

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CARLOS F. B. PALMEIRA

SAMUEL SCHECTER

Feuilletages de \mathbb{R}^3 définis par des équations de Pfaff polynomiales homogènes

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 3 (1982), p. 241-250

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_241_0

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES DE \mathbf{R}^3 DÉFINIS PAR DES ÉQUATIONS DE PFAFF POLYNOMIALES HOMOGÈNES

par C.F.B. PALMEIRA et S. SCHECTER

1. Introduction.

Soit F un feuilletage de \mathbf{R}^3 défini par l'équation

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + dz = 0,$$

où P et Q sont des polynômes homogènes de même degré n et la forme $w = Pdx + Qdy + dz$ est intégrable, c'est-à-dire, $w \wedge dw = 0$. Nous rappelons que les feuilles d'un tel feuilletage sont fermées dans \mathbf{R}^3 et uniformes au-dessus de \mathbf{R}^2 . Le but de cette note est de donner une classification complète de ces feuilletages à homéomorphisme près. C'est une réponse partielle à une question de Reeb [1].

Nous rappelons que deux feuilletages F et F' définis respectivement dans des variétés M et M' sont *conjugués* s'il existe $h : M \rightarrow M'$, homéomorphisme, qui envoie chaque feuille de F sur une feuille de F' . Nous définissons plusieurs *types* de feuilletages de \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire, classes d'équivalence sous la relation de conjugaison, qui paraîtront par la suite. Nous appelons une *bifurcation* chaque ensemble de points non-séparés dans \mathbf{R}^3/F , espace quotient du feuilletage.

Type T. Feuilletage trivial par plans, c'est-à-dire, conjugué au produit $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

Type R_1 . Feuilletage par plans et cylindres avec une composante de Reeb, conjugué au feuilletage de la figure 1.

Type R_2 . Feuilletage par plans et cylindres avec deux composantes de Reeb face-à-face, conjugué au feuilletage engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la figure 2.

Type P_j , $2 \leq j$. Feuilletage par plans dont l'espace quotient \mathbb{R}^3/F a exactement une bifurcation contenant j points.

Type $P_{k,j}$, $2 \leq k \leq j$. Feuilletage par plans dont l'espace quotient \mathbb{R}^3/F a exactement deux bifurcations contenant k et j points respectivement (voir figure 3).

Nous remarquons qu'un feuilletage de \mathbb{R}^3 par plans est déterminé à homéomorphisme près par son espace quotient [2].

THEOREME. — 1) Si $n = 1$ ou 2 , F est de type T .

2) Si $n > 2$, n impair, F est de type T , R_1 , P_j avec $2 \leq j \leq n-1$, j pair; $P_{j,j}$ avec $2 \leq j \leq n-1$, ou $P_{k,j}$ avec $2 \leq k < j \leq n-1$, k et j pairs.

3) Si $n > 2$, n pair, F est de type T , R_2 , ou $P_{j,j}$ avec $2 \leq j \leq n-1$.

Au § 6 nous donnons des exemples de toutes les possibilités du théorème.

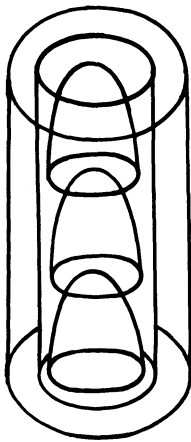


Figure 1

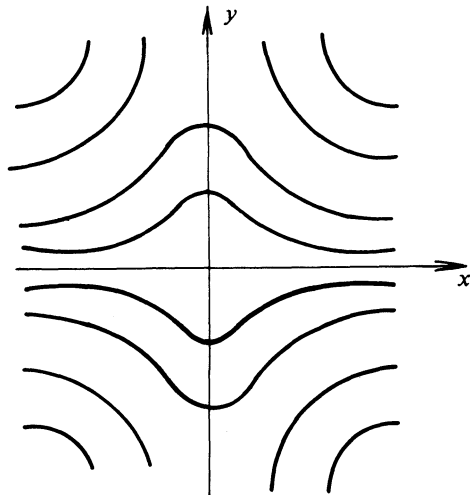


Figure 2

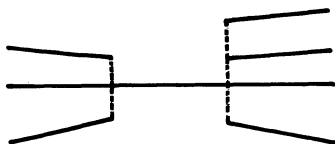


Figure 3

Soient $P = \sum_{k=0}^p z^k P_k(x, y)$ et $Q = \sum_{k=0}^p z^k Q_k(x, y)$ où pour tout k , P_k et Q_k sont des polynômes homogènes de degré $n - k$ et p est le plus grand k tel que $P_k^2 + Q_k^2 \neq 0$.

Si $p = 0$, il existe $f(x, y)$ polynôme homogène tel que $df = Pdx + Qdy$. Donc les feuilles de F sont données par $z = -f(x, y) + c$ et F est de type T.

Si $p = 1$, nous considérons l'intersection de F avec un plan $ax + by = 0$. Si on paramétrise ce plan par (t, z) où $x = bt$, $y = -at$, on trouve que cette intersection peut s'identifier avec l'ensemble de trajectoires de l'équation différentielle linéaire $(bP - aQ)dt + dz = 0$. Puisque ces trajectoires peuvent s'écrire $z = z(t)$, $-\infty < t < \infty$, il en résulte facilement que F est de type T.

Dans la suite nous supposons que $p \geq 2$. Le reste de la démonstration se fait en quatre étapes. Premièrement nous démontrons qu'il existe $u(x, y)$ polynôme homogène tel que $w = R(u, z)du + dz$, R polynôme. Deuxièmement nous étudions l'équation différentielle en deux variables $R(u, z)du + dz = 0$. Ensuite nous considérons les courbes de niveau de u . Finalement nous utilisons ces courbes de niveau et les trajectoires de $R(u, z)du + dz = 0$ pour décrire F .

2. Réduction à deux variables.

Nous avons

$$w \wedge dw = \left(-P \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

$-P \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial P}{\partial z}$ est un polynôme homogène de degré $2n - 1$ et

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ est un polynôme homogène de degré $n - 1$, donc

$$-P \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Ceci implique que pour tout k , $\frac{\partial P_k}{\partial y} - \frac{\partial Q_k}{\partial x} = 0$, donc pour tout k il existe $f_k(x, y)$ polynôme homogène de degré $n - k + 1$ tel que $df_k = P_k dx + Q_k dy$. Donc

$$w = \sum_{k=0}^p z^k df_k + dz. \tag{1}$$

LEMME 1. — Pour tout k , $df_k \wedge df_p = 0$.

Démonstration. — Nous avons $dw = \sum_{j=1}^p jz^{j-1} dz \wedge df_j$; donc, si pour tout $k > p$ nous posons $df_k = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} w \wedge dw &= - \left(\sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^p jz^{k+j-1} df_k \wedge df_j \right) \wedge dz \\ &= - dz \wedge \sum_{j=0}^{2p-1} \left(z^j \sum_{k=0}^j (j+1-k) df_k \wedge df_{j+1-k} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant k par $j + 1 - k$ le terme $(j + 1 - k) df_k \wedge df_{j+1-k}$ devient $kdf_{j+1-k} \wedge df_k$. Donc, si $\llbracket j/2 \rrbracket$ désigne la partie entière de $j/2$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j (j+1-k) df_k \wedge df_{j+1-k} &= \sum_{k=0}^{\llbracket j/2 \rrbracket} (j+1-2k) df_k \wedge df_{j+1-k} \\ &= \sum_{k=j+1-p}^{\llbracket j/2 \rrbracket} (j+1-2k) df_k \wedge df_{j+1-k} \end{aligned}$$

puisque $df_{j+1-k} = 0$ si $j + 1 - k > p$.

$$w \wedge dw = 0 \text{ implique } \sum_{k=j+1-p}^{\llbracket j/2 \rrbracket} (j+1-2k) df_k \wedge df_{j+1-k} = 0$$

pour tout j . La démonstration s'achève en considérant successivement $j = 2p - 2, 2p - 3, 2p - 4, \dots$. Il faut noter que $df_k \wedge df_p = 0$ implique qu'il existe $h_k(x, y)$ fonction rationnelle tel que $df_k = h_k df_p$. \square

LEMME 2. — Soient f et g deux polynômes homogènes à deux variables de degrés respectifs r et s , tels que $df \wedge dg = 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^s = cg^r$.

Démonstration. — Nous avons

$$rf(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad sg(x, y) = x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y}. \quad (2)$$

En plus,

$$d\left(\frac{f^s}{g^r}\right) = \frac{1}{g^{2r}} (sg^r f^{s-1} df - rf^s g^{r-1} dg) = \frac{f^{s-1}}{g^{r+1}} (sgdf - rfdg).$$

En remplaçant rf et sg par les expressions de (2) nous arrivons à

$$d\left(\frac{f^s}{g^r}\right) = \frac{f^{s-1}}{g^{r+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) (ydx - xdy) = 0$$

puisque $df \wedge dg = 0$. \square

LEMME 3. — Soient f et g deux polynômes réels, homogènes, de degrés respectifs r et s , tels que $f^s = cg^r$, $c \in \mathbb{R}$. Alors il existe un polynôme réel, homogène h de degré minimum, unique à moins de multiplication par un nombre réel, tel que $f = a_1 h^{m_1}$ et $g = a_2 h^{m_2}$ avec $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Les lemmes 1, 2 et 3 impliquent qu'il existe un polynôme réel homogène u et, pour tout k tel que $f_k \neq 0$, des nombres $\bar{a}_k \in \mathbb{R}$ et $\bar{m}_k \in \mathbb{Z}_+$ tels que $f_k = \bar{a}_k u^{\bar{m}_k}$. Nous posons $a_k = \bar{a}_k \bar{m}_k$, $m_k = \bar{m}_k - 1$, $m = m_p$, $K = \{k : 0 \leq k \leq p-1 \text{ et } f_k \neq 0\}$. Alors (1) devient

$$w = \left(a_p u^m z^p + \sum_{k \in K} a_k u^{m_k} z^k \right) du + dz, \quad (3)$$

avec $a_p \neq 0$, $m \geq 0$, $m_k \geq 0$, $p \geq 2$.

3. Etude de l'équation différentielle.

$$\frac{dz}{du} = -a_p u^m z^p - \sum_{k \in K} a_k u^{m_k} z^k. \quad (4)$$

Nous utilisons les méthodes de [3]. En faisant le changement de variables $z = \tan v$, (4) se transforme en

$$\cos^{p-2} v \frac{dv}{du} = -a_p u^m \sin^p v - \sum_{k \in K} a_k u^{m_k} \sin^k v \cos^{p-k} v. \quad (5)$$

Le feuilletage défini dans \mathbf{R}^2 par (4) est conjugué à celui défini dans $\mathbf{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ par (5).

Si $m = 0$ les trajectoires de (5) sont transverses aux lignes $v = \pm \frac{\pi}{2}$. Si $m \geq 1$ les trajectoires de (5) sont transverses aux lignes $v = \pm \frac{\pi}{2}$ sauf aux deux points $\left(0, \pm \frac{\pi}{2}\right)$. Donc selon [3] le feuilletage de (5) est conjugué à sa restriction à $(-\epsilon, \epsilon) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pour tout $\epsilon > 0$.

Supposons pour le moment que le nombre de trajectoires de (5) aboutissant à $\left(0, \pm \frac{\pi}{2}\right)$ est fini. Puisque les trajectoires de (5) sont transverses aux lignes $u = u_0$ dans $\mathbf{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, on voit que le nombre de trajectoires dans $\mathbf{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aboutissant à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (resp. $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$) est 0, 1 ou 2. Nous disons que $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (resp. $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$) est de forme i , $i = 0, 1, 2$, si le nombre de trajectoires de (5) dans $\mathbf{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aboutissant à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (resp. $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$) est i . Voir figure 4, où les trois formes possibles en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sont illustrées dans le cas $p \geq 3$, où $\left(0, \pm \frac{\pi}{2}\right)$ sont des singularités.

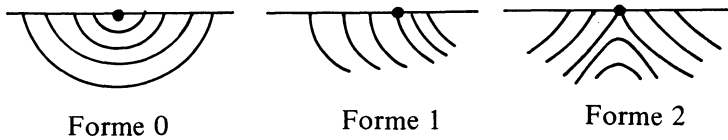


Figure 4

Si $p \geq 3$, en général chaque trajectoire aboutissant à $\left(0, \pm \frac{\pi}{2}\right)$ peut être remplacée par un secteur parabolique, ce qui ne changerait pas l'analyse. Donc nous continuons à supposer que le nombre de trajectoires aboutissant à $\left(0, \pm \frac{\pi}{2}\right)$ est fini.

Comme pour tout $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos v > 0$, le comportement

du feuilletage de la bande $\mathbf{R} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ au voisinage du bord est donné par

$$\lim_{v \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \left(-a_p u^m \sin^p v - \sum_{k \in K} a_k u^{m_k} \sin^k v \cos^{p-k} v \right) = -a_p u^m (\pm 1)^p.$$

Nous voyons alors que nous avons les cinq cas suivants : (i) m impair, p impair, $a_p < 0$: forme 0 en $(0, \frac{\pi}{2})$ et en $(0, -\frac{\pi}{2})$; (ii) m pair, p impair : forme 1 aux deux points et les trajectoires de (5) dans $\mathbf{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aboutissant à $(0, \pm \frac{\pi}{2})$ se trouvent du même côté de $u = 0$; (iii) m pair, p pair : forme 1 aux deux points et les trajectoires de (5) dans $\mathbf{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aboutissant à $(0, \pm \frac{\pi}{2})$ se trouvent de côtés différents de $u = 0$; (iv) m impair, p pair : forme 0 en un point, forme 2 en l'autre; (v) m impair, p impair, $a_p > 0$: forme 2 aux deux points.

Les trajectoires de (5) aboutissant à $(0, \pm \frac{\pi}{2})$ correspondent à des trajectoires de (4) asymptotiques à l'axe z . Donc nous avons distingué les feuilletages de (4) selon le nombre de trajectoires asymptotiques à l'axe z et leur placement relatif.

4. Courbes de niveau d'un polynôme réel, homogène, à deux variables.

LEMME 4. — Si $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est un polynôme homogène et $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $b^2 - 4ac < 0$, alors les feuilletages singuliers de \mathbf{R}^2 définis par les courbes de niveau de f et gf sont conjugués.

Démonstration. — Par un changement linéaire de coordonnées on peut se ramener au cas où $a = c = 1$ et $b = 0$. En coordonnées polaires $f(x, y) = c$ devient $r^m h(\theta) = c$ (m est le degré de f) et $g(x, y) f(x, y) = c$ devient $r^{m+2} h(\theta) = c$. Donc la conjugaison est définie par $(r, \theta) \longrightarrow (r^{m/m+2}, \theta)$. \square

Le lemme 4 implique que le feuilletage des courbes de niveau de f est caractérisé par le nombre de facteurs linéaires distincts dans la dé-

composition de f en facteurs réels irréductibles. Si tous ces facteurs sont de degré 2, on a un feuilletage par cercles concentriques (à homéomorphisme près). Autrement, on a un feuilletage en secteurs hyperboliques en nombre égal à deux fois le nombre de facteurs linéaires distincts.

5. Description du feuilletage F .

Si $n = 1$ ou 2 , F est de type T . En effet, ou $p = 0$ ou 1 (voir § 1), ou $p = 2$ et $w = (a_0 u^2 + a_1 uz + a_2 z^2) du + dz$ avec $u = ax + by$ et $a_2 \neq 0$. On se trouve dans le cas (iii) du § 3 avec u de degré 1. F est alors le produit d'un feuilletage trivial de \mathbf{R}^2 par \mathbf{R} , donc de type T . Dans la suite, $n > 2$.

Dans (3) $u(x, y)$ est un polynôme homogène de degré $d = \frac{n-p+1}{m+1}$. Considérons u comme fonction de x, y, z .

Appelons secteurs positifs (resp. négatifs) les composantes connexes de $u^{-1}((0, \infty))$ (resp. $u^{-1}(-\infty, 0))$. Posons s_+ = nombre de secteurs positifs, s_- = nombre de secteurs négatifs.

LEMME 5. — *Supposons que $u(x, y)$ a au moins un facteur linéaire réel. Alors $s_+ \leq d$ et $s_- \leq d$. De plus, si d est impair, $s_+ = s_-$; si d est pair, s_+ et s_- sont pairs.*

Considérons un plan $ax + by = 0$ sur lequel u n'est pas identiquement zéro. Le feuilletage induit par F dans un demi-plan H de $ax + by = 0$ défini par l'axe z peut s'identifier avec le feuilletage de (4) dans le demi-plan $u > 0$ ou $u < 0$, selon que H est contenu dans un secteur positif ou négatif.

Nous supposons d'abord que u a au moins un facteur linéaire réel. Nous considérons séparément les cas (i) à (v) du § 3.

i) F est de type T .

ii) Si les trajectoires de (4) asymptotiques à l'axe z sont contenues dans le demi-plan $u > 0$ (resp. $u < 0$) et $s_+ \geq 2$ (resp. $s_- \geq 2$), alors F est de type $P_{j,j}$ avec $j = s_+$ (resp. $j = s_-$). Donc le lemme 5 implique que $j \leq d = \frac{n-p+1}{m+1} \leq n-2$ puisque $p \geq 3$. Autrement F est de type T .

iii) Il y a une bifurcation correspondant aux secteurs positifs (resp. négatifs) si $s_+ \geq 2$ (resp. $s_- \geq 2$). Comme plus haut, $j \leq d = \frac{n-p+1}{m+1} \leq n-1$ puisque $p \geq 2$. Puisque

$$n = (m+1)d + p - 1,$$

m et p pairs, alors $d \not\equiv n \pmod{2}$. En utilisant le lemme 5, nous voyons : si n est pair, F est soit de type $P_{j,j}$, $2 \leq j \leq n-1$, soit de type T ; si n est impair, F est soit de type P_j , $2 \leq j \leq n-1$, j pair; soit de type $P_{k,j}$, $2 \leq k \leq j \leq n-1$, k et j pairs.

iv) F est de type P_j avec

$$j = s_+ + s_- \leq 2 \cdot \frac{n-p+1}{m+1} \leq 2 \cdot \frac{n-1}{2} = n-1;$$

j est donc pair et n est impair puisque m est impair et p est pair.

v) F est de type $P_{j,j}$, $j \leq n-2$, et n est pair.

Supposons maintenant que u n'a pas de facteur linéaire réel. Alors d est pair, et le feuilletage F est conjugué à celui engendré par la rotation autour de l'axe z de la restriction du feuilletage de (4) au demi-plan $u > 0$ ou $u < 0$, selon que u est toujours positif ou toujours négatif. Donc, si nous distinguons les mêmes cas que précédemment, nous avons : i) type T ; ii) type T ou R_2 , n pair; iii) type R_1 , n impair; iv) type R_1 , n impair; v) type R_2 , n pair.

6. Exemples.

1) $u^{(n-3)/2} z^2 du + dz = 0$ où $u = x^2 + y^2$, $n \geq 3$, n impair. F est de type R_1 .

2) $u^{(n-4)/2} z^3 du + dz = 0$ où $u = x^2 + y^2$, $n \geq 4$, n pair. F est de type R_2 .

3) $z^2 du + dz = 0$ où $u = (x + k_1 y) \dots (x + k_{n-1} y)$, $n \geq 3$. Si n est pair et les k_i ne sont pas tous égaux, F est de type $P_{j,j}$, $2 \leq j \leq n-1$, où j est le nombre de valeurs distinctes des k_i . Si n est impair, F est soit de type P_j , $2 \leq j \leq n-1$, j pair, soit de type $P_{k,j}$, $2 \leq k \leq j \leq n-1$, k et j pairs, selon les valeurs des k_i .

4) $z^3 du + dz = 0$ où $u = (x + k_1 y) \dots (x + k_{n-2} y)$, $n \geq 5$, n impair, les k_i ne sont pas tous égaux. F est de type $P_{j,j}$ où j est le nombre de valeurs distinctes des k_i .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.A. SCHWEITZER, ed., Differential Topology, Foliations and Gelfand-Fuks Cohomology: Proceedings, Rio de Janeiro, 1976, *Lecture Notes in Mathematics*, 652, Springer-Verlag (1978), 249.
- [2] C.F.B. PALMEIRA, *C.R.A.S.*, 283, série A (1976), 237.
- [3] F. PLUVINAGE, *Colloq. Math.*, 18 (1967), 90-101.

Manuscrit reçu le 27 mai 1981.

C.F.B. PALMEIRA,
 Departamento de Matemática
 Pontificia Universidade Católica do
 Rio de Janeiro
 22453 Rio de Janeiro RJ (Brasil)
 &
 S. SCHECTER
 Department of Mathematics
 North Carolina State University
 Raleigh, NC 27650 (U.S.A.).