ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

A. ACHOUR

K. TRIMECHE

La g-fonction de Littlewood-Paley associée à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 4 (1983), p. 203-226

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_203_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983), 203-226.

LA g-FONCTION DE LITTLEWOOD-PALEY ASSOCIÉE À UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL SINGULIER SUR $(0, \infty)$

par A. ACHOUR et K. TRIMECHE

I. INTRODUCTION

On considère l'opérateur différentiel L sur $]0, \infty[$ défini par

$$\mathrm{L}u = \frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{A}u')'$$

où $\mathrm{A} : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ est une fonction de la forme

$$\mathrm{A}(t) = t^{2\alpha+1}\mathrm{C}(t), \qquad \alpha > -\frac{1}{2}$$

C étant une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, strictement positive, paire et de classe C^∞. On suppose en plus :

i) A est croissante,

ii) $\dfrac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}$ est décroissante et tend vers $2\rho > 0$ à l'infini.

Les conditions (i) et (ii) sont vérifiées quand

$$\mathrm{A}(t) = 2^{2(\alpha+\beta+1)}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \qquad \alpha > \beta > -\frac{1}{2},$$

l'opérateur L correspondant est alors l'opérateur de Jacobi.

Pour certaines valeurs des paramètres α et β, l'opérateur de Jacobi est la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace symétrique de type non compact de rang 1.

On associe à cet opérateur la g-fonction de Littlewood-Paley : Pour tout f dans D_0, espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ paires et à support compact, on pose

$$g(f)(x) = \int_0^\infty t|\nabla P^t f(x)|^2\, dt$$

où ∇ est l'opérateur

$$\nabla = \left(\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et P^t est le semi-groupe de Poisson associé à l'opérateur $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$.
On démontre que pour tout $p \in]1,\infty[$, il existe deux constantes C_p et D_p telles que pour tout f dans D_0

$$C_p\|f\|_p \leqslant \|g(f)\|_p \leqslant D_p\|f\|_p$$

où $\|\ \|_p$ est la norme sur l'espace $L^p((0,\infty), A(x)\, dx)$.

Ces inégalités ont été conjecturées par Stein ([3], p. 137) lequel ne fait sur A que l'hypothèse : « $\dfrac{A'}{A}$ est décroissante ».

On énonce aussi un résultat sur les multiplicateurs, semblable à celui obtenu par Stein ([3], p. 121) à l'aide de méthodes probabilistes.

Le plan de ce travail est le suivant :

– On étudie dans le deuxième paragraphe la transformation de Fourier associée à L, les fonctions définies positives ainsi que les opérateurs de translations généralisées associés à L.

– Dans le troisième paragraphe, on étudie le semi-groupe de Poisson associé à L et on démontre l'inégalité

$$|\nabla P^{2t} f|^2 \leqslant P^t(|\nabla P^t f|^2).$$

Cette inégalité a été obtenue grâce à un principe de maximum pour l'opérateur $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$, [4].

– Au dernier paragraphe, on démontre, grâce à l'inégalité ci-dessus et en suivant les méthodes de [3], les inégalités concernant la g-fonction de Littlewood-Paley.

II. L'OPÉRATEUR L

On considère l'opérateur différentiel L sur $]0,\infty[$ défini par

$$Lu = \frac{1}{A}(Au')'$$

où $A : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ est une fonction de la forme

$$A(t) = t^{2\alpha+1}C(t), \qquad \alpha > -\frac{1}{2},$$

C étant une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement positive, paire et de classe C^∞.

On suppose en plus

i) A est croissante,

ii) $\frac{A'}{A}$ est décroissante et tend vers $2\rho > 0$ quand t tend vers l'infini.

Il résulte des théorèmes de Bochner [1] que, pour tout λ dans $\mathbf{C}$, l'équation

$$\begin{cases} Lu = -(\lambda^2+\rho^2)u \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique qu'on notera φ_λ. C'est une fonction qui est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier et est paire.

Les propriétés suivantes des fonctions φ_λ se trouvent dans [2], [5].

PROPOSITION II.1. — 1) *Pour tout* $x > 0$, *et tout* $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x K(x,y)\cos\lambda y\, dy$$

où $K(x,.) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est une fonction continue sur* $]-x,x[$, *à support dans* $[-x,x]$ *positive et intégrale.*

2) *Pour tout* $x > 0$ *et tout* $\lambda \in \mathbf{C}$

$$|\varphi_\lambda(x)| \leqslant \varphi_{i\,\mathrm{Im}\,\lambda}(x) \leqslant \exp(|\mathrm{Im}\,\lambda|x).$$

3) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} : \qquad |\varphi_\lambda(x)| \leqslant C(1+x)e^{-\rho x}.$$

4) *On a la formule du produit :*

$$\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(z) W(x,y,dz)$$

où $W(x,y,dz)$ *est une mesure positive, à support dans* $[|x-y|, x+y]$, *de masse totale* 1 *et symétrique en* x *et* y.

En plus des propriétés précédentes, nous aurons besoin de

PROPOSITION II.2. — *Il existe des constantes positives* C_1, C_2 *telles que :*

1) $\forall x \geqslant 0$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$: $|\varphi'_\lambda(x)| \leqslant C_1(\lambda^2+\rho^2)(1+x)xe^{-\rho x}$.

2) $\forall x \geqslant 0$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$: $|\varphi''_\lambda(x)| \leqslant C_2(\lambda^2+\rho^2)(1+x)^2 e^{-\rho x}$.

Démonstration. — On a

$$\varphi'_\lambda(x) = \frac{1}{A(x)} \int_0^x A(t) L\varphi_\lambda(t)\, dt = \frac{-(\lambda^2+\rho^2)}{A(x)} \int_0^x \varphi_\lambda(t) A(t)\, dt.$$

Il résulte de la proposition II.1 :

$$|\varphi'_\lambda(x)| \leqslant C \frac{\lambda^2 + \rho^2}{A(x)} (1+x) \int_0^x A(t) e^{-\rho t} dt.$$

Il suffit maintenant de majorer l'intégrale par $xA(x)e^{-\rho x}$, ce qui est possible puisque la fonction $t \to A(t)e^{-\rho t}$ est croissante. Cela donne la première inégalité. La deuxième est maintenant immédiate.

PROPOSITION II.3. — *Pour tout* $a > 0$ *et tout* $n \in \mathbf{N}$, *il existe un entier* m *et une constante* $C > 0$ *tels que pour tout* λ :

$$\sup_{|x| \leqslant a} \left| \frac{d^n \varphi_\lambda(x)}{dx^n} \right| \leqslant C|\lambda|^m.$$

Démonstration. — La transformation χ de Riemann-Liouville associée à l'opérateur L ([5]), est un automorphisme de l'espace de Fréchet des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et paire. La proposition résulte alors du fait que :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x K(x,y) \cos \lambda y \, dy = \chi(\cos \lambda .)(x).$$

1. La transformation de Fourier associée à L.

Soit μ la mesure sur $(0,\infty)$ de densité A par rapport à la mesure de Lebesgue.

On note $L^p(\mu)$ l'espace $L^p((0,\infty),\mu)$ muni de la norme $\| \ \|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,ess} |f(t)|.$$

La proposition II.1 montre que, pour tout $q > 2$ et tout $\lambda \geqslant 0$, la fonction φ_λ est dans $L^q(\mu)$. Il résulte de l'inégalité de Hölder que si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < 2$, la formule

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi_\lambda(x) \, d\mu(x)$$

définit une fonction $\hat{f} : (0,\infty) \to \mathbf{C}$ bornée. Cette fonction est appelée transformée de Fourier de f.

Dans [2] l'auteur introduit les espaces $D_0(\mathbf{R})$ et H_0 :

– $D_0(\mathbf{R})$ est l'espace des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe C^∞, paires et à support compact.

– H_0 est l'espace des fonctions $\Psi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ entières, paires et vérifiant :

$$\exists R tq, \quad \forall m \in \mathbf{N}, \qquad \sup_{\lambda \in \mathbf{C}} |(1+\lambda^2)^m \Psi(\lambda) \exp(-R\,|\mathrm{Im}\,\lambda|) < +\infty$$

et démontre le

THÉORÈME II.1. — 1) *La transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $D_0(\mathbf{R})$ *sur* H_0.

2) *Il existe une mesure tempérée* σ *sur* $(0,\infty)$ *telle que pour tout* $f \in \mathrm{D}_0(\mathbf{R})$

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda).$$

3) *La transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de* $\mathrm{L}^2(\mu)$ *sur* $\mathrm{L}^2((0,\infty),\sigma)$.

2. Fonctions définies-positives.

DÉFINITION II.1. — *Une fonction paire* $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continue et bornée est dite définie-positive si, pour tout* h *dans* $\mathscr{S}_0(\mathbf{R})$, *espace des fonctions de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$, *de classe* C^∞, *paires et à décroissance rapide, on a*

$$\forall x,\ \int_0^\infty h(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda) \geqslant 0 \Rightarrow \forall x,\ \int_0^\infty \Psi(\lambda)h(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda) > 0.$$

PROPOSITION II.4. — *Pour tout* $t > 0$, *la fonction* $\lambda \to \exp(-t(\lambda^2+\rho^2))$ *est définie-positive.*

Démonstration. — La formule du produit pour des fonctions φ_λ montre que, pour tout $x > 0$, la fonction $\lambda \to \varphi_\lambda(x)$ est définie-positive. On en déduit aussitôt que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $\lambda \to \varphi_\lambda^n(x)$ est définie-positive et qu'il en est alors de même pour les fonctions $\lambda \to \exp(b\varphi_\lambda(x))$, $b > 0$. Ainsi pour tout $t > 0$, la fonction

$$\lambda \to \exp\left((2\alpha+1)t\,\frac{\varphi_\lambda(x)-1}{x^2}\right)$$

est définie-positive. Il suffit de faire tendre x vers 0 pour obtenir le résultat.

LEMME II.1. — *Soit* v *une fonction dans* $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$, *positive, à support dans* $[-1,1]$ *et vérifiant* $\|v\|_1 = 1$. *Alors, pour tout* $\varepsilon \in]0,1]$, *la fonction* v_ε *définie par*

$$v_\varepsilon(x) = (\varepsilon \mathrm{A}(x))^{-1}\, \mathrm{A}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

est à support dans $[-\varepsilon,\varepsilon]$ *et vérifie* $\|v_\varepsilon\|_1 = 1$.

En outre, il existe $K > 0$ *tel que*

$$\forall\lambda, \quad |\hat{v}_\varepsilon(\lambda) - 1| \leqslant \varepsilon K(\lambda^2 + \rho^2).$$

Démonstration. — On a

$$\hat{v}_\varepsilon(\lambda) - 1 = \int_0^\varepsilon v_\varepsilon(x)(\varphi_\lambda(x) - 1)\, d\mu(x).$$

Il suffit de majorer $|\varphi_\lambda(x) - 1|$ à l'aide de la formule des accroissements finis et de la proposition II.2.

THÉORÈME II.2. — *La fonction* $E : \mathbf{R} \times]0,\infty[\to \mathbf{R}$ *définie par*

$$E(x,t) = E_t(x) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)} \varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda)$$

est positive.

Démonstration. — Avec les notations du lemme II.1, on a

$$v_\varepsilon(x) = \int_0^\infty \hat{v}_\varepsilon(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda).$$

La fonction $\hat{v}_\varepsilon$ est dans $\mathscr{S}_0(\mathbf{R})$, v_ε est positive et

$$\lambda \to \exp(-t(\lambda^2 + \rho^2))$$

est définie-positive. On en déduit :

$$\int_0^\infty \hat{v}_\varepsilon(\lambda) e^{-t(\lambda^2+\rho^2)} \varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda) \geqslant 0 .$$

Le lemme montre que cette dernière intégrale tend vers $E(x,t)$ quand ε tend vers 0, cela démontre le théorème.

3. Opérateurs de translation généralisée.

Soit $x \geqslant 0$. On pose pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$

$$T_x f(y) = \int_0^\infty f(z) W(x,y,dz).$$

D'après [2], la mesure produit $W(x,y,dz)\,d\mu(y)$ est symétrique par rapport à y et z :

$$W(x,y,dz)\,d\mu(y) = W(x,z,dy)\,d\mu(z).$$

On en déduit que pour tout $p \in [1,\infty]$

$$\|T_x f\|_p \leqslant \|f\|_p$$

et, en utilisant la formule du produit,

$$(T_x f)\hat{}(\lambda) = \varphi_\lambda(x)\hat{f}(\lambda).$$

D'autre part, l'écriture

$$T_x f(y) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)\hat{f}(\lambda)\,d\sigma(\lambda)$$

montre que l'application $(x,y) \to T_x f(y)$ est continue sur $[0,\infty[\times[0,\infty[$.

PROPOSITION II.5. — 1) *Soit* f *un élément de* $D_0(\mathbf{R})$ *à support dans* $[-a,a]$. *Pour tout* $x \geqslant 0$, $T_x f$ *est un élément de* $D_0(\mathbf{R})$ *à support inclus dans* $[-x-a, a+x]$.

2) *Soit* f *une fonction dans* $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. *L'application de* $[0,\infty[$ *dans* $L^p(\mu)$ *qui à* x *associe* $T_x f$ *est continue.*

3) *Soit* f *une fonction dans* $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, *espace des fonctions paires continues sur* $\mathbf{R}$ *et tendant vers* 0 *à l'infini. L'application de* $[0,\infty[$ *dans* $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ *qui à* x *associe* $T_x f$ *est continue quand* $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ *est muni de la norme* $\|\ \|_\infty$.

Démonstration. — 1) D'après la proposition II.1

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \qquad |\varphi_\lambda(x)| \leqslant \exp x|\mathrm{Im}\,\lambda|.$$

Puisque f est dans $D_0(\mathbf{R})$, le théorème II.1 montre que $(T_x f)\hat{}$ est dans H_0 si bien que $T_x f$ est dans $D_0(\mathbf{R})$. En ce qui concerne le support de $T_x f$, il suffit d'utiliser le fait que le support de la mesure $W(x,y,dz)$ est dans $[|x-y|, x+y]$.

2) Il suffit de considérer le cas où f est dans $D_0(\mathbf{R})$. Pour tout $x_0 \geqslant 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$x > 0 \quad \text{et} \quad |x-x_0| \leqslant 1 \Rightarrow \operatorname{supp} T_x f \subset [-A,A],$$

d'où

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_p \leqslant \left(\int_0^A d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in [0,A]} |T_x f(y) - T_{x_0} f(y)|.$$

La continuité de l'application $(x,y) \to T_x f(y)$ sur $[0,\infty[\times[0,\infty[$ montre que le second membre tend vers 0 quand x tend vers x_0.

3) Cela se fait comme (2).

A l'aide des opérateurs de translation $(T_x)_{x \geqslant 0}$, on peut définir un produit de convolution :

PROPOSITION II.6. — 1) *Soient* $f \in L^1(\mu)$ *et* $g \in L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *L'application* $f * g$ *définie presque partout par*

$$f * g(x) = \int_0^\infty T_x f(y) g(y)\, d\mu(y)$$

est un élément de $L^p(\mu)$ *et*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p.$$

2) *Pour tout* f *dans* $L^1(\mu)$ *et tout* g *dans* $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, on a :

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}.$$

III. — LE SEMI-GROUPE DE POISSON ASSOCIÉ À L'OPÉRATEUR L

1. Équation de la chaleur.

On a vu dans le théorème II.2, que la fonction $E : \mathbf{R} \times]0,\infty[\to \mathbf{R}$ définie par

$$E(x,t) = E_t(x) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)} \varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda)$$

est positive. Par ailleurs, la proposition II.3 montre que E est de classe C^∞ et vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} E = L_x E.$$

PROPOSITION III.1. — *Il existe un entier* n_0 *tel que :*

$$\forall x_0 > 0, \qquad \forall \eta > 0, \quad \exists C > 0,$$
$$tq\; x \geqslant x_0 \;\Rightarrow\; E_t(x) \leqslant C \frac{e^{+t\eta^2}}{t^{n_0+\frac{1}{2}}} e^{(\rho-\eta)x}.$$

Démonstration. — Comme la mesure σ est tempérée, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(1+\lambda^2+\rho^2)^{n_0}} < +\infty.$$

En procédant comme dans [2], on obtient pour tout $\eta > 0$

$$E_t(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty+i\eta}^{+\infty+i\eta} w(z)\varphi_1(x,z)m(z)\,dz + \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty-i\eta}^{+\infty-i\eta} w(z)\varphi_2(x,z)m(z)\,dz$$

où on a posé

$$w(z) = (1+z^2+\rho^2)^{n_0}\exp[-t(z^2+\rho^2)]$$
$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda-z)(1+\lambda^2+\rho^2)^{n_0}},$$

et φ_1, φ_2 sont deux fonctions telles que pour tout x, $x > x_0 > 0$, et tout z, $\operatorname{Im} z = \eta$,

$$|\varphi_1(x,z)| < Ce^{(\rho-\eta)x}, \qquad |\varphi_2(x,\bar{z})| < Ce^{(\rho-\eta)x},$$

C étant une constante ne dépendant que de x_0 et de η.
La proposition est maintenant immédiate.

COROLLAIRE III.1. — 1) *Pour tout* $p \geqslant 1$ *et tout* $t > 0$, *la fonction* E_t *est dans* $L^p(\mu)$.

2) *Pour tout* $t > 0$, *on a*:

$$\|E_t\|_1 = 1.$$

3) *Pour* $t > 0$ *et* $s > 0$, *on a*:

$$E_t * E_s = E_{t+s}.$$

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition précédente. Pour le reste, il suffit d'utiliser :

$$\|E_t\|_1 = \hat{E}_t(i\rho) = 1\,, \qquad \hat{E}_t.\hat{E}_s = \hat{E}_{t+s}.$$

COROLLAIRE III.2. — *Soient* $p \in [1,2[$ *et* $f \in L^p(\mu)$. *Posons pour* $t > 0$ *et* $x \in \mathbf{R}$:

$$u(x,t) = E_t * f(x).$$

On a

1) $u(x,t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)}\hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda).$

2) u *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R} \times]0,\infty[$ *et vérifie* :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = L_x u.$$

Démonstration. — On a :

$$u(x,t) = \int_0^\infty T_x E_t(y) f(y)\, d\mu(y).$$

Notons q le conjugué de p. L'inégalité de Hölder donne

$$|u(x,t) - u(x',t)| \leqslant \|f\|_p \|T_x E_t - T_{x'} E_t\|_q.$$

La proposition II.5 montre alors que l'application $x \to u(x,t)$ est pour tout $t > 0$, une application continue.
D'autre part, il résulte de la proposition II.6 que

$$(E_t * f)\hat{\ }(\lambda) = e^{-t(\lambda^2+\rho^2)}\hat{f}(\lambda)$$

comme $\hat{f}$ est bornée, on a pour tout $t > 0$,

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)}\hat{f}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda) \quad \text{p.p.}$$

L'assertion (1) résulte alors du fait que les deux membres ci-dessus sont continus en x.

L'assertion (2) résulte de la proposition II.3.

LEMME III.1. — *On a*

$$\forall a > 0, \qquad \lim_{t\to 0} \int_a^{+\infty} \mathrm{E}_t(y)\, d\mu(y) = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que les mesures $\mathrm{E}_t(y)\, d\mu(y)$ convergent étroitement vers la masse de Dirac δ_0. Soit f dans $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$, on a

$$\int_0^\infty \mathrm{E}_t(y) f(y)\, d\mu(y) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)} \hat{f}(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

si bien que

$$\lim_{t\to 0} \int_0^\infty \mathrm{E}_t(y) f(y)\, d\mu(y) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = f(0).$$

PROPOSITION III.2. — 1) *Soit* $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ *une fonction continue sur* $\mathbf{R}$, *paire et tendant vers* 0 *à l'infini. Pour tout* $x \geqslant 0$, *on a :*

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{E}_t * f(x) = f(x).$$

En outre la convergence est uniforme sur $[0,\infty[$.

2) *Soient* $p \in [1,\infty[$ *et* $f \in \mathrm{L}^p(\mu)$; *on a* :

$$\lim_{t\to 0} \|\mathrm{E}_t * f - f\|_p = 0.$$

Démonstration. — 1) D'après la proposition II.5, l'application $x \to \mathrm{T}_x f$ est continue.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a > 0, \quad \text{tel que} \quad 0 \leqslant x \leqslant a \Rightarrow \|\mathrm{T}_x f - f\|_\infty < \varepsilon.$$

La première assertion résulte de

$$\begin{aligned} |\mathrm{E}_t * f(x) - f(x)| &= \left| \int_0^\infty (\mathrm{T}_y f(x) - f(x)) \mathrm{E}_t(y)\, d\mu(y) \right| \\ &\leqslant \int_0^a |\mathrm{T}_y f(x) - f(x)| \mathrm{E}_t(y)\, d\mu(y) + 2\|f\|_\infty \int_a^\infty \mathrm{E}_t(y)\, d\mu(y). \end{aligned}$$

2) La démonstration se fait comme pour l'assertion précédente.

THÉORÈME III.1. — 1) *Les applications* T^t, $t > 0$, *définies par*

$$T^t f = E_t * f$$

sont des opérateurs positifs et bornés de $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2) *La famille* $(T^t)_{t>0}$ *est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de* $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

3) *Pour tout* f *dans* $L^2(\mu)$

$$(T^t f)\hat{}(\lambda) = e^{-t(\lambda^2+\rho^2)}\hat{f}(\lambda).$$

En particulier, dans $L^2(\mu)$, *les opérateurs* T^t *sont auto-adjoints.*

4) *Soient* $p \in [1,2[$ *et* $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}) \cap L^p(\mu)$. *La fonction*

$$u : \mathbf{R} \times [0,\infty[\to \mathbf{C}$$

définie par :

$$u(x,t) = T^t f(x)$$

est paire en x, *de classe* C^∞ *et est solution du système :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u = L_x u \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Démonstration. — Les assertions 1, 2, et 3 sont immédiates. L'assertion 4 résulte du corollaire III.2 et de la proposition III.2.

2. Le semi-groupe de Poisson.

Le semi-groupe de Poisson $(P^t)_{t>0}$ associé à l'opérateur L est obtenu à partir du semi-groupe de Gauss $(T^t)_{t>0}$ par la formule

$$P^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{\frac{t^2}{4u}}\, du.$$

Les propriétés du semi-groupe de Gauss montrent que

1) Pour tout $t > 0$, P^t est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mu)$.

2) Soit $t > 0$. Pour tout $p \in [1,\infty]$, P^t est un opérateur positif de

$L^p(\mu)$, et si $f \in L^p(\mu)$:

$$P^t f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{\frac{t^2}{4u}} f \, du .$$

3) La famille $(P^t)_{t>0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

4) Si f est dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, $P^t f$ est dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ et

$$P^t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{\frac{t^2}{4u}} f(x) \, du .$$

En outre, quand t tend vers 0, $P^t f$ converge vers f uniformément sur $\mathbf{R}$.

D'autre part, puisque

$$T^t f = E_t * f$$

on a

5) $$P^t f = p_t * f$$

où

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} E_{\frac{t^2}{4u}}(x) \, du .$$

Les propriétés de E_t montrent que :

6) $\|p_t\|_1 = 1$ et $p_t > 0$.

7) $\hat{p}_t(\lambda) = \exp(-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}})$.

8) $p_t * p_s = p_{t+s}$.

PROPOSITION III.3. — *Soient* $p \in [1,2[$ *et* $f \in L^p(\mu)$. *Posons pour* $t > 0$ *et* $x \in \mathbf{R}$

$$u(x,t) = p_t * f(x).$$

1) *On a*

a) $u(x,t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) \, d\sigma(\lambda)$, *b) u est de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R} \times]0,\infty[$ *et vérifie :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + L_x u = 0 .$$

2) *Si on suppose de plus que f est dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$, alors u se prolonge par continuité à* $\mathbf{R} \times [0,\infty[$ *et :*

$$u(x,0) = f(x) .$$

Démonstration. — La démonstration de (1) est identique à celle du corollaire III.2. — La deuxième assertion résulte de la propriété 4 ci-dessus.

LEMME III.2. — *Il existe une constante* M *telle que pour tout* $t > 0$:

$$t \left\| \frac{\partial}{\partial t} p_t \right\|_1 \leqslant M .$$

Démonstration. — En posant $y = \dfrac{t^2}{4u}$ dans l'expression

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} E_{\frac{t^2}{4u}}(x)\, du$$

on obtient

$$p_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4y}} E_y(x)\, dy .$$

La proposition III.1 permet de dériver par rapport à t sous le signe somme, et on a alors

$$t \left| \frac{\partial}{\partial t} p_t(x) \right| \leqslant \frac{1}{t^2} \int_0^\infty \Psi\left(\frac{y}{t^2}\right) E_y(x)\, dy$$

où on a posé

$$\Psi(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{2u}\right) e^{-\frac{1}{4u}} .$$

Le lemme découle maintenant du fait que

$$\int_0^\infty E_y(x)\, d\mu(x) = 1 .$$

LEMME III.3. — *Soit* f *un élément de* $D_0(\mathbf{R})$. *Posons :*

$$u(x,t) = P^t f(x).$$

1) *Pour tout* $x \geqslant 0$ *et* $t > 0$, *on a :*

$$\left| A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \|Lf\|_1 .$$

2) *Il existe une constante* C *telle que pour tout* $x > 0$, $t > 0$ *et* $n = 1,2$:

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,t) \right| + \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant C(1+x)^2 e^{-\rho(x+t)}.$$

Démonstration. — 1) On a

$$A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_0^x L_y u(y,t) A(y)\, dy,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \left| A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| &\leqslant \int_0^\infty |L_y u(y,t)| A(y)\, dy \\ &\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty p_t(z) |T_z(Lf)(y)|\, d\mu(y)\, d\mu(z) \\ &\leqslant \|Lf\|_1 . \end{aligned}$$

2) On a

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda).$$

Il suffit alors de tenir compte du fait que $\hat{f}$ est à décroissance rapide et des majorations données dans les propositions II.1 et II.2.

Dans la suite, on désignera par ∇ l'opérateur $\left(\left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

LEMME III.4. — *Soit* f *une fonction à valeurs réelles et appartenant à* $D_0(\mathbf{R})$. *Considérons les fonctions* u *et* F *définies sur* $\mathbf{R} \times [0,\infty[$ *par :*

$$u(x,t) = P^t f(x)$$

et

$$F(x,t) = |\nabla u(x,t)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 .$$

Alors

1) F *est continue sur* $\mathbf{R} \times [0,\infty[$, *de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R} \times]0,\infty[$, *paire par rapport à* x *et vérifie :*

$$\Delta F \geqslant 0 .$$

2) *Il existe une constante* M *telle que pour tout* $x > 0$ *et* $t > 0$:

$$F(x,t) \leqslant M(1+x)^4 e^{-2\rho(x+t)} .$$

Démonstration. – 1) La première partie résulte de la proposition III.3. Montrons que $\Delta F > 0$.

On utilisera l'identité :

$$L(uv) = uLv + vLu + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}\cdot$$

Posons maintenant :

$$X = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot$$

Puisque $\Delta u = 0$, on a :

$$\Delta X = 0, \qquad \Delta Y = -\left(\frac{A'}{A}\right)' Y .$$

On en déduit

$$\Delta F = \Delta X^2 + \Delta Y^2 = 2|\nabla X|^2 + 2|\nabla Y|^2 - 2\left(\frac{A'}{A}\right)' Y^2 .$$

Comme $\dfrac{A'}{A}$ est décroissante, ΔF est positif.

2) C'est une conséquence du lemme III.3.

Proposition III.4. – *Soit* $h : \mathbf{R} \times [0,\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ *une application continue, de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R} \times]0,\infty[$ *et vérifiant :*

1) $h(x,t) = h(-x,t)$.

2) $h(x,0) = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x^2+t^2 \rightarrow +\infty} h(x,t) = 0$,

3) $\Delta h \leqslant 0$.

Alors h *est positive ou nulle.*

Démonstration. — Il existe une application $k : \mathbf{R} \times [0,\infty[\to \mathbf{R}$ telle que :

$$k(x^2,t) = h(x,t).$$

Cette fonction k vérifie :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4r\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4(\alpha+1+\mathrm{D}(r))\frac{\partial}{\partial r}\right]k(r,t) \leqslant 0$$

où

$$\mathrm{D}(x^2) = \frac{x\mathrm{C}'(x)}{2\mathrm{C}(x)}.$$

Si la fonction k n'est pas positive ou nulle, son minimum ne peut, d'après le principe du maximum de Hopf, être atteint que sur l'axe $r = 0$. Mais puisque $4(\alpha+1+\mathrm{D}(0))$ est strictement positif, il résulte de ([4] lemme, p. 1205) que la fonction k est constante. D'où la contradiction.

THÉORÈME III.2. — *Pour tout* f *dans* $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$, *on a :*

$$|\nabla \mathrm{P}^{2t}f(x)|^2 \leqslant \mathrm{P}^t|\nabla \mathrm{P}^t f(x)|^2.$$

Démonstration. — On peut supposer que f est à valeurs réelles. Soit $s \in]0,\infty[$; posons

$$h(x,t) = \mathrm{P}^t\mathrm{F}(x,s) - \mathrm{F}(x,t+s)$$

où F est la fonction du lemme III.4. Ce lemme montre que l'application g définie par

$$g(x) = \mathrm{F}(x,s)$$

est dans $\mathrm{L}^p(\mu)$, $1 < p \leqslant +\infty$. Il résulte de la proposition III.3 que

$$\mathrm{P}^t g(x) = \mathrm{P}^t\mathrm{F}(x,s) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\hat{g}(\lambda)\varphi_\lambda(x)\,d\sigma(\lambda).$$

Comme $\hat{g}$ est bornée, on a :

$$\lim_{x^2+t^2\to+\infty} \mathrm{P}^t\mathrm{F}(x,s) = 0$$

et par suite

$$\lim_{x^2+t^2\to+\infty} h(x,t) = 0.$$

Le lemme III.4 montre que g est dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$. Il résulte donc de la proposition III.3 que h est continue sur $\mathbf{R} \times [0,\infty[$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0,\infty[$ et vérifie

$$h(x,0) = 0$$

et

$$\Delta h(x,t) = \Delta P^t g(x) - \Delta F(x,t+s) \leqslant 0 \quad \text{(lemme III.4)}.$$

La proposition III.4 montre que h est positive. Il suffit de faire maintenant $s = t$.

Proposition III.5. — *Soient f et g deux éléments de $D_0(\mathbf{R})$ positifs et non identiquement nuls.*

Posons :

$$u(x,t) = P^t f(x), \qquad v(x,t) = P^t g(x).$$

Pour tout $p > 1$, on a :

1) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty t\, \Delta u^p(x,t)\, d\mu(x)\, dt = \int_0^\infty f^p\, d\mu.$

2) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty t\, \Delta(u^p v)(x,t)\, d\mu(x)\, dt = \int_0^\infty f^p g\, d\mu.$

Démonstration. — 1) Comme $\Delta u = 0$, on a

$$\Delta u^p = p(p-1)u^{p-2}|\nabla u|^2 > 0.$$

Cela permet d'écrire

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t\, \Delta u^p\, d\mu\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^n t\, \Delta u^p\, d\mu\, dt.$$

Le lemme III.3 permet de montrer, en intégrant par parties, que

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(\int_0^n t \frac{\partial^2 u^p}{\partial t^2}\, dt \right) d\mu = \int_0^\infty f^p\, d\mu.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n t \left(\int_0^n L_x u^p\, d\mu \right) dt = 0.$

Cela démontre la première formule. Pour la deuxième formule, l'égalité

$$\Delta u^p v = v\, \Delta u^p + 2\left\{ \frac{\partial u^p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u^p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

permet de montrer que $\Delta u^p v$ est intégrable (chaque terme du second membre est intégrable). On peut alors procéder comme pour la première formule.

IV. INÉGALITÉ DE LITTLEWOOD-PALEY

1. Les g-fonctions de Littlewood-Paley.

On pose pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$,

$$g_i(f)(x) = \left(\int_0^\infty t^{2i-1}\left|\frac{\partial^i}{\partial t^i}P^t f(x)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$g(f)(x) = \left(\int_0^\infty t|\nabla P^t f(x)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons établir certaines inégalités.

LEMME IV.1. — *Soient f et h deux éléments de $D_0(\mathbf{R})$ positifs et non identiquement nuls. On a :*

$$\int_0^\infty g^2(f)h\, d\mu \leqslant 4\int_0^\infty\int_0^\infty t|\nabla P^t f(x)|^2 P^t h(x)\, d\mu(x)\, dt$$

et

$$\int_0^\infty g^2(f)h\, d\mu \leqslant 8\left\{\int_0^\infty f^2 h\, d\mu + \int_0^\infty f^* g(f) g(h)\, d\mu\right\}$$

où
$$f^*(x) = \sup_{t>0}|P^t f(x)|.$$

Démonstration. — On a

$$\int_0^\infty g^2(f)h\, d\mu = \int_0^\infty\int_0^\infty s|\nabla P^s f(x)|^2 h(x)\, d\mu(x)\, ds.$$

Il résulte du théorème III.2 que :

$$\int_0^\infty g^2(f)h\, d\mu \leqslant \int_0^\infty\int_0^\infty sP^{\frac{s}{2}}|\nabla P^{\frac{s}{2}} f(x)|^2 h(x)\, d\mu(x)\, ds.$$

Il suffit maintenant de poser $t = \frac{s}{2}$ et d'utiliser le fait que P^t est autoadjoint.

La deuxième inégalité s'obtient à partir de la première comme dans [3, p. 53]. – Posons

$$u(x,t) = P^t f(x), \qquad v(x,t) = P^t h(x).$$

On a

$$2|\nabla u|^2 v = \Delta(u^2 v) - 4u\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

L'inégalité précédente donne

$$\int_0^\infty g^2(f)h\,d\mu \leqslant 2\int_0^\infty\int_0^\infty t\,\Delta(u^2 v)\,d\mu + 8\int_0^\infty\int_0^\infty tu|\nabla u|\,|\nabla v|\,d\mu\,dt.$$

La deuxième inégalité résulte donc de la proposition III.5, et de l'inégalité de Schwarz qui donne

$$\int_0^\infty\int_0^\infty tu|\nabla u|\,|\nabla v|\,d\mu\,dt \leqslant \int_0^\infty f^* g(f) g(h)\,d\mu.$$

THÉORÈME IV.1. – *Soit* $p \in]1,\infty[$. *Il existe une constante* D_p *telle que pour tout* f *dans* $D_0(\mathbf{R})$:

$$\|g(f)\|_p \leqslant D_p \|f\|_p.$$

Démonstration. – Il suffit puisque g est sous-additive

$$(g(f_1+f_2) \leqslant g(f_1) + g(f_2))$$

de considérer le cas où f est positive. On va considérer d'abord le cas où $p < 2$. On a, en posant $u(x,t) = P^t f(x)$,

$$\Delta u^p = p(p-1)u^{p-2}|\nabla u|^2$$

si bien que

$$\int_0^\infty |g(f)|^p\,d\mu = \left(\frac{1}{p(p-1)}\right)^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty \left|\int_0^\infty tu^{2-p}(x,t)\,\Delta u^p(x,t)\,dt\right|^{\frac{p}{2}} d\mu.$$

Posons

$$I(x) = \int_0^\infty t\,\Delta u^p(x,t)\,dt.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\|g(f)\|_p^p \leqslant \left(\frac{1}{p(p-1)}\right)^{\frac{p}{2}} \|\mathrm{I}\|_1^{\frac{p}{2}} \|f^*\|_p^{p\frac{2-p}{2}}.$$

Il est bien connu [3, p. 73] qu'il existe une constante A_p indépendante de f telle que :

$$\|f^*\|_p \leqslant \mathrm{A}_p \|f\|_p.$$

La proposition III.5 permet de conclure.

En procédant comme dans [3, p. 44], on peut, grâce au lemme IV.1, démontrer le théorème pour $p \geqslant 4$. Le cas où $p \in]2,4[$ résulte alors du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz [6].

LEMME IV.2. — *On a, pour tout f dans $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$,*

$$\|f\|_2 = 2\|g_1(f)\|_2.$$

Démonstration. — En posant

$$a_t(\lambda) = -(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}} e^{-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda)$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{P}^t f(x) = \int_0^\infty a_t(\lambda)\varphi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda).$$

Il résulte alors du théorème II.1 :

$$\|g_1(f)\|_2^2 = \int_0^\infty t \left\|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}^t f\right\|_2^2 dt = \int_0^\infty t\|a_t\|_2^2\, dt = \frac{1}{4}\|f\|_2^2.$$

En procédant maintenant comme dans [3, p. 56], on obtient :

PROPOSITION IV.1. — *Soient $p \in]1,\infty[$ et D_p la constante du théorème IV.1. On a, pour tout f dans $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$,*

$$(4\,\mathrm{D}_p)^{-1}\|f\|_p \leqslant \|g_1(f)\|_p \leqslant \|g(f)\|_p.$$

PROPOSITION IV.2. — *Pour tout f dans $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$, on a :*

$$g_1(f) \leqslant g_2(f).$$

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où f est réelle. Le lemme III.3 montre

$$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}^t f(x) = 0.$$

On obtient alors en intégrant par parties

$$\int_0^\infty t\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}^t f(x)\right|^2 dt = -\int_0^\infty t^2\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{P}^t f(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{P}^t f(x)\, dt.$$

L'inégalité de Schwarz montre que

$$g_1^2(f) \leqslant g_1(f)g_2(f).$$

PROPOSITION IV.3. — *Soit* $p > 2$. *Il existe une constante* X_p *telle que pour tout* f *dans* $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$:

$$\|g_2(f)\|_p \leqslant \mathrm{X}_p\|g(f)\|_p.$$

Démonstration. — Le lemme III.2 permet de faire la même démonstration que celle de [3, p. 61].

2. Fonctions de type transformée de Laplace.

Soit $m : (0,\infty) \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable et bornée, la formule

$$(\mathrm{T}_m f)\hat{} = m\hat{f}$$

définit, d'après le théorème II.1, une application linéaire $\mathrm{T}_m : \mathrm{D}_0 \to \mathrm{L}^2(\mu)$. On dira que m est un multiplicateur de $\mathrm{L}^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, s'il existe une constante M_p telle que pour tout f dans $\mathrm{D}_0(\mathbf{R})$:

$$\|\mathrm{T}_m f\|_p \leqslant \mathrm{M}_p\|f\|_p.$$

DÉFINITION. — *Une fonction* $m : (0,\infty) \to \mathbf{C}$ *est dite de type transformée de Laplace si :*

$$m(\lambda) = (\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-t(\lambda^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\, a(t)\, dt$$

où a *est une fonction mesurable et bornée.*