_g par conjugaison par la réflexion R , l'automorphisme $\rho\sigma$ ne peut s'étendre à M_g . \square

COROLLAIRE 3. — Lorsque $g \geq 3$, on a $\text{Out } M_g \approx Z_2$.

Démonstration. — D'après ce qui précède et puisque ρ s'étend en un automorphisme non intérieur de M_g , il suffit de voir qu'un automorphisme Φ de M_g fixant $N(h)$ est nécessairement l'identité ou la

conjugaison par h . Or, S. P. Humphries a montré dans [7] que M_g est engendré par $N(h)$ et le twist T . Il suffit donc de voir que $\Phi(T) = T$ ou $\Phi(T) = hTh^{-1}$ dès que Φ fixe $N(h)$.

Supposons donc que Φ fixe $N(h)$. Le twist T étant conjugué à T_4 (en général deux twists de Dehn suivant des courbes non séparantes sont conjugués), $\Phi(T)$ est conjugué à T_4 et est donc un twist suivant une courbe fermée que l'on appellera C' . Puisque T commute avec T_i , on a $i(C', C_i) = 0$ pour $i \neq 4$ (remarque 5). Mais $F_g - \bigcup_{i4} C_i$ est la réunion de deux cylindres, ce qui montre que C' est isotope à C ou à $h(C)$. \square

COROLLAIRE 4. — *Lorsque $g \geq 3$, on a $\text{Out } M_g^* = 1$.*

Démonstration. — On a $[M_g^*, M_g^*] \subset M_g$ et $[M_g, M_g] = M_g$ d'après [11]. Donc $M_g = [M_g^*, M_g^*]$ est un sous-groupe caractéristique de M_g^* , ce dernier étant engendré par T_1, \dots, T_{2g+1}, T et R . Puisque la conjugaison par R est un automorphisme intérieur de M_g^* , tout se réduit à montrer que l'identité est le seul automorphisme de M_g^* qui prolonge l'identité de M_g . Soit donc Φ un prolongement de l'identité de M_g .

Puisque

$$RT_iR^{-1} = T_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq 2g + 1$$

on a

$$\Phi(R)T_i\Phi(R^{-1}) = T_i^{-1}$$

d'où

$$R^{-1}\Phi(R)T_i\Phi(R)^{-1}R = T_i.$$

De même, $RTR^{-1} = T^{-1}$ implique que $R^{-1}\Phi(R)$ commute avec T . Donc $R = \Phi(R)$, puisque le centre de M_g est réduit à l'élément neutre. \square

PROPOSITION 4. — *On a $\text{Out } M_2^* \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$.*

La démonstration de cette proposition est une conséquence des trois lemmes suivants :

LEMME 9. — *L'abélianisé $\overline{M_2^*}$ de M_2^* est isomorphe à $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$; il est engendré par les représentants respectifs $\overline{T_1}$ et \overline{R} de T_1 et de R . En outre, l'image de M_2 dans $\overline{M_2^*}$ est engendrée par $\overline{T_1}$. Enfin, le groupe dérivé M de M_2^* est le sous-groupe formé de tous les produits d'un nombre pair de T_i .*

Démonstration. — On obtient une présentation du groupe M_2^* en ajoutant aux générateurs de M_2 l'élément R lié par les relations :

$$RT_i R^{-1} = T_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq 5) \quad \text{et} \quad R^2 = 1.$$

Cette présentation permet de calculer $\overline{M_2^*}$ et d'exhiber alors les générateurs de M . □

LEMME 10. — *Tout automorphisme Φ de M_2^* induit l'identité sur $\overline{M_2^*}$. En particulier, le sous-groupe M_2 de M_2^* est caractéristique.*

Démonstration. — Soit $\overline{\Phi}$ l'automorphisme induit par Φ sur $\overline{M_2^*}$. On va montrer qu'il existe des éléments Z et B de M_2^* vérifiant

$$A(Z) = A(\Phi(Z)) = \overline{RT_1} \quad \text{et} \quad A(B) = A(\Phi(B)) = \overline{R}$$

où $A : M_2^* \rightarrow \overline{M_2^*}$ est l'application canonique.

Dans [12], on étudie tous les sous-groupes finis de M_2 et on montre qu'il existe des sous-groupes G_1 et G_2 de $\pi_0 \text{Diff}(S^2, A_6)$ respectivement isomorphes à $\mathcal{S}_4 \times Z_2$ et au groupe diédral D_{10} d'ordre 10. Le groupe G_1 (resp. G_2) se réalise comme groupe des symétries d'un octaèdre régulier (resp. d'une pyramide régulière à base pentagonale) dont les sommets sont les points de A_6 . On désigne par z l'application antipodale de S^2 qui se trouve être le générateur du centre de G_1 , et par $b \in G_2$ une symétrie quelconque de la pyramide. Sur A_6 , les T_i induisent des transpositions tandis que les éléments z , b et R induisent respectivement un produit de trois transpositions, un produit de deux transpositions et l'identité. On en déduit que pour tout relevé Z (resp. B) de z (resp. b) dans M_2^* , on a

$$A(Z) = \overline{RT_1} \quad \text{et} \quad A(B) = \overline{R}.$$

On conclut en observant que d'après [12], lorsque $i = 1$ ou 2 , tout sous-groupe de $\pi_0 \text{Diff}(S^2, A_6)$ isomorphe à G_i lui est conjugué. □

LEMME 11. — *L'automorphisme Identité de M_2 admet exactement deux prolongements dans $\text{Out } M_2^*$: le prolongement trivial I et l'automorphisme ψ_0 qui à R associe Rh .*

Démonstration. — Comme dans la démonstration du corollaire 4, on montre que si Φ est un automorphisme de M_2^* prolongeant l'identité de M_2 , on a $\Phi(R) = R$ ou $\Phi(R) = Rh$ et ces deux solutions sont compatibles avec les relations de M_2^* . □

Démonstration de la proposition 4. — Tout d'abord l'automorphisme ψ_0 n'est pas intérieur, car s'il existait $y \in M_g^*$ tel que $yxy^{-1} = \psi_0(x)$ pour tout x de M_g^* , on aurait $yT_iy^{-1} = T_i$, ce qui montrerait que y préserve l'orientation et commute avec M_2 , d'où $y = 1$ ou $y = h$, ce qui contredirait $\psi_0(R) = Rh$.

D'autre part, la conjugaison par R dans M_2^* est un automorphisme intérieur de M_2^* . En prolongeant les éléments de $\text{Out } M_2$ à M_2^* , on trouve donc

$$\text{Out } M_2^* = \{I, \psi_0, \psi_1, \psi_0\psi_1\}$$

où $\psi_1(R) = R$ et $\psi_1(T_i) = T_ih$ pour $1 \leq i \leq 5$. □

3. Le cas des surfaces pointées.

On désigne par $M_{g,1}^*$ (resp. $M_{g,1}$) le groupe des difféotopies (resp. difféotopies orientées) de la surface $(F_g, *)$ où $*$ est le point-base de F_g .

THÉORÈME II. — Lorsque $g \geq 2$, on a :

$$\text{Out } M_{g,1} \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_{g,1}^* = 1.$$

Démonstration. — Soit h une involution hyperelliptique de $M_{g,1}$. D'après [9], le groupe $M_{g,1}$ est engendré par T, T_1, \dots, T_{2g} . Si l'on suppose que $*$ = $\pi^{-1}(a_{2g+2})$, alors $N(h)$ est engendré par T_1, \dots, T_{2g} . En considérant la suite exacte

$$1 \rightarrow \{1, h\} \rightarrow N(h) \rightarrow \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+1}, a_{2g+2}) \rightarrow 1,$$

on obtient encore que $\text{Out } N(h) \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, par application du théorème de Dyer et Grossmann. Ensuite, on montre comme dans le cas non pointé, que

$$\text{lorsque } g \geq 2, \quad \text{Out } M_{g,1} \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_{g,1}^* = 1,$$

le genre 2 n'apparaissant plus comme un cas particulier. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN, Braids and Permutations, *Annals of Math.*, 48 (1947), 643-649.
- [2] J. BIRMAN and H. HILDEN, On the mapping class group of closed surfaces as covering spaces, *Annals of Math. Studies*, 66 (1971), 81-115.

- [3] J. DYER and E. GROSSMAN, Automorphisms groups of braids groups, *Amer. J. of Math.*, 103 (1981), 1151-1169.
- [4] H. M. FARKAS, Automorphisms of compact Riemann surfaces, *Annals of Math. Studies*, 97 (1974), 121-144.
- [5] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POÉNARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque*, 66-67 (1979).
- [6] W. J. HARVEY, Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface, *Quart. J. Math.*, 17 (1966), 86-97.
- [7] S. P. HUMPHRIES, Generators for the mapping class group, *Topology of low dimensional manifolds, Lecture Notes in Math.*, 722 (1979), 44-47.
- [8] N. V. IVANOV, Algebraic properties of the Teichmüller modular group, *Soviet Math., Dokl.*, 29 (1984), 288-291.
- [9] D. JOHNSON, The structure of the Torelli group I: a finite set of generators for I. Preprint (1980).
- [10] J. McCARTHY, Automorphisms of surface mapping class groups. Manuscrit (1984).
- [11] J. POWELL, Two theorems on the mapping class group of a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68 (1978), 347-350.
- [12] T. R. TCHANGANG, Groupe de Torelli et Stratification de l'espace de Teichmüller d'une surface de genre deux. Thèse, Strasbourg, 1985.
- [13] H. ZIESCHANG, Finite groups of mapping classes of surfaces, *Lecture Notes in Math.*, 875 (1981), V.

Manuscrit reçu le 26 novembre 1985
révisé le 21 avril 1986.

Roger Tambekou TCHANGANG,
Institut de Mathématique
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).