

JOAQUIN M. ORTEGA

**Sur une extension du problème de Gleason dans
les domaines pseudoconvexes**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 4 (1984), p. 67-74

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_67_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE EXTENSION DU PROBLEME DE GLEASON DANS LES DOMAINES PSEUDOCONVEXES

par **Joaquin M^a. ORTEGA**

Introduction.

Soit D un domaine borné pseudoconvexe dans \mathbb{C}^n ; soit $A(\bar{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans D et continues dans \bar{D} et soit $a \in D$. Le problème de Gleason consiste à trouver, pour une fonction $f \in A(\bar{D})$ donnée, n fonctions $g_1, \dots, g_n \in A(\bar{D})$ telles que

$$f(z) - f(a) = \sum_{i=1}^n g_i(z)(z_i - a_i).$$

Le problème fut résolu par Leibenzon (voir [5]) dans le cas de la boule et par Henkin ([5]), Kerzman-Nagel ([7]), Lieb ([9]) et Øvrelid ([13]) dans le cas D strictement pseudo-convexe. Dans ce cas aussi, Ahern et Schneider ([1]) prouvent que la correspondance $f \rightarrow (g_1, \dots, g_n)$ peut être faite de façon linéaire et que les g_1, \dots, g_n , regardées comme des fonctions des variables $(z, a) \in D \times D$, sont holomorphes dans $D \times D$ et continues dans $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \{(z, z) : z \in bD\}$. Jakóbczak ([6]) prouve, pour les domaines bornés strictement pseudoconvexes à frontière C^∞ , que toute fonction $f \in A^\infty(\bar{D}) =$ espace des fonctions holomorphes dans D dont toutes les dérivées sont continues jusqu'au bord, a une décomposition

$$f(z) - f(w) = \sum_{i=1}^n g_i(z, w)(z_i - w_i)$$

avec $g_i \in A^\infty(\overline{D \times D})$.

(*) Ce travail a eu une subvention de la « Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica. Ministerio de Educación y Ciencia. España ».

Dans ce travail nous prouvons ce résultat pour les domaines pseudoconvexes à frontière réelle-analytique et également pour les domaines pseudoconvexes à frontière C^∞ pour lesquels le résultat soit valable localement. En particulier on retrouve le théorème de Jakóbczak par des méthodes très différentes. La technique que nous utilisons est une combinaison des résultats de Nagel ([11] et [12]) sur la platitude et la structure des idéaux fermés, du résultat de Kohn sur la résolution du $\bar{\partial}$ ([8]) et finalement, celui de Grothendieck ([4]) sur le théorème de Künneth.

Résolution du $\bar{\partial}$ dans les produits de domaines pseudoconvexes.

Il s'agit ici d'étendre le résultat de Kohn de résolution de l'équation $\bar{\partial}$ pour les formes à coefficients dans $C^\infty(\bar{D})$, D pseudoconvexe borné à frontière C^∞ , aux produits des domaines de ce type.

THÉORÈME 1. — Soient D_1, D_2 des ouverts bornés de \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^m , respectivement. Désignons par $C^\infty(\bar{D}_i)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables au sens de Whitney sur \bar{D}_i . Alors on a

$$C^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \cong C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} C^\infty(\bar{D}_2).$$

Preuve. — Le théorème d'extension de Whitney implique que $C^\infty(\bar{D}_1)$ est un quotient de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(D_1) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n) \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \rightarrow 0$$

où $\Gamma(D_1)$ désigne l'idéal des fonctions de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ qui s'annulent à l'ordre infini dans \bar{D}_1 . Par nucléarité de $C^\infty(\mathbf{R}^m)$ et en utilisant l'isomorphisme $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m) \cong C^\infty(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m)$, on trouve la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(D_1) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m) \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m) \rightarrow 0.$$

De façon analogue on a une autre suite exacte

$$0 \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} \Gamma(D_2) \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m) \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} C^\infty(\bar{D}_2) \rightarrow 0.$$

On en déduit donc que la suite

$$0 \rightarrow \Gamma(D_1) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m) + C^\infty(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} \Gamma(D_2) \rightarrow C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m) \rightarrow C^\infty(\bar{D}_1) \hat{\otimes} C^\infty(\bar{D}_2) \rightarrow 0$$

est exacte. L'idéal $I = \Gamma(D_1) \hat{\otimes} C^\infty(\mathbf{R}^m) + C^\infty(\mathbf{R}^n) \hat{\otimes} \Gamma(D_2)$ est alors fermé. D'autre part ses éléments sont des fonctions plates sur $\overline{D_1 \times D_2}$ qui ne s'annulent simultanément en aucun autre point. On a donc $I = \Gamma(\overline{D_1 \times D_2})$, ce qui prouve le théorème. C'est clair que le résultat est valable pour le produit de deux algèbres de fonctions différentiables au sens de Whitney sur deux compacts quelconques.

COROLLAIRE. — Soit D un domaine de C^n , $\Lambda_{p,q}^\infty(\overline{D})$ l'espace des (p,q) -formes à coefficients dans $C^\infty(\overline{D})$, et $\Lambda^\infty(\overline{D}) = \bigoplus_{p,q} \Lambda_{p,q}^\infty(\overline{D})$. Si D_1, D_2 sont des domaines de C^n et C^m respectivement, on a

$$\Lambda^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \cong \Lambda^\infty(\overline{D_1}) \hat{\otimes} \Lambda^\infty(\overline{D_2}).$$

Dans cet isomorphisme l'opérateur $\bar{\partial}_{D_1 \times D_2}$ s'identifie avec $\bar{\partial}_{D_1} \hat{\otimes} 1 + \eta \hat{\otimes} \bar{\partial}_{D_2}$ où η est la multiplication par $(-1)^q$ sur les formes de $\Lambda_{p,q}(\overline{D_1})$.

THÉORÈME 2. — Soient D_1, D_2 des domaines de C^n et C^m respectivement, et désignons par $H(\Lambda^\infty(\overline{D_i}))$ la cohomologie de $\Lambda^\infty(\overline{D_i})$ par rapport à $\bar{\partial}_{D_i}$. Alors on a

$$H(\Lambda^\infty(\overline{D_1 \times D_2})) \cong H(\Lambda^\infty(\overline{D_1})) \hat{\otimes} H(\Lambda^\infty(\overline{D_2})).$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser le résultat de Grothendieck ([4]) qui établit que si E et F sont des espaces gradués de Fréchet, avec dérivations d' et d'' , et l'un des deux est nucléaire, alors $d = d' \hat{\otimes} 1 + \eta \hat{\otimes} d''$ munit $E \hat{\otimes} F$ d'une structure d'espace différentiel et $H(E \hat{\otimes} F) \cong H(E) \hat{\otimes} H(F)$. Dans notre cas il suffit de prendre $E = \Lambda^\infty(\overline{D_1})$, $F = \Lambda^\infty(\overline{D_2})$, $d' = \bar{\partial}_{D_1}$ et $d'' = \bar{\partial}_{D_2}$.

THÉORÈME 3. — Soient D_1 et D_2 des domaines bornés pseudoconvexes de C^n et C^m respectivement, à frontière C^∞ . On a alors $A^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \cong A^\infty(\overline{D_1}) \hat{\otimes} A^\infty(\overline{D_2})$ et toute forme de $\Lambda_{p,q}^\infty(\overline{D_1 \times D_2})$, $q > 0$, $\bar{\partial}$ -fermée est $\bar{\partial}$ -exacte.

Preuve. — Il suffit d'utiliser le théorème 2 et le résultat de Kohn ([8]) qui établit que $H(\Lambda^\infty(\overline{D_i})) = A^\infty(\overline{D_i})$.

Ce dernier résultat admet une « localisation ». Soit $\tilde{\Lambda}_{p,q}^\infty(\overline{D_1 \times D_2})$ le faisceau des germes de (p,q) -formes dont les coefficients sont des fonctions

définies sur des voisinages U relatifs à $\overline{D_1 \times D_2}$, appartenant à $A^\infty(\overline{U})$.
 Pour simplifier l'écriture nous posons \mathcal{A}^∞ au lieu de $\tilde{\Lambda}_{0,0}^\infty(\overline{D_1 \times D_2})$.

THÉORÈME 4. — Soient D_1 et D_2 des domaines bornés pseudoconvexes de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m , respectivement, à frontière C^∞ . La suite suivante est alors exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{A}^\infty \rightarrow \tilde{\Lambda}_{0,1}^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \rightarrow \tilde{\Lambda}_{0,2}^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \rightarrow \dots \\ \rightarrow \tilde{\Lambda}_{0,m}^\infty(\overline{D_1 \times D_2}) \rightarrow 0.$$

Preuve. — En effet, on trouve le résultat en utilisant le théorème 3 et le fait que, étant donné un voisinage d'un point relatif à $\overline{D_i}$, il existe un autre voisinage plus petit qui est pseudoconvexe et à frontière C^∞ (lemme 1.1 de Amar [2]).

**Le problème de Gleason généralisé
 pour des domaines pseudoconvexes
 à frontière réelle-analytique.**

THÉORÈME 5. — Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné pseudoconvexe à frontière réelle-analytique. Toute $f \in A^\infty(\overline{D})$ admet une décomposition

$$f(z) - f(w) = \sum_{i=1}^n g_i(z,w)(z_i - w_i)$$

avec $g_i \in A^\infty(\overline{D \times D})$.

Preuve. — Nous allons utiliser un résultat de Nagel ([12]) qui affirme que si E est un domaine relativement compact tel que

- (a) pour $z \in bE$, E est $\bar{\partial}$ -exact en z (au sens de [12]).
- (b) \bar{E} a une base de voisinages qui sont des domaines d'holomorphic.
- (c) $H^q(\bar{E}, \mathcal{A}^\infty(\bar{E})) = 0$ pour $q > 0$,

si $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(\bar{E})$ et si I est l'idéal engendré par f_1, \dots, f_p dans $\mathcal{O}(\bar{E})$ alors

$$IC^\infty(\bar{E}) \cap A^\infty(\bar{E}) = IA^\infty(\bar{E}).$$

Ceci entraîne que si $IC^\infty(\bar{E})$ est fermé alors $IA^\infty(\bar{E})$ est aussi fermé.

Nagel prouve aussi que ce dernier fait est vrai si E est à frontière réelle-analytique par morceaux avec les hypothèses suivantes : si

$$\bar{E} = \{z \in \mathbb{C}^n : r_j(z) \leq 0, j=1, \dots, m\}$$

$Y_k = \{z \in \mathbb{C}^n; k \text{ fonctions au moins parmi les } r_j \text{ s'annulent en } z\}$.

$$X_k = Y_k \cap \bar{E}$$

alors la frontière de X_k dans Y_k est X_{k+1} et $X_k, \overline{Y_k \setminus X_k}$ sont régulièrement séparés.

Nous appliquons ce résultat à $E = D \times D$. Les théorèmes 4 et 3 fournissent respectivement les conditions (a) et (c). La condition (b) est aussi vérifiée parce que tous les domaines pseudoconvexes à frontière réelle-analytique ont cette propriété ([3]). Finalement, que la frontière de $D \times D$ remplit toutes les conditions antérieures est aisément vérifié en tenant compte de la caractérisation de Łojasiewicz des fermés régulièrement séparés (voir par exemple le théorème 5.5, chap. I de [10]).

Considérons maintenant les fonctions $f_i(z, w) = z_i - w_i$. On aura donc que l'idéal engendré par $(z_i - w_i)$ dans $A^\infty(\overline{D \times D})$ est fermé. Puisque $f(z) - f(w)$ appartient à l'idéal fermé engendré par $(z_i - w_i)$ dans $C^\infty(\overline{D \times D})$ (voir Chap. II de [10]), on conclut que $f(z) - f(w)$ a la décomposition annoncée.

Réduction du « problème de Gleason généralisé » à un problème local.

Dans ce paragraphe D désignera un domaine borné pseudoconvexe de \mathbb{C}^n à frontière C^∞ et tel que \bar{D} a une base de voisinages $\{\Omega_i\}$ qui sont des domaines d'holomorphic.

DÉFINITION. — *On dira que D vérifie localement le problème de Gleason généralisé en un point $(z_0, w_0) \in \overline{D \times D}$ si pour chaque f définie dans un voisinage U de (z_0, w_0) relatif à $\overline{D \times D}$, appartenant à $A^\infty(\bar{U})$ et telle que $f(z, z) = 0$ pour $z \in \bar{U}$, il existe un voisinage V de (z_0, w_0) relatif à $\overline{D \times D}$ et des fonctions $g_i \in A^\infty(\bar{V})$ telles que $f(z, w) = \sum_{i=1}^n g_i(z, w)(z_i - w_i)$ dans V .*

LEMME. — Pour tout $(z, w) \in \overline{D \times D}$, l'anneau des germes $\mathcal{A}_{(z, w)}^\infty$ est un $\mathcal{O}_{(z, w)}$ -module plat.

Preuve. — En effet, le théorème 2.10 de Nagel ([12]) donne ce résultat compte tenu du théorème 4, puisqu'alors, si I est un idéal de $\mathcal{O}_{(z, w)}$, $I \mathcal{C}_{(z, w)}^\infty \cap \mathcal{A}_{(z, w)}^\infty = I \mathcal{A}_{(z, w)}^\infty$ et par conséquent $\mathcal{A}_{(z, w)}^\infty$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{(z, w)}$.

THÉORÈME 6. — Si D vérifie localement le problème de Gleason généralisé dans tous les points de $\overline{D \times D}$, alors il est vérifié globalement, c'est-à-dire, pour toute $f \in A^\infty(\overline{D})$ il y a une décomposition

$$f(z) - f(w) = \sum_{i=1}^n g_i(z, w)(z_i - w_i)$$

avec $g_i \in A^\infty(\overline{D \times D})$.

Preuve. — Considérons $\overline{D} \subset \Omega$, Ω domaine de \mathbb{C}^n et la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{R}(\Omega \times \Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega \times \Omega)^n \xrightarrow{\tilde{\Psi}} \mathcal{I}_\Omega \rightarrow 0$$

où \mathcal{I}_Ω est le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}(\Omega \times \Omega)$ correspondant à la variété $z_i = w_i$, $i = 1, \dots, n$, $\tilde{\Psi}$ est le morphisme naturel $\tilde{\Psi}(f_1, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n f_i(z_i - w_i)$ et \mathcal{R} est le faisceau des relations. On considère alors la restriction de la suite ci-dessus à $\overline{D \times D}$ et on fait le produit tensoriel par le faisceau $\mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D})$. Du lemme antérieur découle alors que

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R}(\Omega \times \Omega) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D}) \rightarrow \mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D})^n \rightarrow \mathcal{I}_\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D}) \rightarrow 0$$

est exacte.

On va montrer maintenant que pour $(z, w) \in \overline{D \times D}$ les germes du faisceau $\mathcal{I}_\Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D})$ s'identifient avec l'idéal des germes de $\mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D})$ définis par des fonctions qui s'annulent pour $z = w$. En

effet si l'on tensorise par $\mathcal{A}_{(z,w)}^\infty(\overline{D \times D})$ la suite

$$0 \rightarrow I_{(z,w)} \rightarrow \mathcal{O}_{(z,w)}$$

$I_{(z,w)}$ désignant l'idéal de $\mathcal{O}_{(z,w)}$ des germes des fonctions nulles sur $z = w$, on conclut, par la platitude de $\mathcal{A}_{(z,w)}^\infty$ que l'application

$$I_{(z,w)} \otimes_c \mathcal{A}_{(z,w)}^\infty \rightarrow \mathcal{A}_{(z,w)}^\infty$$

est injective. D'autre part, le fait que l'image soit précisément les germes de fonctions nulles sur $z = w$ est justement la condition que le problème de Gleason généralisé soit vérifié localement.

On va montrer ensuite que

$$H^1(\overline{D \times D}, \mathcal{R}(\Omega \times \Omega) \otimes \mathcal{A}^\infty(\overline{D \times D})) = 0.$$

Ceci est une conséquence de la preuve du théorème 5.8 de [11]. En effet, un examen de cette preuve montre que le résultat

$$H^q(\overline{E}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}^\infty(E)) = 0, \quad q \geq 1$$

où \mathcal{F} est un faisceau cohérent défini au voisinage de \overline{E} , est valable si $H^q(\overline{E}, \mathcal{A}^\infty(E))$ est 0 pour $q \geq 1$ et si \overline{E} a une base de voisinages qui sont des domaines d'holomorphie. Dans notre cas, prenant $E = D \times D$, la première condition est assurée par le théorème 3 et la deuxième par l'hypothèse faite sur D .

En prenant alors les espaces de sections dans la suite (1) on obtient la suite exacte

$$A^\infty(\overline{D \times D})^n \xrightarrow{\psi} I_D \rightarrow 0$$

où $\psi(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n g_i(z_i - w_i)$ et I_D est l'idéal de $A^\infty(\overline{D \times D})$ des fonctions nulles sur $z = w$. Ceci termine la preuve du théorème.

COROLLAIRE. — Si D est un domaine borné strictement pseudoconvexe à frontière C , et si $f \in A(\overline{D})$, il existe $g_1, \dots, g_n \in A(\overline{D \times D})$ telles que

$$f(z) - f(w) = \sum_{i=1}^n g_i(z,w)(z_i - w_i).$$

Preuve. — Puisque localement D peut être identifié à un domaine convexe (auquel on peut appliquer la méthode de décomposition de Leibenzon), il est clair que le problème de Gleason généralisé est vérifié localement en tous les points de $\overline{D \times D}$. D'autre part il est bien connu que \overline{D} a une base de voisinages que sont des domaines d'holomorphic. De cette façon, avec le théorème 6 nous retrouvons avec une preuve différente le résultat de Jakóbczak.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. AHERN and R. SCHNEIDER, The boundary behavior of Henkin's kernel, *Pacific Journal of Math.*, vol. 66, n° 1 (1976), 9-14.
- [2] E. AMAR, $\bar{\partial}$ -cohomologie C^∞ et Applications, Preprint, Université Orsay.
- [3] K. DIEDERICH and J. FORNAESS, Pseudoconvex domains with realanalytic boundary, *Annals of Mathematics*, 107 (1978), 371-384.
- [4] A. GROTHENDIECK, Opérations algébriques sur les distributions à valeurs vectorielles, Théorème de Künneth, *Séminaire Schwartz* (53-54), Exposé 24.
- [5] G. M. HENKIN, Approximation of functions in pseudoconvex domains and Leibenzon's theorem, *Bull. Aca. Sci., Ser. Math. Astron. et Phys.*, 19 (1971), 37-42.
- [6] P. JAKÓBCZAK, On Fornæss imbedding theorem, Preprint.
- [7] N. KERZMAN and A. NAGEL, Finitely generated ideals in certain function algebras, *J. Funct. Anal.*, (1971), 212-215.
- [8] J. J. KOHN, Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 (1973), 273-292.
- [9] I. LIEB, Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung auf streng pseudokonvexen Gebieten : Stetige Randwerte, *Math. Ann.*, 199 (1972), 241-256.
- [10] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966.
- [11] A. NAGEL, Flatness criteria for modules of holomorphic functions on \mathcal{O}_n , *Duke Math. J.*, vol. 40 (1973), 433-448.
- [12] A. NAGEL, On algebras of holomorphic functions with C^∞ -boundary values, *Duke Math. J.*, 41 (1974), 527-535.
- [13] N. ØVRELID, Generators of the maximal ideals of $A(\overline{D})$, *Pac. Jour. Math.*, 39 (1971), 219-233.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1983.

Joaquin M^a ORTEGA,
 Universitat Autònoma de Barcelona
 Secció de Matemàtiques
 Bellaterra (Barcelona) (Espanya).
