

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIAN MAUDUIT

Automates finis et ensembles normaux

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 2 (1986), p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AUTOMATES FINIS ET ENSEMBLES NORMAUX

par Christian MAUDUIT

1. Introduction.

Rappelons que l'on appelle ensemble normal associé à une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des nombres réels ξ tels que la suite $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ soit équirépartie modulo un.

Le but de cette étude est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite d'entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ reconnaissable par un automate fini soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (la définition précise de la reconnaissabilité sera rappelée ultérieurement).

D'après le théorème de Weyl (cf [15] ou [20]) le problème revient à étudier le comportement de la somme $\sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi)$ et de déterminer à quelles conditions on a, pour tout ξ irrationnel $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e(u_n \cdot \xi) = 0$ (en posant $e(x) = e^{2inx}$).

Résultats antérieurs. — En 1980, Kamae, dans un article non publié (cf [7]), avait donné une ébauche de démonstration dans le cas particulier où $u_n \in O(n)$ (par exemple pour la suite de Morse (cf exemple 2)).

— En 1983, Coquet a obtenu un résultat permettant de conclure pour certaines suites telles que $u_n \notin O(n)$ (cf. [9]). C'est le cas de la suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$ des entiers dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 (cf. exemple 3).

Mais aucune de ces deux méthodes ne s'applique, par exemple, au cas de la suite de Baum-Sweet (cf. exemple 4) qui vérifie $u_n \in O(n^{\log_3 2})$ avec

$\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et dont on peut montrer par ailleurs que l'ensemble normal est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Mots-clés : Équirépartition modulo 1 - Automate fini - Ensemble normal - Nombre cyclomatique - Produit infini de matrices

Résultat obtenu. — Le théorème que nous donnons permet de conclure dans le cadre le plus général, en montrant qu'il suffit que la suite u n'ait pas une croissance de type exponentiel. En fait, cette condition s'exprime très aisément sur le graphe associé à l'automate en disant qu'il suffit qu'au moins un des sommets qui reconnaît la suite u soit précédé dans le graphe par un sommet possédant au moins deux circuits fermés distincts.

Ces résultats avaient été annoncés en 1984 dans une note aux C.R.A.S. (cf [17]). Par ailleurs, nous établissons (théorèmes 2 et 3) que ces conditions sont nécessaires.

2. Notations et définitions.

Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $[r]$ l'alphabet $\{0,1,\dots,r-1\}$ et par $[r]^K$ l'ensemble des mots de longueur $K \geq 1$,

$$[r]^0 = \{\emptyset\},$$

$$[r]^* = \bigcup_{K=0}^{+\infty} [r]^K.$$

Un r -automate \mathcal{A} est la donnée d'un quintuplet $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ avec :

- i) A alphabet $A = \{a, b, c, \dots\}$,
- ii) Ξ alphabet,
- iii) a point initial de A ,
- iv) φ application $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$,
- v) τ application $\tau : A \rightarrow \Xi$.

Pour tout (x, s) dans $A \times [r]$ on pose $\varphi(x, s) = s(x)$ ou plus simplement $x.s$. On prolonge alors $\varphi : A \times [r] \rightarrow A$ en une application, encore notée φ , $\varphi : A \times [r]^* \rightarrow A$.

Si n est un entier positif dont la représentation en base r est $\varepsilon_g \varepsilon_{g-1} \dots \varepsilon_0$, on pose pour tout x dans A

$$\begin{aligned} \varphi(x, n) &= x.n \\ &= x.\varepsilon_g \varepsilon_{g-1} \dots \varepsilon_0 \end{aligned}$$

(à $n=0$ on associe le mot vide, avec $\varphi(x, \emptyset) = x$).

Ainsi, lorsque n parcourt \mathbb{N} , $a.n$ décrit une suite infinie d'éléments dans A et $\tau(a.n)$ décrit une suite infinie d'éléments dans Ξ .

DÉFINITIONS FONDAMENTALES. — 1) On dit qu'une suite $t \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ est r -reconnaissable s'il existe un r -automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ tel que :

$$t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\tau(a.n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

2) On dit qu'une suite d'entiers $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ est r -reconnaissable si sa fonction indicatrice $t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est r -reconnaissable.

D'autre part, notons G le graphe associé à l'automate \mathcal{A} et M la matrice associée au graphe G :

$$M = (M_{ij})_{(i,j) \in A^2} \quad \text{avec} \quad M_{ij} = \text{card} \{s \in [r]; i.s = j\}.$$

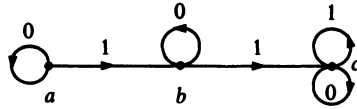
Si S désigne la matrice de l'action \xrightarrow{s} pour s dans $[r]$, on pose pour tout ξ dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \sum_{s=0}^{r-1} e(s\xi) \cdot S \\ &= (M_{ij}(\xi))_{(i,j) \in A^2}. \end{aligned}$$

Pour tout n dans \mathbb{N} , on note $M^{(n)}(\xi) = M(r^{n-1}\xi) \dots M(r\xi)M(\xi)$. On a alors $M^{(n)}(0) = M^n(0) = M^n$.

De plus on remarque que, pour tout entier $g \geq 1$ la suite t est r^g -reconnaissable par l'automate $\mathcal{A}_g = (A, \Xi, a, \varphi_g, \tau)$ où φ_g est l'application associée à la matrice $M^{(g)}(\xi)$.

Exemple 1. — La suite $1 < 2 < 4 < 8 < 16 < \dots$ des puissances de 2 est reconnaissable par l'automate :



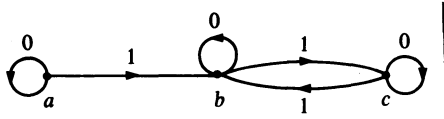
$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01101000100\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}$$

Exemple 2. — La suite $1 < 2 < 4 < 7 < 8 < \dots$ des entiers dont la somme des chiffres en base 2 est impaire (suite de Morse) est

reconnaisable par l'automate :

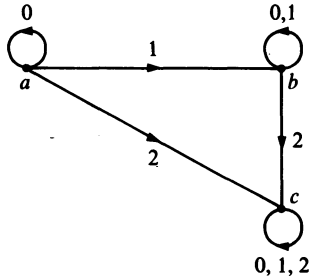


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01101001100\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 \\ 0 & 1 & e(\xi) \\ 0 & e(\xi) & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 3. — La suite $1 < 3 < 4 < 9 < 10 < \dots$ des entiers non nuls dont l'écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 2 est reconnaissable par l'automate :

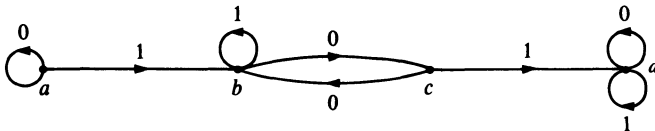


$$\tau(a) = \tau(c) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01011000011\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 1+e(\xi) & e(2\xi) \\ 0 & 0 & 1+e(\xi)+e(2\xi) \end{bmatrix}.$$

Exemple 4. — La suite $1 < 3 < 4 < 7 < 9 < \dots$ des entiers dont la représentation binaire ne contient aucune plage de 0 de longueur impaire (suite de Baum-Sweet) est reconnaissable par l'automate :



$$\tau(a) = \tau(c) = \tau(d) = 0, \quad \tau(b) = 1, \quad t = (01011001010\dots)$$

et on a

$$M(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & e(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & e(\xi) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & 1+e(\xi) \end{bmatrix}.$$

Soit ℓ un sommet de G .

$G[\ell]$ est la restriction du graphe G à l'ensemble des sommets k tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M_{k\ell}^n > 0$ (c'est-à-dire à l'ensemble des états à partir desquels on peut rejoindre l'état ℓ).

On dira que le sommet i de G précède (au sens large) le sommet j de G s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_{ij}^n > 0$.

On note $M(G[\ell])$ la matrice associée au graphe $G[\ell]$.

a étant l'état initial de l'automate \mathcal{A} , on définit l'application v :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow A \\ n &\mapsto v(n) = \varphi(a, n) = a.n \end{aligned}$$

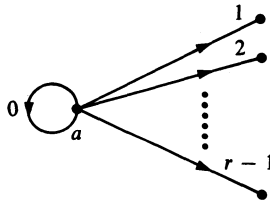
et on note, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} e(n, \xi) \\ V(x, \ell) &= V(x, \ell, 0) = \sum_{\substack{n < x \\ v(n) = \ell}} 1. \end{aligned}$$

On a choisi l'automate de façon à ce que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad V(x, a, \xi) = 1$$

ce qui est toujours possible, quitte à rajouter un nouvel état initial à l'alphabet A :



Par ailleurs, si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions définies et positives pour $x > x_0$, la notation $f \approx g$ ou $f(x) \approx g(x)$ signifiera qu'il existe des

réels α et α' tels que pour tout x assez grand

$$0 < \alpha \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \alpha'.$$

N.B. : Les définitions spécifiques aux automates se trouvent dans [6] et [12], celles spécifiques aux graphes se trouvent dans [2] et [14].

Rappelons que l'on peut définir sur le graphe G la relation d'équivalence de forte connexité entre les sommets :

$\ell \sim \ell'$ s'il existe dans G un chemin allant de ℓ vers ℓ' et un chemin allant de ℓ' vers ℓ .

On note G/\sim le graphe quotient ainsi obtenu et $\tilde{\ell}$ la classe d'équivalence modulo \sim du sommet ℓ de G .

G/\sim est un graphe sans boucle. On peut donc définir sur G/\sim une numérotation v des sommets, avec $v(\tilde{a}) = 0$:

$$v: G/\sim \rightarrow \mathbb{N}.$$

On peut alors prolonger v en une application de G dans \mathbb{N} , encore notée v , en posant pour $\ell \in G$:

$$v(\ell) = v(\tilde{\ell}).$$

Ceci nous permet de définir un préordre sur G :

$$\begin{aligned} k \leq \ell & \text{ si } k \text{ précède } \ell \text{ dans } G \\ k < \ell & \text{ si } k \leq \ell \text{ et } v(k) < v(\ell). \end{aligned}$$

Si Γ est un sous-graphe de G , on notera $\gamma(\Gamma)$ son nombre cyclomatique (c'est-à-dire le nombre d'arcs de Γ , plus le nombre de composantes connexes de Γ , moins le nombre de sommets de Γ .)

$\tilde{\ell}$ étant considérée comme un sous-graphe de G , on note $M[\tilde{\ell}](\xi)$ la matrice extraite de la matrice $M(\xi)$ obtenue par restriction à $\tilde{\ell}$ du graphe G .

DÉFINITION 1. —

- $\tilde{\ell}$ est de type 0 si $\gamma(\tilde{\ell}) = 0$,
- $\tilde{\ell}$ est de type 1 si $\gamma(\tilde{\ell}) = 1$,
- $\tilde{\ell}$ est de type 2 si $\gamma(\tilde{\ell}) \geq 2$,

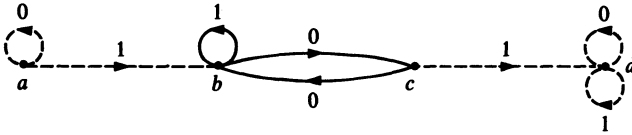
où γ désigne le nombre cyclomatique.

ℓ sera de type i lorsque $\tilde{\ell}$ est de type i ($i \in \{0,1,2\}$).

DÉFINITION 2. — Le poids de ℓ est égal au maximum des types des sommets de G précédant le sommet ℓ . On le note $\pi(\ell)$,

$$\begin{aligned} \pi : G &\rightarrow \{0,1,2\} \\ \ell &\mapsto \pi(\ell). \end{aligned}$$

Exemple 5. — Dans le cas de la suite de Baum-Sweet, \vec{b} est représenté en trait plein :



par conséquent $M[\vec{b}](\xi) = \begin{bmatrix} e(\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\gamma(\vec{b}) = 2, \pi(\vec{b}) = 2$.

3. Étude asymptotique des sommes de Weyl.

Préliminaire. — Calcul de $V(x, \ell, \xi)$.

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{n < x \\ \nu(n) = \ell}} e(n\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x-s}{r} \\ \nu(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) \\ &= \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ \nu(nr+s) = \ell}} e((nr+s)\xi) + B(x, \ell, \xi) \end{aligned}$$

avec $|B(x, \ell, \xi)| \leq r - 1$.

Remarquons maintenant que si l'on pose $S = (S_{ij})_{(i,j) \in A^2}$

$$\sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ \nu(nr+s) = \ell}} e(nr\xi) = \sum_{k \in A} S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ \nu(n) = k}} e(nr\xi)$$

et par conséquent

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k \in A} e(s\xi) S_{k\ell} \sum_{\substack{n < \frac{x}{r} \\ \nu(n) = k}} e(nr\xi) + B(x, \ell, \xi)$$

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_{k\ell}(\xi) V\left(\frac{x}{r}, k, r\xi\right) + B(x, \ell, \xi).$$

On en déduit par récurrence, que pour tout entier $N \geq 1$, on a :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_{k\ell}^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi)$$

avec $|B_N(x, \ell, \xi)| \leq r^N - 1$.

LEMME 1. — Pour tout sommet ℓ de G , il existe (β, θ) dans $\mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que $V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$.

Démonstration. —

Étape 1 : Montrons ce lemme pour la suite $x_n = r^n$. $V(r^n, \ell)$ est égal au nombre de chemins de longueur n joignant le sommet a au sommet ℓ dans le graphe $G[\ell]$, c'est-à-dire au coefficient d'indice (a, ℓ) de la matrice $M(G[\ell])^n$.

Pour estimer ce coefficient, mettons $M(G[\ell])$ sous la forme de Jordan :

$$M(G[\ell]) = P(D + N)P^{-1}$$

avec D diagonale, N nilpotente et où D et N commutent. Ainsi

$$\begin{aligned} V(r^n, \ell) &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} PD^{n-i} N^i P^{-1} \right)_{a\ell} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda i} \lambda^{n-i} \end{aligned}$$

où Λ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(G[\ell])$.

Soit λ_0 une valeur propre de module maximum telle que les coefficients $C_{\lambda_0 i}$ ne soient pas tous nuls.

$|\lambda_0| \geq 1$ et les éléments de Λ de module $|\lambda_0|$ sont de la forme $\lambda = \lambda_0 e(v)$ avec $v \in \mathbb{Q}$ (cf [23]).

Si nous notons q le dénominateur commun de tous ces nombres rationnels, nous obtenons (si $\beta \in \mathbb{N}$ désigne l'indice maximum tel que $C_{\lambda_0 \beta} \neq 0$) :

$$V(r^n, \ell) = \binom{n}{\beta} \lambda_0^{n-\beta} \sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{nj}{q}\right) + W(r^n, \ell)$$

avec $W(r^n, \ell) \in O(n^\beta |\lambda_0|^n)$ et où les H_j ne sont pas tous nuls. Choisissons

maintenant d , $d \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ tel que $\sum_{j=0}^{q-1} H_j e\left(\frac{dj}{q}\right) \neq 0$. Pour un tel d , on a :

$$\begin{aligned} V(r^{qn+d}, \ell) &\approx n^\beta |\lambda_0|^n \\ &\approx (\log r^{qn+d})^\beta r^{(qn+d)\theta} \end{aligned}$$

où $\theta = \frac{\log |\lambda_0|}{\log r} \in [0, 1]$ puisque $M(G[\ell])$ est extraite de la matrice M , dont le rayon spectral est égal à r .

Étape 2 : Pour tout x assez grand, il existe un entier m tel que (avec les notations de l'étape 1) :

$$r^{mq+d} \leq x < r^{(m+1)q+d}.$$

Ainsi pour x assez grand, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\geq V(r^{mq+d}, \ell) \\ &\geq \alpha (\log r^{mq+d})^\beta r^{(mq+d)\theta} \\ &\geq \alpha (\log r^{-q}x)^\beta (r^{-q}x)^\theta \\ &\geq \frac{\alpha}{2^\beta r^{\theta q}} (\log x)^\beta x^\theta \end{aligned}$$

et il existe $\alpha' > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} V(x, \ell) &\leq V(r^{(m+1)q+d}, \ell) \\ &\leq \alpha' (\log r^{(m+1)q+d})^\beta r^{((m+1)q+d)\theta} \\ &\leq \alpha' (\log r^q x)^\beta (r^q x)^\theta \\ &\leq \alpha' 2^\beta r^{\theta q} (\log x)^\beta x^\theta \end{aligned}$$

d'où $V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta$.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Si $\rho(\tilde{\mathcal{Z}})$ est le rayon spectral de la matrice $M[\tilde{\mathcal{Z}}](0)$, alors $\rho(\tilde{\mathcal{Z}}) \leq r^\theta$. En effet si $N_n(\ell_1, \ell_2)$ désigne le nombre de chemins de longueur n reliant le sommet $\ell_1 \in \tilde{\mathcal{Z}}$ au sommet $\ell_2 \in \tilde{\mathcal{Z}}$, on démontrerait comme précédemment que

$$N_n(\ell_1, \ell_2) \in O(n^\beta r^{\theta n}).$$

Or $N_n = \sum_{\ell_1 \in \tilde{\mathcal{Z}}} \sum_{\ell_2 \in \tilde{\mathcal{Z}}} N_n(\ell_1, \ell_2)$, qui désigne le nombre de chemins de longueur n dans le graphe fortement connexe $\tilde{\mathcal{Z}}$, correspond à la valeur d'une norme matricielle en $M[\tilde{\mathcal{Z}}](0)^n$:

$$N_n = \|M[\tilde{\mathcal{Z}}](0)^n\|.$$

Cette norme étant équivalente à la norme spectrale, on en déduit, en posant $\rho = \rho(\ell)$ que

$$N_n \approx \rho^n$$

(cf [23], p. 65).

Donc $\rho^n \in O(n^{\beta, \theta^n})$ et par suite $\rho \leq r^{\theta}$.

2) Le lemme 1 donne en particulier des conditions nécessaires pour qu'une suite soit reconnaissable par un automate fini.

En effet, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est reconnaissable, il existe (β, θ) dans $\mathbb{N} \times [0, 1]$ tel que

$$V(x) = \sum_{u_n < x} 1 = \sum_{\pi(\ell)=1} V(x, \ell) \approx (\log x)^{\beta} x^{\theta}.$$

On retrouve ainsi un résultat de A. Cobham (cf. [83]).

Exemple 6. — Les suites $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(a^{(n^b)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier ne sont pas reconnaissables par un automate fini. (Pour le dernier exemple, rappelons que $V(x) \approx \frac{x}{\log x}$).

LEMME 2 (avec les notations du lemme 1). —

— Si ℓ est de poids 1, alors $\theta = 0$.

— Si ℓ est de poids 2, alors $\theta \in]0, 1]$.

Démonstration. —

Premier cas : $\pi(\ell) = 1$; on pose $v(\ell) = v$.

$G[\ell]$ est un graphe comprenant au plus $(v+1)$ composantes fortement connexes, de type 0 ou 1 (simples sommets ou boucles).

Par conséquent

$$M(G[\ell]) = \begin{bmatrix} M_0 & \times & \dots & \times \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \times \\ 0 & \dots & 0 & M_v \end{bmatrix}$$

avec pour tout $i \in \{0, \dots, v\}$ M_i matrice associée à une composante fortement connexe de type 0 ou 1.

En particulier, on a soit $M_i = 0$ soit $M_i^{g_i} = I_{g_i}$ ($g_i \neq 0$ désignant la longueur de la $i^{\text{ème}}$ boucle).

Ainsi, si $g = \text{p.p.c.m. } g_i$ on a $M(G[\ell])^g = D + N$ avec N nilpotente et D diagonale formée uniquement de 0 et de 1.

Donc $|\lambda_0| = 1$ dans le lemme 1 et $\theta = 0$.

Second cas : $\pi(\ell) = 2$.

Soit k un sommet de type 2 précédant ℓ .

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $V(r^p, k) \geq 1$.

Soit $p' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(r^{n+p'}, \ell) \geq V(r^n, k)$ (par exemple $p' = |\text{longueur du plus court chemin reliant } k \text{ à } \ell \text{ dans } G|$). k étant de type 2, il existe au moins 2 chemins distincts (de longueurs f_1 et f_2) joignant k à k .

Posons $f = f_1 f_2$.

On a alors pour tout entier n :

$$V(r^{p+nf}, k) \geq 2^n V(r^p, k).$$

Or $\forall m \in \mathbb{N}, \exists ! n \in \mathbb{N}, p + p' + nf \leq m < p + p' + (n+1)f$.

Pour ce couple (m, n) on a $V(r^m, \ell) \geq 2^n$ et

$$\frac{\log V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{n \log 2}{m} \geq \frac{m - p - p' - f}{mf} \log 2$$

d'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log V(r^m, \ell)}{m} \geq \frac{\log 2}{f} > 0$$

ce qui implique $\theta > 0$ dans le lemme 1.

C.Q.F.D.

Remarque. — $\frac{1}{r}$. M étant une matrice stochastique, on en déduit que la CNS pour que $\theta = 1$ est que ℓ soit un état récurrent de l'automate (cf. [13], p. 19). En particulier, si $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ est la suite d'entiers que l'on étudie, la CNS pour que $u_n \in O(n)$ est que l'un au moins des états qui reconnaît $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit récurrent.

LEMME 3 (avec les notations du lemme 1). — Soient ℓ et ℓ' deux sommets de G . Si $\ell \sim \ell'$ alors $\beta(\ell) = \beta(\ell')$ et $\theta(\ell) = \theta(\ell')$.

Démonstration. — Puisque $\ell \sim \ell'$, il existe un chemin de longueur p (resp. p') reliant ℓ à ℓ' (resp. ℓ' à ℓ).

Il existe donc des réels $\alpha(\ell)$, $\alpha'(\ell)$, $\alpha(\ell')$, $\alpha'(\ell')$ tels que pour n assez grand

$$0 \leq \alpha(\ell) n^{\beta(\ell)} r^{n\theta(\ell)} \leq V(r^n, \ell) \leq V(r^{n+p}, \ell') \leq \alpha'(\ell')(n+p)^{\beta(\ell')} r^{(n+p)\theta(\ell')}$$

$$0 \leq \alpha(\ell') n^{\beta(\ell')} r^{n\theta(\ell')} \leq V(r^n, \ell') \leq V(r^{n+p'}, \ell) \leq \alpha(\ell)(n+p)^{\beta(\ell)} r^{(n+p)\theta(\ell)}.$$

D'où en faisant tendre n vers l'infini $\theta(\ell) = \theta(\ell')$ puis $\beta(\ell) = \beta(\ell')$.
C.Q.F.D.

Remarque. — De la même façon on démontre que, si $\ell \leq \ell'$ alors $\theta(\ell) \leq \theta(\ell')$, et si de plus $\theta(\ell) = \theta(\ell')$, alors $\beta(\ell) \leq \beta(\ell')$.

THÉORÈME 1. — Soit ℓ un sommet de G de poids 2.

Alors pour tout ξ irrationnel, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{V(x, \ell)} = 0.$$

Démonstration. — Nous allons démontrer ce théorème par récurrence sur $v(\ell) \in \mathbf{N}^*$.

Étape 1 : $v(\ell) = 1$.

D'après le calcul préliminaire, on a pour tout entier N :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{k \in A} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B_N(x, \ell, \xi)$$

$$= \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + B'_N(x, \ell, \xi)$$

avec $|B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1)$.

Considérons maintenant (β, θ) tel que pour tout sommet k de \mathcal{Z} , $V(x, k) \approx (\log x)^\beta x^\theta$ (cf lemmes 1 et 3) et posons

$$W(x, k, \xi) = \frac{V(x, k, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

$$W(x, k) = W(x, k, 0).$$

On obtient, pour tout entier N :

$$W(x, \ell, \xi) = \left(\frac{\log \frac{x}{r^N}}{\log x} \right)^\beta \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \frac{M_k^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} W\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) + \frac{B'_N(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}.$$

Soit α tel que pour x assez grand

$$\sup_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} W\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq \alpha.$$

Alors, pour tout entier N et pour x assez grand :

$$|W(x, \ell, \xi)| \leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} \left| \frac{M_k^{(N)}(\xi)}{r^{N\theta}} \right| + \frac{2r^N}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

d'où, en posant $W(\ell, \xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |W(x, \ell, \xi)|$,

$$A(\xi) = \frac{M[\mathcal{L}](\xi)}{r^\theta},$$

et pour tout entier n

$$A^{(n)}(\xi) = A(\xi)A(r\xi) \cdots A(r^{n-1}\xi).$$

Pour tout entier N :

$$\begin{aligned} w(\ell, \xi) &\leq \alpha \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} |A_k^{(N)}(\xi)| \\ &\leq \alpha \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer que si $\pi(\ell) = 2$ et $\xi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ $\lim_{N \rightarrow \infty} A^{(N)}(\xi) = 0$, ce qui nous permettra d'achever notre démonstration pour le cas $v(\ell) = 1$.

Pour tout x réel, posons :

$$\begin{aligned} A(x) &= (a_{ij}(x))_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \\ A^{(n)}(x) &= (a_{ij}^{(n)}(x))_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \end{aligned}$$

avec, comme d'habitude :

$$a_{ij}(0) = a_{ij} \quad \text{et} \quad a_{ij}^{(n)}(0) = a_{ij}^{(n)}.$$

Comme $\gamma(\mathcal{Z}) \geq 2$, il existe au moins deux circuits fermés sur le sommet ℓ . Soit g le p.p.c.m. des longueurs de ces boucles. Quitte à travailler sur le r^g -automate \mathcal{A}_g , on peut supposer que $g = 1$.

On a donc

$$M_{\ell\ell}(\xi) = e(p_1\xi) + \dots + e(p_t\xi)$$

avec $t \geq 2$, $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ $p_i \in \mathbb{N}$ et $p_1 \neq p_2$.

ξ étant irrationnel, il existe alors un δ dans $]0,1[$ et une suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers tels que :

$$|e(p_1 \cdot r^{N_k} \cdot \xi) + \dots + e(p_t \cdot r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1-\delta)t$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < |a_{\ell\ell}(r^{N_k} \cdot \xi)| \leq (1-\delta)a_{\ell\ell}.$$

Pour tout sommet i de \mathcal{Z} il existe un chemin de longueur $\zeta(i)$ allant de ℓ à i et un chemin de longueur $\eta(i)$ allant de i à ℓ .

Ainsi, quitte à rajouter à ces chemins des boucles (de longueur 1) sur le sommet ℓ , il existe (ζ, η) indépendant de i tel qu'il existe :

- un chemin de longueur ζ allant de ℓ à i ,
- un chemin de longueur η allant de i à ℓ .

Posons $\kappa = \zeta + \eta + 1$. On a, pour tout entier k et pour tout (i,j) dans \mathcal{Z}^2 :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi}) &= [A^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})A(r^{N_k\xi})A^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi})]_{ij} \\ &= a_{i\ell}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})a_{\ell\ell}(r^{N_k\xi})a_{ij}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi}) \\ &\quad + \sum_{(\lambda, \mu) \neq (\ell, \ell)} a_{i\lambda}^{(\eta)}(r^{N_k - \eta\xi})a_{\lambda\mu}(r^{N_k\xi})a_{\mu j}^{(\zeta)}(r^{N_k + 1\xi}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \quad |a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \delta a_{i\ell}^{(\eta)} a_{\ell\ell} a_{ij}^{(\zeta)},$$

$$\text{or} \quad r^0 a_{i\ell} \geq 1, \quad r^{\eta 0} a_{i\ell}^{(\eta)} \geq 1, \quad r^{\zeta 0} a_{ij}^{(\zeta)} \geq 1,$$

et par conséquent

$$|a_{ij}^{(\kappa)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq a_{ij}^{(\kappa)} - \frac{\delta}{r^{\kappa 0}} \leq C \cdot a_{ij}^{(\kappa)}$$

où $C \in]0,1[$.

On en déduit, par récurrence sur n , qu'il existe un entier strictement positif κ et qu'il existe C dans $]0,1[$ tels que pour tout $n \geq \kappa$ et pour tout (i,j) dans \mathcal{Z}^2 , on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_{ij}^{(n)}(r^{N_k - \eta\xi})| \leq C \cdot a_{ij}^{(n)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que pour tout entier k , on a

$$\begin{aligned} N_{k+1} - N_k &\geq \kappa. \\ N_0 &\geq \eta. \end{aligned}$$

On a alors pour tout (i, j) dans \mathcal{I}^2 et pour tout entier k :

$$\begin{aligned} |a_{ij}^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})| &\leq \sum_{\substack{i_1 \in \mathcal{I} \\ \vdots \\ i_{k-1} \in \mathcal{I}}} |a_{ii_1}^{(N_1 - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})| \dots |a_{i_{k-1}j}^{(N_k - N_{k-1})}(r^{N_{k-1} - \eta\xi})| \\ &\leq C^k \cdot a_{ij}^{(N_k - N_0)}. \end{aligned}$$

D'après la remarque 1 du lemme 1, $A(0)$ est une matrice irréductible de rayon spectral inférieur à 1, et par conséquent il existe $a > 0$ tel que pour tout entier n , $\|A^n(0)\|_\infty \leq a$.

D'autre part, on vient de voir que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N} / \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Donc pour $N \geq N_k - \eta$,

$$A^{(N)}(\xi) = A^{(N_0 - \eta)}(\xi) A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi}) A^{(N - N_k + \eta)}(\xi) \dots A^{(N - N_k + \eta)}(\xi)$$

et

$$\begin{aligned} \|A^{(N)}(\xi)\|_\infty &\leq \|A^{(N_0 - \eta)}(0)\|_\infty \|A^{(N_k - N_0)}(r^{N_0 - \eta\xi})\|_\infty \|A^{(N - N_k + \eta)}(0)\|_\infty \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Étape 2 : Supposons le théorème démontré pour tout sommet k tel que $v(k) < v$ et donnons-nous un sommet ℓ tel que $v(\ell) = v$:

$$V(x, \ell) \approx (\log x)^\beta x^\theta \quad \text{avec} \quad (\beta, \theta) \in \mathbb{N} \times]0, 1].$$

On a pour tout entier N :

$$\begin{aligned} V(x, \ell, \xi) &= \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k)=1}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in A \\ k < \ell \\ \pi(k)=2}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \\ &+ B'_N(x, \ell, \xi), \quad \text{avec} \quad |B'_N(x, \ell, \xi)| \leq 2(r^N - 1). \end{aligned}$$

Or, on remarque que :

– si $k < \ell$ et $\pi(k) = 1$

$$\left| V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \right| \leq V\left(\frac{x}{r^N}, k\right) \leq V(x, k) \in o((\log x)^\beta x^\theta)$$

car d'après le lemme 2, $\theta(k) = 0$,

– si $k < \ell$ et $\pi(k) = 2$,

alors, par hypothèse de récurrence,

$$V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \in o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}).$$

Mais d'après la remarque du lemme 3, on a

$$o((\log x)^{\beta(k)} x^{\theta(k)}) \subset o((\log x)^\beta x^\theta).$$

D'où pour tout entier N :

$$V(x, \ell, \xi) = \sum_{\substack{k \in A \\ k \sim \ell}} M_k^{(N)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^N}, k, r^N \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^\beta x^\theta).$$

Si $\gamma(\ell) \geq 2$, on procède comme pour l'étape 1.

Si $\gamma(\ell) = 1$, soit g la longueur de la boucle sur le sommet ℓ

$$V(x, \ell, \xi) = M_{\ell'}^{(g)}(\xi) V\left(\frac{x}{r^g}, \ell, r^g \xi\right) \quad \text{mod } o((\log x)^\beta x^\theta).$$

On a donc

$$\left| \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta} \right| \leq \frac{\left| V\left(\frac{x}{r^g}, \ell, r^g \xi\right) \right|}{\left(\log \frac{x}{r^g} \right)^\beta \left(\frac{x}{r^g} \right)^\theta} \left(\frac{\log \frac{x}{r^g}}{\log x} \right)^\beta \frac{1}{r^{\theta g}} \quad \text{mod } o(1)$$

et par conséquent, en posant

$$w(\ell, \xi) = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{V(x, \ell, \xi)}{(\log x)^\beta x^\theta}$$

on obtient $w(\ell, \xi) \leq \frac{w(\ell, \xi)}{r^{\theta g}}$ d'où $w(\ell, \xi) = 0$ puisque $\theta > 0$.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1) Si $x \in \mathbf{Q}$, la suite $(u_n \cdot x)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est évidemment pas équirépartie modulo un.

2) Si $\text{Card} \{ \ell; \tau(\ell) = 1 \} > 1$ (c'est-à-dire si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est reconnue par plusieurs états de \mathcal{A}) alors l'étude précédente nous montre que si

$$L = \{ \ell; \tau(\ell) = 1, \pi(\ell) = 2 \}, \quad \theta = \sup_{\ell \in L} \theta(\ell) \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{\substack{\ell \in L \\ \theta(\ell) = \theta}} \beta(\ell)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell, \xi)}{\sum_{\tau(\ell)=1} V(x, \ell)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\ell \in L} V(x, \ell, \xi)}{x^\theta (\log x)^\beta} = 0.$$

On en déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Pour que l'ensemble normal associé à la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ reconnaissable par l'automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ soit exactement $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, il suffit qu'il existe ℓ dans A tel que $\tau(\ell) = 1$ et $\pi(\ell) = 2$.*

Exemple 7. — Les suites de Morse et de Baum-Sweet ont pour ensemble normal $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

4. Théorème réciproque.

Nous allons maintenant démontrer que cette condition est en fait nécessaire, ce qui nous permettra d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ reconnaissable par l'automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ soit exactement $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est qu'il existe ℓ dans A tel que $\tau(\ell) = 1$ et $\pi(\ell) = 2$.*

Ce théorème va découler des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite reconnaissable par un r -automate $\mathcal{A} = (A, \Xi, a, \varphi, \tau)$ telle que*

$$(\forall \ell \in A), \quad (\tau(\ell) = 1 \Rightarrow \pi(\ell) < 2)$$

alors u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p $p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme

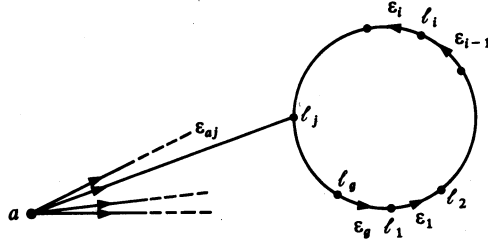
$$\{ q_1^p r^{(N_1 g_1^p + \dots + N_v g_v^p + v - 1)} + \dots + q_v^p r^{N_v g_v^p} + q_{v+1}, \quad (N_1, \dots, N_v) \in \mathbf{N}^v \}$$

où $v \in \mathbf{N}^$, $(g_1^p, \dots, g_v^p) \in \mathbf{N}^v$ et $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbf{Q}^{v+1}$.*

Démonstration. — Nous allons démontrer cette proposition par récurrence sur $v = \sup_{\tau(\ell)=1} v(\ell)$.

Étape 1 : $v = 1$.

On a donc à examiner le cas d'une boucle (ℓ_1, \dots, ℓ_g) du type suivant :



Posons

$$I = \{i \in \{1, \dots, g\}; \tau(\ell_i) = 1\}$$

et

$$J = \{j \in \{1, \dots, g\}; M_{a, j} \neq 0\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des j tels qu'existe une relation du type

$$a \xrightarrow{\varepsilon_{aj}} \ell_j.$$

Les mots qui nous permettent de passer de l'état a à un état ℓ_i , $i \in I$ sont les suivants (les indices étant définis modulo g) :

$$\{\varepsilon_{aj} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{i-1} \overbrace{\varepsilon_i \dots \varepsilon_{i-1}}^{N_1 \text{ fois}}, N_1 \in \mathbb{N}, (i, j) \in I \times J\}.$$

Posons maintenant pour tout $(i, j) \in I \times J$:

$$\begin{aligned} t_i &= r^{g-1} \varepsilon_i + \dots + \varepsilon_{i-1} \\ d = d(i, j) &= i - j \quad \text{si } j \leq i \\ &= g - (j - i) \quad \text{si } j > i \\ s_{i, j} &= r^d \varepsilon_{aj} + r^{d-1} \varepsilon_j + \dots + \varepsilon_{i-1}. \end{aligned}$$

Alors les mots précédents correspondent aux entiers

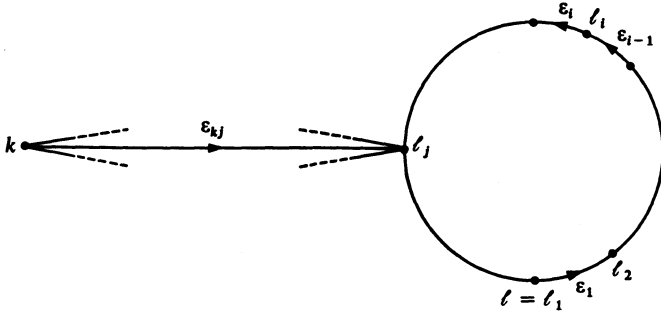
$$\left\{ r^{N_1 g} s_{i, j} + \frac{r^{N_1 g} - 1}{r^g - 1} t_i, N_1 \in \mathbb{N}, (i, j) \in I \times J \right\}.$$

On en déduit, en procédant de même pour les autres boucles éventuelles

telles que $v(\ell) = 1$, que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p $p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme

$$\{q_1^p r^{N_1 s^p} + q_2^p, N_1 \in \mathbb{N}\} \quad \text{avec} \quad (q_1^p, q_2^p) \in \mathbb{Q}^2.$$

Étape 2 : Supposons la proposition démontrée jusqu'à l'ordre $(v-1)$ et considérons une boucle $\ell = \{\ell_1, \dots, \ell_g\}$ telle que $v(\ell) = v$.



Posons $I = \{i \in \{1, \dots, g\}, \tau(\ell_i) = 1\}$.

Soit k un sommet précédant ℓ dans G (c'est-à-dire tel que $k < \ell$).

Notons $J(k) = \{j \in \{1, \dots, g\}, M_{kj} \neq 0\}$ l'ensemble des j tels qu'existe une relation du type

$$k \xrightarrow{\epsilon_{kj}} \ell_j.$$

L'ensemble E des mots qui permettent de passer à l'état a à un état ℓ_i , $i \in I$, s'exprime en fonction de l'ensemble des mots $m(a, k)$ qui permettent de passer de l'état a à un état k , $k < \ell$, de la façon suivante :

$$E = \bigcup_{k < \ell} \{m(a, k) \epsilon_{kj} \epsilon_j \dots \epsilon_{i-1} \overbrace{\epsilon_i \dots \epsilon_{i-1}}^{N_v \text{ fois}},$$

$$N_v \in \mathbb{N}, \quad (i, j) \in I \times J(k), \quad \varphi(a.m(a, k)) = k\}.$$

Posons maintenant pour tout $(i, j) \in I \times J(k)$:

$$t_i = r^{g-1} \epsilon_i + \dots + \epsilon_{i-1}$$

$$d = d(i, j) = i - j \quad \text{si } j \leq i$$

$$= g - (j - 1) \quad \text{si } j > i$$

$$s_{ij}^k = r^d \epsilon_{kj} + r^{d-1} \epsilon_j + \dots + \epsilon_{i-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, les mots $m(a, k)$ correspondent à la réunion

d'un nombre fini P_1 de suites d'entiers v^p , $p \in \{1, \dots, P_1\}$:

$$\{q_1^p r^{(N_1 \varepsilon_1^p + \dots + N_{v-1} \varepsilon_{v-1}^p + v - 2)} + \dots \\ + q_{v-1}^p r^{N_{v-1} \varepsilon_{v-1}^p} + q_v^p, \quad (N_1, \dots, N_{v-1}) \in \mathbb{N}^{v-1}\}.$$

On en déduit que l'ensemble E correspond à la réunion d'un nombre fini P_2 de suites d'entiers u^p , $p \in \{1, \dots, P_2\}$:

$$\{q_1^p r^{(N_1 \varepsilon_1^p + \dots + N_{v-1} \varepsilon_{v-1}^p + N_v \varepsilon_v^p + v - 1)} + \dots \\ + \left(q_v^p r^{d+1} + s_{ij}^k + \frac{t_i}{r^{\varepsilon^p} - 1} \right) r^{N_v \varepsilon_v^p} - \frac{t_i}{r^{\varepsilon^p} - 1}, \quad (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}.$$

On procède de même pour les autres boucles telles que $v(\ell) = v$. Enfin, en complétant les P_3 suites u^p ainsi obtenues par les suites obtenues sur les sommets ℓ tels que $v(\ell) < v$, on en déduit que u est réunion d'un nombre fini P de suites u^p $p \in \{1, \dots, P\}$ de la forme

$$\{q_1^p r^{(N_1 \varepsilon_1^p + \dots + N_v \varepsilon_v^p + v - 1)} + \dots + q_v^p r^{N_v \varepsilon_v^p} + q_{v+1}^p, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

avec $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$, et la proposition 1 est ainsi démontrée par récurrence.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2. — Si u est de la forme indiquée par la proposition 1, alors l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas équirépartie modulo un a la puissance du continu.

Démonstration. — Quitte à remplacer pour tout $p \in \{1, \dots, P\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, v\}$ g_i^p par $\frac{g_i^p}{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$ et à poser $r_p = r^{\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p)}$, on peut supposer que u est réunion de P suites u^p de la forme

$$\{q_1^p r^{v-1} r_p^{(\varepsilon_1^p N_1 + \dots + \varepsilon_v^p N_v)} + \dots + q_v^p r_p^{\varepsilon_v^p N_v} + q_{v+1}^p, (N_1, \dots, N_v) \in \mathbb{N}^v\}$$

où $v \in \mathbb{N}^*$, $(q_1^p, \dots, q_v^p) \in \mathbb{N}^v$ et $(q_1^p, \dots, q_{v+1}^p) \in \mathbb{Q}^{v+1}$ avec $q_1^1 \neq 0$ (quitte à modifier la numérotation des suites u^p) et $q_{v+1}^1 = 0$ (quitte à opérer une translation sur \mathbb{R}) et pour tout $p \in \{1, \dots, P\}$ $\text{pgcd}(g_1^p, \dots, g_v^p) = 1$.

Posons $q = v \cdot \sup_i |q_i^1 r^{v-i}|$ et pour tout $h \in \mathbb{N}^*$:

$$H = \left\{ \xi \in \mathbb{R}; \xi = \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}}, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Nous allons montrer que pour h assez grand, l'ensemble H (qui a la puissance du continu) est inclus dans l'ensemble des $\xi \in \mathbf{R}$ tels que $(u_n \cdot \xi)_{n \in \mathbf{N}}$ ne soit pas équirépartie modulo un.

Cela va résulter des quatre remarques suivantes :

1) Si $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x , on a pour tout (h, ξ) dans $\mathbf{N}^* \times H$:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \{r_1^{nh} \cdot \xi\} \leq r^{1-h}.$$

On a en effet en posant $d = \frac{\log r_1}{\log r}$

$$\begin{aligned} \{r_1^{nh} \cdot \xi\} &= \left\{ r^{dnh} \cdot \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon_i}{r^{ih}} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i > dn} \frac{\varepsilon_i}{r^{(i-dn)h}} \right\} \leq \sum_{i \geq 1} \frac{1}{r^{ih}} = \frac{1}{r^h - 1}. \end{aligned}$$

On en déduit, en posant $\chi = \mathbf{1}_{[0, q \cdot r^{1-h}]}$ fonction indicatrice de l'intervalle $[0, q \cdot r^{1-h}]$, pour tout (h, ξ) dans $\mathbf{N}^* \times H$:

$$\begin{aligned} &\forall (N_1, \dots, N_v) \in \mathbf{N}^v, \\ &\chi(\{(q_1^1 r^{v-1} r_1^{(g_1^1 N_1 + \dots + g_v^1 N_v)h} + \dots + q_v^1 r_1^{g_v^1 N_v h}) \cdot \xi\}) = 1. \end{aligned}$$

2) Pour tout p dans $\{1, \dots, P\}$ désignons par $\varphi_p(n)$ le nombre de solutions dans \mathbf{N}^v de l'équation $g_1^p N_1 + \dots + g_v^p N_v = n$.

De même désignons par $\psi_p(n)$ le nombre de solutions dans \mathbf{N}^v de l'inéquation $g_1^p N_1 + \dots + g_v^p N_v < n$.

Le développement en série entière de

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_p(n) X^n = (1 - X^{g_1^p})^{-1} \dots (1 - X^{g_v^p})^{-1} \quad \text{pour } |X| < 1$$

nous montre que

$$\varphi_p(n) \sim \frac{n^{v-1}}{g_1^p \dots g_v^p (v-1)!},$$

on en déduit que

$$\psi_p(n) \sim \frac{n^v}{g_1^p \dots g_v^p \cdot v!}.$$

Considérons maintenant l'entier $Q(n)$ tel que

$$u_{Q(n)} = q_1^1 r^{v-1} r_1^n + q_2^1 r^{v-2} + \dots + q_v^1$$

et soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que pour tout p dans $\{1, \dots, P\}$:

$$u_{Q(n)} \leq q_1^p r^{v-1} r_p^{an+b} + q_2^p r^{v-2} + \dots + q_{v+1}^p.$$

On a alors $Q(n) \leq \psi(an+b)$ avec $\psi(n) = \sum_{p=1}^P \psi_p(n)$.

D'autre part, soit $c \in \mathbb{N}$ tel que

$$q_1^1 r^{v-1} r_1^c \geq q_1^1 r^{v-1} + \dots + q_v^1,$$

alors pour tout h dans \mathbb{N}^*

$$u_{Q(hn+c)} \geq q_1^1 r^{v-1} r_1^{hn} + \dots + q_v^1 r_1^{hn}$$

et d'après la première remarque

$$\sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m \cdot \xi\}) \geq \sum_{m < n} \varphi_1(m) = \psi_1(n).$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Q(hn+c)} \sum_{m < Q(hn+c)} \chi(\{u_m \cdot \xi\}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(n)}{\psi(ahn+ac+b)} = \frac{1}{C \cdot h^v}$$

avec $C = g_1^1 \dots g_v^1 a^v \sum_{p=1}^P \frac{1}{g_1^p \dots g_v^p} \in \mathbb{R}^{+*}$.

4) Si $(u_n \cdot \xi)$ était équirépartie modulo un, on aurait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \chi(\{u_n \cdot \xi\}) = q \cdot r^{1-h}.$$

et il suffit donc de choisir h assez grand pour que $\frac{1}{C \cdot h^v} > q \cdot r^{1-h}$ de façon à aboutir à une contradiction.

C.Q.F.D.

• Pour toute suite u reconnaissable par un automate fini, posons

$$V(N) = \text{Card} \{n < N; n \in u\}.$$

Les lemmes 1 et 2 nous permettent de déduire du théorème 2 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à la suite u soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est que :

$$V(N) \approx (\log N)^\beta N^\theta \quad \text{avec } (\beta, \theta) \in \mathbb{N} \times]0, 1].$$

THÉORÈME 3. — Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un automate fini soit exactement $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est que cette suite n'ait pas une croissance de type exponentiel.

Exemple 8. — Soit $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$ la suite de Morse et soit $b_0 < b_1 < \dots < b_n < \dots$ la suite de Baum-Sweet. Alors l'ensemble normal associé à la suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est exactement $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

En effet soit

$$f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} X^{m_{b_n}} \text{ la série formelle associée à la suite } (m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}};$$

on a

$$f(X) = \sum_{v(\text{rg}(n))=b} \chi(n) X^n$$

où χ fonction indicatrice de la suite de Morse vérifie pour tout entier n

$$\begin{aligned} \chi(2n) &= \chi(n) & \text{si } n > 0 \\ \chi(2n+1) &= 1 - \chi(n) & \text{si } n \geq 0 \\ \chi(0) &= 0 \end{aligned}$$

et où

$$\text{rg}(n) = \sum_{p \leq n} \chi(p) - 1$$

en particulier on a $\text{rg}(2n) = n + \chi(n) - 1$ et $\text{rg}(2n+1) = n$ ce qui nous montre que

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{v(n)=b} \chi(n) X^{2n} + X \sum_{v(n)=b} (1 - \chi(n)) X^{2n} \\ &= f_1(X^2) + X f_2(X^2) \end{aligned}$$

où $f_1(X)$ (resp. $f_2(X)$) est la série formelle associée à la suite croissante des entiers qui font partie à la fois de la suite de Baum-Sweet et de la suite de Morse (resp. qui font partie de la suite de Baum-Sweet, mais pas de la suite de Morse).

Ces deux suites étant 2-reconnaissables $f_1(X)$ et $f_2(X)$ sont deux éléments de $F_2[[X]]$ algébriques sur $F_2(X)$ (cf [6]) et par conséquent $f(X) = (f_1(X))^2 + X(f_2(X))^2$ est algébrique sur $F_2(X)$.

La suite $(m_{b_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est donc 2-reconnaissable et comme de plus $m_{b_n} \in O(n^{\log_2 2})$ avec $\theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, son ensemble normal est $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

De la même façon, on a plus généralement :

COROLLAIRE : — Soit $m_0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$ la suite de Morse et soit $u_0 < u_1 < \dots < u_n < \dots$ une suite reconnaissable par un 2-automate. Alors l'ensemble normal associé à la suite extraite $(m_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si et seulement si la suite u n'a pas une croissance de type exponentiel.

D'autre part, le théorème 3 nous montre que les exemples suivants constituent les cas typiques de suites reconnaissables par un automate fini dont l'ensemble normal est strictement inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

Exemple 9 : La suite croissante des entiers de la forme 3^n ou $2 \cdot 3^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exemple 10 : La suite croissante des entiers de la forme

$$2^{n_1+n_2+1} + 2^{n_2} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Exemple 11 : La suite croissante des entiers de la forme

$$2 \cdot 4^{n_1} 8^{n_2} + 8^{n_2} \quad (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que l'ensemble normal associé à la suite de l'exemple 9 (resp. exemple 10) est l'ensemble des nombres normaux en base 3 (resp. en base 2).

Ceci nous conduit à poser la conjecture suivante :

Conjecture. — L'ensemble normal associé à une suite reconnaissable par un r -automate est soit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ soit l'ensemble des nombres normaux en base r .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. P. ALLOUCHE, *Théorie des nombres et automates*, Thèse d'État, 1983, Université de Bordeaux I.
- [2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, 1973, Dunod.
- [3] J. BERSTEL, Sur les mots sans carré définis par un morphisme, *Springer Lecture Notes in Computer Science*, 71 (1979), 16-25.
- [4] J. BERSTEL, *Mots infinis. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [5] G. CHRISTOL, Ensembles presque-périodiques k -reconnaissables, *Theoretical Computer Science*, 9 (1979), 141-145.

- [6] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, 108 (1980), 401-418.
- [7] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE et G. RAUZY, Spectral properties of automaton-generating sequences (communication privée).
- [8] A. COBHAM, Uniform tag sequences, *Math. Syst. Theory*, vol. 6, n° 2 (1972), 164-192.
- [9] J. COQUET, Graphes connexes, représentation des entiers et équirépartition, *Journ. of Number Theory*, vol. 16, n° 3 (1983), 363-375.
- [10] J. COQUET et P. LIARDET, A metric study involving independent sequences (à paraître).
- [11] F. M. DEKKING, Regularity and irregularity of sequences generated by automata. Séminaire de théorie des nombres, 1979-80, Université de Bordeaux I.
- [12] S. EILENBERG, *Automata, languages and machines*, vol. A, 1974, Academic Press.
- [13] D. FREEDMAN, *Markov chains*, 1971, Holden-Day.
- [14] F. HARARY, *Graph theory*, 1969, Addison-Wesley.
- [15] L. KUIPERS et N. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, 1974, John Wiley and Sons.
- [16] J. H. LOXTON et A. J. VAN DER POORTEN, Arithmetic properties of the solutions of a class of functional equations. *J. Reine und Angew. Math.*, t. 330 (1982), 159-172.
- [17] C. MAUDUIT, Automates finis et équirépartition modulo un, *C.R. A. S.*, Paris, t. 299, série I, n° 5 (1984), 121-123.
- [18] M. MENDÈS-FRANCE et A. J. VAN DER POORTEN, Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 24 (1981), 123-131.
- [19] M. QUEFFELEC, *Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques*, Thèse d'État, 1984, Université de Paris-Nord.
- [20] G. RAUZY, *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, 1976, Presses Universitaires de France.
- [21] G. RAUZY, *Des mots en arithmétique. Théorie des langages et complexité des algorithmes*, Journées d'Avignon, oct. 1983.
- [22] R. C. READ, *Graph theory and computing*. 1972, Academic Press.
- [23] R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*. 1962, Prentice-Hall.

Manuscrit reçu le 12 février 1985
révisé le 16 avril 1985.

Christian MAUDUIT,
Université d'Aix-Marseille II
U.E.R. Mathématique-Informatique
70, route Léon-Lachamp, Luminy
13288 Marseille Cedex 2.