

MARCELO MORALES

**Une propriété asymptotique des puissances
symboliques d'un idéal. Application à la théorie
de l'intersection sur les surfaces normales**

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 2 (1982), p. 219-228

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_219_0

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE
DES PUISSANCES SYMBOLIQUES
D'UN IDÉAL. APPLICATION A LA THÉORIE
DE L'INTERSECTION
SUR LES SURFACES NORMALES**

par **Marcelo MORALES**

0. Introduction.

Soit R un anneau local noethérien excellent, intègre normal de dimension de Krull 2, dont le corps résiduel k est algébriquement clos.

Mumford ([6]) définit à l'aide d'une résolution de singularités de $\text{Spec } R$ la multiplicité d'intersection $(C_1 \cdot C_2)_x$ de 2 sous-schémas fermés, irréductibles de dimension 1 distincts C_1 et C_2 dans $\text{Spec } R$ en x l'unique point fermé de $\text{Spec } R$.

Soit P_i l'idéal premier de R définissant C_i , $P_i^{(n)}$ ses puissances symboliques, (\bar{C}_i, \bar{x}_i) le normalisé de C_i ,

$$h_i : (\bar{C}_i, \bar{x}_i) \rightarrow (C_i, x_i) \hookrightarrow \text{Spec } R$$

le germe de morphisme obtenu par composition. Alors nous montrons que

$$(C_1 \cdot C_2)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_i(P_j^{(n)} \circ h_i)}{n}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

où v_i est la valuation de l'anneau $\mathcal{O}_{\bar{C}_i, \bar{x}_i}$.

0.1. Diviseurs de Weil et de Cartier ([4], Chap. II.6).

Soit X un schéma noethérien intègre, séparé, régulier en codimension 1. Par définition, un diviseur de Weil est un élément du groupe libre $\text{Div } X$ engendré par l'ensemble des sous-schémas fermés réduits et irréductibles de

codimension 1 de X . $D \in \text{Div } X$ tel que $D = \sum n_i Y_i$ est dit effectif si $n_i \geq 0$ pour tout i .

Si Y est un sous-schéma fermé réduit et irréductible de codimension 1 de X , ξ son point générique, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un anneau de valuation discrète et définit une valuation v_Y sur le corps de fractions K de X , dont le corps résiduel est $K(Y)$ le corps de fractions de Y . Si $f \in K^*$, le diviseur $\text{div}(f) = \sum v_Y(f)Y$ est appelé diviseur principal.

Les diviseurs de Cartier sur X , sont les diviseurs de Weil localement principaux. Si D est un diviseur de Cartier on lui associe $\mathcal{O}_X(D)$ un \mathcal{O}_X -Module inversible. Si en plus X est régulier, alors tout diviseur de Weil est de Cartier.

Nous utiliserons aussi des diviseurs de Weil et de Cartier à coefficients rationnels.

0.2. Degré d'un faisceau localement libre sur une courbe C .

- Une courbe est un schéma noethérien de dim 1.
- Une composante d'une courbe est un sous-schéma fermé de C de dim 1 réduit et irréductible.

Soit k un corps. Si C est propre au-dessus de k , pour tout \mathcal{O}_C -Module cohérent \mathcal{F} , $h^i(\mathcal{F}) = \text{rg}_k H^i(C, \mathcal{F})$ est fini et on pose $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$. Si \mathcal{L} est un \mathcal{O}_C -Module inversible on pose $\text{deg}_C(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_C)$.

0.3. Courbes exceptionnelles d'un morphisme propre.

Soit R un anneau noethérien, soit $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$ un morphisme propre. Une courbe est dite exceptionnelle (relativement à π) si $\pi(C)$ est de dim 0.

Si \mathcal{L} est un \mathcal{O}_X -Module inversible et C une courbe exceptionnelle, on pose

$$\mathcal{L} \cdot C = \text{deg}_C i_C^*(\mathcal{L})$$

où $i_C : C \rightarrow X$ est l'immersion fermée canonique. De même si D est un diviseur de Cartier sur X , on pose

$$D \cdot C = \mathcal{O}_X(D) \cdot C = \text{deg}_C \mathcal{O}_C(D) \quad \text{où} \quad \mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_C.$$

0.4. Soit R un anneau local noethérien régulier de dimension 2, x l'unique point fermé de $\text{Spec } R$, k le corps résiduel en x , k algébriquement clos. $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$ l'éclatement de centre x , $E = \pi^{-1}(x) = \mathbf{P}^1(k)$.

Soit C un diviseur de Cartier effectif sur R , défini par l'idéal P , la transformée totale $\pi^*(C)$ par π est par définition le diviseur de Cartier correspondant à l'idéal $P \cdot \mathcal{O}_X$ et l'on a

$$1) \pi^*C \cdot E = 0$$

et si C_1 et C_2 sont deux diviseurs de Cartier effectifs distincts sur $\text{Spec } R$ alors

$$2) \sum_{x' \rightarrow x} (\pi^*C_1 \cdot \pi^*C_2)_{x'} = (C_1 \cdot C_2)_x$$

où x étant un point fermé d'un schéma régulier V , on a par définition $(C_1 \cdot C_2)_x = \dim_k R/(f_1, f_2)$, f_1 (resp. f_2) étant une équation de C_1 (resp. C_2) au voisinage de x et $R = \mathcal{O}_{V,x}$.

0.5. Vanishing theorem ([7], p. 46).

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel propre d'une surface non singulière X sur une surface normale Y . Soit L un diviseur de Cartier sur X , on notera $L \gg 0$ (resp. $L \gg \gg 0$) si $L \cdot E \leq 0$ (resp. $L \cdot E < 0$) pour toute courbe E exceptionnelle réduite et irréductible de f .

Soit K le diviseur canonique sur X , si $K - L \gg 0$ alors $R^1 f_* (\mathcal{O}_X(L)) = 0$.

**1. Transformée totale d'un diviseur de Weil
sur une surface normale
par une résolution de singularités.**

Soit R un anneau excellent, intègre normal de dimension 2. $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$ une désingularisation, i.e., π est propre, birationnelle et X est régulier; E_1, E_2, \dots, E_r l'ensemble des courbes exceptionnelles réduites et irréductibles de π .

THÉORÈME (Du Val, Mumford). — *La matrice d'intersection $(E_i \cdot E_j)$ est définie négative.*

1.1. Si C est une courbe réduite irréductible sur $\text{Spec } R$, x son unique point fermé, la transformée stricte \tilde{C} est par définition l'adhérence schématique de $\pi^{-1}(C - \{x\})$ dans X .

DÉFINITION ([6]). — La transformée totale π^*C est le diviseur de Cartier à coefficients rationnels $\tilde{C} + \sum_{i=1}^r r_i E_i$, (r_1, \dots, r_r) étant l'unique solution du système de Cramer

$$\left(\tilde{C} + \sum_{i=1}^r r_i E_i\right) \cdot E_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, r.$$

Si C_1 et C_2 sont deux courbes intègres distinctes dans $\text{Spec } R$, Mumford définit la multiplicité d'intersection (en x)

$$\begin{aligned} (C_1 \cdot C_2)_x &= \sum_{x' \rightarrow x} (\pi^*C_1 \cdot \tilde{C}_2)_{x'} \\ &= \sum_{x' \rightarrow x} (\tilde{C}_1 \cdot \pi^*C_2)_{x'} \end{aligned}$$

et il montre ([6]) que cette définition ne dépend pas de la résolution de singularités.

En général, si P désigne l'idéal de hauteur 1 définissant C , $P \cdot \mathcal{O}_x$ n'est pas un \mathcal{O}_x -module inversible. La courbe qu'il définit sur X peut avoir des points immergés dans $\pi^{-1}(C)$. Si v_i désigne la valuation sur K , le corps de fractions de R , déterminée par E_i , il se peut que $r_i \neq v_i(P)$, $nr_i \neq v_i(P^{(n)})$, $v_i(P^{(n)}) \neq nv_i(P)$.

Cependant,

1.2. PROPOSITION. — Soit P l'idéal premier définissant C une courbe intègre. Soit $P^{(n)}$ $n \in \mathbb{N}$ les puissances symboliques de P , $\pi^*C = \tilde{C} + \sum_{i=1}^r r_i E_i$ la transformée totale de C par π , alors la suite $\frac{v_i(P^{(n)})}{n}$ converge vers r_i , $i = 1, \dots, r$.

Démonstration.

1.2.1. LEMME. — La suite $\frac{v_i(P^{(n)})}{n}$ converge.

En effet, $P^{(n)} \cdot P^{(m)} \subset P^{(n+m)}$ et donc

$$v_i(P^{(n+m)}) \leq v_i(P^{(n)}) + v_i(P^{(m)})$$

et on sait que cette propriété implique le lemme.

1.2.2. LEMME. — $P^{(n)}$ est le germe en x de $\pi_* \mathcal{O}_X(-n\tilde{C})$ pour $n \geq 0$.

En effet, \tilde{C} étant un diviseur de Cartier effectif sur X , $\mathcal{O}_X(-n\tilde{C})$ est un faisceau d'idéaux sur \mathcal{O}_X , π_* étant exact à gauche, $\pi_*(\mathcal{O}_X(-n\tilde{C}))$ est un sous- $\pi_* \mathcal{O}_X$ -Module, mais R étant normal $(\pi_* \mathcal{O}_X)_x = R$. Par ailleurs, on sait que $(\pi_* \mathcal{O}_X(-n\tilde{C}))_x = \{f \in R \mid \text{div}(f \circ \pi) \geq n\tilde{C}\}$. $(\pi_* \mathcal{O}_X(-n\tilde{C}))_x$ est un idéal primaire contenant $P^{(n)}$ et coïncide avec $P^{(n)}$ sur $\text{Spec } R - \{x\}$, car π est birationnel. Ces deux idéaux sont donc égaux par définition de $P^{(n)}$.

1.2.3. DÉFINITION. — Soit $s_1, \dots, s_r \in \mathbf{N}^r$ on pose

$$F_{s_1, \dots, s_r} = \pi_* \left(\mathcal{O} \left(- \sum_{i=1}^r s_i E_i \right) \right)_x = \{f \in R \mid v_i(f) \geq s_i, i = 1, \dots, r\}$$

et

$$P_{s_1, \dots, s_r}^{(n)} = P^{(n)} \cap F_{s_1, \dots, s_r} = \pi_* \left(\mathcal{O}_X \left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i \right) \right)_x$$

1.2.3.1. Remarque. — Posons $t_i(n) = v_i(P^{(n)})$; on a alors

i) Si $s_i \leq t_i(n)$, $i = 1, \dots, r$, $P_{s_1, \dots, s_r}^{(n)} = P^{(n)}$.

ii) L'inclusion de

$$P_{t_1(n), \dots, t_j(n)+1, \dots, t_r(n)}^{(n)} \quad \text{dans} \quad P_{t_1(n), \dots, t_j(n), \dots, t_r(n)}^{(n)}$$

est stricte pour tout $j = 1, \dots, r$.

iii) Si l'inclusion de

$$P_{s_1, \dots, s_j+1, \dots, s_r}^{(n)} \quad \text{dans} \quad P_{s_1, \dots, s_j, \dots, s_r}^{(n)}$$

est stricte on a $s_j \geq t_j(n)$.

1.2.4. Considérons pour tout $j = 1, \dots, r$ la suite exacte courte de \mathcal{O}_X -Modules

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-E_j) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{E_j} \rightarrow 0$$

et celle obtenue par tensorisation avec $\mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right)$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i \neq j} s_i E_i - (s_j + 1)E_j\right) &\rightarrow \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On en déduit une suite exacte longue de R-modules.

$$\begin{aligned} (*) \quad 0 \rightarrow \mathbf{P}_{s_1, \dots, s_j+1, \dots, s_r}^{(n)} &\rightarrow \mathbf{P}_{s_1, \dots, s_r}^{(n)} \\ &\rightarrow H^0\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right)\right) \\ &\rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i \neq j} s_i E_i - (s_j + 1)E_j\right)_x \\ &\rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right)_x \\ &\rightarrow H^1\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r s_i E_i\right)\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

π étant une désingularisation d'une surface, si \mathcal{L} est un \mathcal{O}_X -Module inversible $R^i \pi_*(\mathcal{L}) = 0$, $i \geq 2$ et $R^1 \pi_*(\mathcal{L})$ est concentré à l'origine.

1.2.5. LEMME. — Pour tout $n > 0$, $t_i(n) \geq nr_i$.

Preuve. — D'après 1.2.3.1 ii) l'inclusion de

$$\mathbf{P}_{t_1(n), \dots, t_j(n)+1, \dots, t_r(n)}^{(n)} \quad \text{dans} \quad \mathbf{P}_{t_1(n), \dots, t_j(n), \dots, t_r(n)}^{(n)}$$

est stricte. La suite exacte longue (*) avec $s_i = t_i(n)$, $i = 1, \dots, r$ montre que

$$H^0\left(E_j, \mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r t_i(n)E_i\right)\right) \neq 0,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \deg_{E_j}\left(\mathcal{O}_{E_j}\left(-n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r t_i(n)E_i\right)\right) &= -n\tilde{C} \cdot E_j - \sum_{i=1}^r t_i(n)E_i \cdot E_j \geq 0, \\ \forall j &= 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Mais $\tilde{C}.E_j = - \sum_{i=1}^r r_i E_i . E_j$, donc

$$\sum_{i=1}^r (t_i(n) - nr_i) E_i . E_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Posons $Y(n) = \left(\sum_{i=1}^r (t_i(n) - nr_i) E_i \right) d$, où $d = |\det (E_i . E_j)|$, $Y(n)$ est un diviseur à coefficients entiers tel que $Y(n).E_j \leq 0, j = 1, \dots, r$, et cela implique ([1], prop. 2) que $Y(n)$ est effectif complétant la démonstration du lemme. En effet, si $Y(n) = A - B$ où A et B sont effectifs sans composantes communes, on aura $Y(n).B \leq 0$, donc $A.B \leq B.B$, or $A.B \geq 0$, par conséquent $B.B \geq 0$, mais la matrice d'intersection est définie négative, donc $B = 0$.

1.2.6. LEMME. — Pour tout $n > 0, n \in \det (E_i, E_j)Z$ on a $t_i(n) \leq nr_i + b_i$ où $Z = \sum_{i=1}^r b_i E_i$ est un diviseur effectif qui ne dépend pas de n .

Démonstration. — Soit K le diviseur canonique sur X , remarquons qu'il existe une infinité de diviseurs exceptionnels effectifs $Z = \sum_{i=1}^r b_i E_i$ tels que :

(1) $K + Z + E_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, r$

(2) $Z + \frac{1}{2} (K + E_j) \gg 0, \forall j = 1, \dots, r.$

Posons $L = -n\tilde{C} - \sum_{i=1}^r nr_i E_i - Z$, L est donc un diviseur de Cartier sur X à coefficients entiers. Nous avons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(L - E_j) \rightarrow \mathcal{O}_X(L) \rightarrow \mathcal{O}_{E_j}(L) \rightarrow 0$$

qui donne la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X(L) \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_{E_j}(L) \rightarrow R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j)$$

mais (1) entraîne que $K - (L - E_j) \geq 0$ donc d'après le « vanishing » $R^1 \pi_* \mathcal{O}_X(L - E_j) = 0$.

Par ailleurs $(\pi_* \mathcal{O}_{E_j}(\mathbf{L}))_x = H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(\mathbf{L}))$ et

$$\begin{aligned} \dim H^0(E_j, \mathcal{O}_{E_j}(\mathbf{L})) &\geq L \cdot E_j + \chi(\mathcal{O}_{E_j}) \\ &= L \cdot E_j - E_j(E_j + K)/2 \\ &= - \left(Z + \frac{1}{2}(E_j + K) \right) \cdot E_j > 0 \quad \text{d'après (2).} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $j = 1, \dots, r$, l'inclusion de $(\pi_* \mathcal{O}_X(\mathbf{L} - E_j))_x$ dans $(\pi_* \mathcal{O}_X(\mathbf{L}))_x$ est stricte et la remarque 1.2.3.1, iii) implique $nr_j + b_j \geq t_j(n)$.

Nota. — Le lemme est vrai pour tout $n > 0$. Sa démonstration utilise un « vanishing theorem » plus fin que celui de **0.5** démontré par Giraud [2].

2. Preuve du résultat énoncé dans l'introduction.

THÉORÈME. — Soit R un anneau local noéthérien, excellent, intègre normal de dimension de Krull 2, dont le corps résiduel k est algébriquement clos. C_1, C_2 deux sous-schémas fermés réduits et irréductibles distincts de $\text{Spec } R$; P_1, P_2 les idéaux premiers tels que $\text{Spec}(R/P_i) = C_i$, $i = 1, 2$, alors

$$(C_1 \cdot C_2)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_i(P_j^{(n)} \circ h_i)}{n}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j$$

où v_i est la valuation du normalisé $\mathcal{O}_{C_i, \bar{x}_i}$ de \mathcal{O}_{C_i} .

Démonstration. — En effet, les hypothèses nous assurent l'existence d'une résolution de singularités $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$ telle que les transformées strictes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 de C_1 et C_2 ne se rencontrent pas et que \tilde{C}_2 (resp. \tilde{C}_1) rencontre une seule composante lisse E_j (resp. E_i) du diviseur exceptionnel avec $\tilde{C}_2 \cdot E_j = 1$ (resp. $\tilde{C}_1 \cdot E_i = 1$).

Par conséquent, d'après la définition

$$(C_1 \cdot C_2)_x = \sum_{y \rightarrow x} (\pi^* C_1 \cdot \tilde{C}_2)_y = r_j$$

où $\pi^* C_1 = \tilde{C}_1 + \sum_{i=1}^r r_i E_i$ et l'on sait que $r_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{E_j}(P_1^{(n)} \circ \pi)}{n}$.

Soit $\{y\} = \tilde{C}_2 \cap E_j$ et u (resp. v) une équation locale de E_j (resp. \tilde{C}_2) alors (u, v) engendrent l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X, y}$.

Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow H & \downarrow \pi \\
 (\bar{C}_2, \bar{x}_2) & \xrightarrow{h} & \text{Spec } R
 \end{array}$$

où h est la composée de la normalisation de C_2 et l'injection canonique de C_2 dans $\text{Spec } R$. H existe et est unique d'après le critère valuatif de propreté.

Soit $k = v_{E_j}(P_1^{(n)} \circ \pi)$ cela veut dire que dans $\mathcal{O}_{x,y}$,

$$P_1^{(n)} \circ \pi = (u^k \varphi_1(u,v), \dots, u^k \varphi_s(u,v))$$

où l'un des $\varphi_i(u,v) \notin (u)$.

Par ailleurs, on sait que \tilde{C}_1 ne passe pas par y , donc il existe des $\lambda_i(u,v) \in \mathcal{O}_{x,y}$ tels que

$$1 = \sum_{i=1}^s \lambda_i(u,v) \varphi_i(u,v),$$

cela entraîne qu'on aura la même relation dans $\mathcal{O}_{x,y}/(v)$

$$1 = \sum_{i=1}^s \lambda_i(u,0) \varphi_i(u,0).$$

Mais dans $\mathcal{O}_{C_2, \bar{x}_2} \simeq \mathcal{O}_{x,y}/(v)$ nous aurons

$$P_1^{(n)} \circ h(u,0) = (u^k \varphi_1(u,0), \dots, u^k \varphi_s(u,0)),$$

ce qui implique que $k = v_2(P_1^{(n)} \circ h_2)$, et finit la preuve du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. of Maths.*, 88, (1966), 129-136.
- [2] J. GIRAUD, Improvement of Grauert-Riemenschneider's theorem for a normal surface, à paraître.
- [3] A. GROTHENDIECK, E.G.A. III, *Pub. Math. IHES*, n° 11 (1961).
- [4] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, 1977, Springer-Verlag.
- [5] J. LIPMAN, Rational singularities... *Pub. Math. IHES*, n° 36 (1969).

- [6] D. MUMFORD, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Pub. Math. IHES*, n° 9 (1961).
- [7] C. P. RAMANUJAM, Remarks on the Kodaira Vanishing Theorem, *Journal of the Indian Math. Soc.*, 36 (1972), 41-51.
- [8] REEVE, A note on fractional intersection multiplicities, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 1 (1958).
- [9] P. SAMUEL, Multiplicités de certaines composantes singulières, III. *J. Math.*, 3 (1959).
- [10] ZARISKI-SAMUEL, *Algèbre commutative*. (Vol. I, II), Van Nostrand, Princeton (1958, 1960).

Manuscrit reçu le 19 juin 1981.

Marcelo MORALÈS,
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au CNRS
Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.
