ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN COUGNARD

Propriétés locales et globales de certaines extensions métacycliques

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 2 (1982), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 2 (1982), 1-12.

PROPRIÉTÉS LOCALES ET GLOBALES DE CERTAINES EXTENSIONS MÉTACYCLIQUES (*)

par Jean COUGNARD

Dans la première partie de ce travail, on montre comment associer à l'anneau des entiers de certaines extensions métacycliques un module localement libre sur un quotient d'une algèbre de groupe; pour cela on reprend, en les précisant, les techniques utilisées dans [1].

Dans la seconde partie, ces résultats permettent de constater que les relations mises en évidence par A. Fröhlich, pour les extensions modérées, sont valables pour les extensions que nous considérons indépendamment de la ramification. On en déduit que les modules localement libres construits dans la première partie sont libres.

Je tiens à remercier M. J. Taylor pour les suggestions qui ont permis d'éviter les calculs d'une version antérieure.

I. PROPRIÉTÉS LOCALES

1.

Dans ce qui suit p désigne un nombre premier impair, t un entier supérieur ou égal à 1 et n un diviseur de $p-1, n \neq 1$. On note G_t le groupe engendré par les éléments σ et τ vérifiant les relations :

$$(1) \quad \sigma^{p^t} = \tau^n = 1 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \tau\,\sigma\,\tau^{-1} = \sigma^r$$

(*) Ce travail a été terminé au King's College de Londres où l'auteur bénéficiait d'une bourse du Science Research Council.

où r désigne une racine primitive n-ième de l'unité modulo p^t. Pour tout entier u $(0 \leqslant u \leqslant t)$ on note H_u le sous-groupe de G_t engendré par $\sigma^{p^{t-u}}$, et T le sous-groupe engendré par τ.

Soient κ un corps et N_t/κ une extension galoisienne de groupe de Galois isomorphe à G_t ; on note N_u (resp. K_u) le sous-corps de N_t formé des éléments invariants par H_{t-u} (resp. H_{t-u} et T). L'entier t étant fixé, on pose pour $u = t$ (resp. $u = 0$) $N_t = N$ (resp. $N_0 = k$).

Si L est une extension algébrique de degré fini de $\mathbf{Q}$ (resp. d'un complété ℓ-adique $\mathbf{Q}_\ell$ de $\mathbf{Q}$) on note O_L la clôture intégrale de $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Z}_\ell$) dans L. Pour rester fidèle aux usages, les extensions cyclotomiques de $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Q}_\ell$) font exception à cette règle ; on note ζ_t une racine primitive p^t-ième de l'unité, $\zeta_u = \zeta_t^{p^{t-u}}$ et $\mathbf{Z}[\zeta_u] = O_{\mathbf{Q}(\zeta_u)}$ (resp. $\mathbf{Z}_\ell[\zeta_u] = O_{\mathbf{Q}_\ell(\zeta_u)}$). On se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* κ *est une extension algébrique de degré fini* m *de* $\mathbf{Q}$ *et* N/κ *une extension métacyclique de groupe de Galois isomorphe à* G_t, *alors le quotient* $O_N/O_{N_{t-1}}$ *est localement libre de rang* m *sur l'ordre* $\mathbf{Z}[G_t]/\left(\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip^{t-1}}\right)$.

La relation de commutation (2) définit un caractère p-adique μ du groupe T :

$$\tau^i \sigma \tau^{-i} = \sigma^{\mu(\tau^i)}.$$

La congruence : $p \equiv 1(n)$ fait que les caractères p-adiques irréductibles de T sont de degré 1 à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$. Ils forment un groupe multiplicatif $\hat{T}$. Pour chaque $\psi \in \hat{T}$, on note e_ψ l'idempotent de $\mathbf{Q}_p[T]$ associé à ψ.

Étant donné un anneau de Dedekind O de corps des fractions L et M/L une extension galoisienne modérément ramifiée de groupe de Galois Γ on construit la L-algèbre centrale simple A dont les éléments sont les sommes $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \gamma$ munies de la multiplication déduite par linéarité de la relation :

$$(a_\gamma \gamma)(a_{\gamma'} \gamma') = a_\gamma \gamma(a_{\gamma'}) \gamma \gamma'.$$

Ceux des éléments de A dont les coefficients a_γ appartiennent à O_M constituent un ordre héréditaire $\mathcal{O}(M/L)$ et tout $\mathcal{O}(M/L)$-module sans torsion est une somme directe de sous-modules isomorphes à des idéaux ambiges de M/L [3].

Nous utilisons de tels ordres dans deux situations :

a) L est une extension algébrique de degré fini de $\mathbf{Q}_p$. On note π une uniformisante de O_M, e l'indice de ramification de M/L ; les idéaux ambiges sont les $\pi^i O_M$. En désignant par Γ' le groupe d'inertie de l'extension M/L, ceux des idéaux $\pi^i O_M$ qui apparaissent dans la décomposition d'un $\mathcal{O}(M/L)$-module sans torsion $\mathcal{R}$ sont donnés par la structure de $(O_M/\pi O_M)\,[\Gamma']$-module de $(O_M/\pi O_M) \otimes_{O_M} \mathcal{R}$ (cf. [3]) ; en particulier on a :

$$\mathcal{O}(M/L) \simeq \left[\bigoplus_{i=0}^{e-1} \pi^i O_M \right]^{[\Gamma : \Gamma']}$$

et on a un isomorphisme de $\mathcal{O}(M/L)$-module entre $\pi^i O_M$ et $\pi^{i+e} O_M$, quel que soit i.

b) Pour $1 \leqslant u \leqslant t$, $M = \mathbf{Q}[\zeta_u]$ et $L = E_u$ l'unique sous-corps de $\mathbf{Q}(\zeta_u)$ tel que $[\mathbf{Q}(\zeta_u) : E_u] = n$. On note $E_{u,p}$ le complété de E_u pour l'unique place de E_u au-dessus de p.

2. Extensions métacycliques d'un corps p-adique.

On suppose dans ce paragraphe que κ est une extension algébrique de degré fini de $\mathbf{Q}_p$. Soit I le groupe d'inertie de l'extension N/κ. On sait que G_t/I est cyclique ; le sous-corps de N formé des éléments invariants par I est un sous-corps k^I de k, en particulier N/k est totalement et sauvagement ramifiée. Les groupes de cohomologie modifiés au sens de Tate $\hat{H}^m(H_t, O_N)$ sont des p-groupes finis sur lesquels le groupe T opère ; ce sont donc des $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules et, par restriction, des $\mathbf{Z}_p[T]$-modules finis. Le foncteur de restriction de la catégorie des $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules finis dans la catégorie des $\mathbf{Z}_p[T]$-modules finis induit un homomorphisme du groupe de Grothendieck $G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa))$ de la première de ces catégories dans le groupe de Grothendieck $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$ de la seconde. On veut démontrer :

THÉORÈME 2. — *Les* $\mathbf{Z}_p[T]$*-modules* $\hat{H}^0(H_t, O_N)$ *et* $\hat{H}_0(H_t, O_N)$ *ont même image dans* $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$.

Ce théorème se déduit, par restriction, du théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Les* $\mathcal{O}(k/\kappa)$*-modules et* $\hat{H}^0(H_t, O_N)$ *et* $\hat{H}_0(H_t, O_N)$ *ont même image dans* $G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa))$.

Le théorème 3 résulte d'une série de lemmes. Soit $G_0(\mathcal{O}(k/\kappa))$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules de type fini; si M est un $\mathcal{O}(k/\kappa)$ module de type fini (resp. fini) on note $[M]$ (resp. (M)) son image dans $G_0(\mathcal{O}(k/\kappa))$ (resp. $G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa))$). L'application qui à tout $\mathcal{O}(k/\kappa)$-module fini associe son ordre définit un homomorphisme du groupe $G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa))$ dans $\mathbf{Q}^*$ noté ord (pour tout anneau $\mathscr{A}$ on note $\mathscr{A}^*$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathscr{A}$).

Soit $x \in \kappa^*$; il existe $b \in O_\kappa - \{0\}$ tel que $bx \in O_\kappa$; ceci permet de définir un homomorphisme δ de κ^* dans $G_0^t(\mathcal{O}(k/x))$ par :

$$\delta(x) = (\mathcal{O}(k/\kappa)/b\,\mathcal{O}(k/\kappa)) - (\mathcal{O}(k/\kappa)/bx\,\mathcal{O}(k/\kappa)).$$

On en déduit la suite exacte suivante :

$$1 \to O_\kappa^* \to \kappa^* \xrightarrow{\delta} G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa)) \xrightarrow{\alpha} G_0(\mathcal{O}(k/\kappa))$$

(l'homomorphisme α est tel que $\alpha((M)) = [M]$).

Cette suite est un cas particulier de la suite exacte du théorème 2 de [4].

On en déduit immédiatement le lemme suivant dont on trouvera une démonstration dans [1] (lemme 1).

LEMME 1. — *L'homomorphisme de* $G_0^t(\mathcal{O}(k/\kappa))$ *dans* $G_0(\mathcal{O}(k/\kappa)) \times \mathbf{Q}^*$ *qui à* (M) *associe* $([M],$ *ord* $((M)))$ *est injectif.*

Remarque. — Comme $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} O_N$ est un $\mathbf{Q}_p[H_t]$-module libre, les $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules $\hat{H}^0(H_t, O_N)$ et $\hat{H}_0(H_t, O_N)$ ont même ordre; le théorème 3 équivaut donc à démontrer qu'ils ont même image dans $G_0(\mathcal{O}(k/\kappa))$. Le groupe T opérant sur O_N, $(1-\sigma)O_N$ et O_k, on a la suite exacte de $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules :

$$0 \to \hat{H}_0(H_t, O_N) \to O_N/(1-\sigma)O_N \xrightarrow{T_{N/k}} O_k \to \hat{H}^0(H_t, O_N) \to 0$$

où $T_{N/k}$ se déduit de la trace dans l'extension N/k. La démonstration du théorème 3 se réduit donc à celle de l'égalité :

$$[O_N/O_k] = [(1-\sigma)O_N].$$

LEMME 2. — *Le* $\mathcal{O}(k/\kappa)$-*module* O_N/O_k *est isomorphe à* $\mathcal{O}(k/\kappa)^{(p^t-1)/n}$.

Démonstration. — Compte-tenu des rappels, il suffit de démontrer le lemme lorsque k/κ est totalement ramifiée. Soit alors π (resp π_t) une uniformisante de k (resp K_t); on peut choisir π de telle sorte que $\tau(\pi) = \varepsilon\pi$ où ε est une racine primitive n-ième de l'unité. L'élément $\pi' = \pi^{-1}\pi_t^{(p^t-1)/n}$ est une uniformisante de O_N et, l'extension N/κ étant totalement ramifiée, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules entre O_N/O_k et $\bigoplus_{i=1}^{p^n-1} O_k\pi'^i$; il suffit alors de constater que $O_k\pi^i$ et $O_k\pi'^i$ sont $\mathcal{O}(k/\kappa)$-isomorphes.

Notation. — Soit θ l'élément de $\mathbf{Z}_p[H_t]$ égal à $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1} \mu(\tau^{-i})\sigma^{\mu(\tau^i)}$.

L'utilité de cet élément tient au résultat suivant dont on trouvera une démonstration dans [2].

LEMME 3. — *L'idéal d'augmentation* $(1-\sigma)\mathbf{Z}_p[H_t]$ *de* $\mathbf{Z}_p[H_t]$ *admet l'élément* θ *comme générateur; dans* $\mathbf{Z}_p[G_t]$ *on a la relation* $e_\psi\theta = \theta e_{\psi\mu^{-1}}$ *pour tout* ψ *de* $\hat{T}$.

Démonstration du théorème 3. — Il suffit de démontrer que les $\mathcal{O}(k/\kappa)$-modules O_N/O_k et $(1-\sigma)O_N$ sont isomorphes; donc, si k^I est le sous-corps de k invariant par le groupe d'inertie, que les $(O_k/(\pi))[\mathrm{Gal}(k/k^I)]$-modules $(O_k/(\pi)) \otimes_{O_k}(O_N/O_k)$ et $(O_k/(\pi)) \otimes_{O_k}(1-\sigma)O_N$ sont isomorphes. La multiplication par θ dans O_N définit un O_k-isomorphisme entre O_N/O_k et $(1-\sigma)O_N$ et le nombre de facteurs simples de $(O_k/(\pi)) \otimes_{O_k}(1-\sigma)O_N$ associés à l'idempotent $e_{\psi\mu^{-1}}$ est égal à celui des facteurs simples de $(O_k/(\pi)) \otimes_{O_k}(O_N/O_k)$ correspondant à l'idempotent e_ψ; d'après le lemme 2 ce nombre est indépendant de ψ. Ceci termine la démonstration du théorème 3.

Soient u et v deux entiers vérifiant $0 \leqslant v \leqslant u \leqslant t$, le groupe T opère sur les groupes

$$\hat{H}^0(H_{t-v}/H_{t-u}, O_{N_u}) \quad \text{et} \quad \hat{H}_0(H_{t-v}/H_{t-u}, O_{N_u}).$$

En appliquant le théorème 3 à l'extension N_u/K_v on obtient :

COROLLAIRE 1. — *Les* $\mathbf{Z}_p[T]$*-modules*

$$\hat{H}^0(H_{t-v}/H_{t-u}, O_{N_u}) \quad \textit{et} \quad \hat{H}_0(H_{t-v}/H_{t-u}, O_{N_u})$$

ont même image dans $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$.

Soit $\Lambda_t = \mathcal{O}(\mathbf{Q}_p(\zeta_t)/E_{t,p})$; les groupes T et Gal $(\mathbf{Q}_p(\zeta_t)/E_{t,p})$ sont cycliques d'ordre n donc isomorphes. Fixons cet isomorphisme en envoyant le générateur τ de T sur l'automorphisme défini par $\zeta_t \longmapsto \zeta_t^r$; on en déduit un isomorphisme d'anneaux entre Λ_t et $\mathbf{Z}_p[G_t]/\left(\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip^{t-1}}\right)$ en donnant ζ_t pour image à σ. On a :

COROLLAIRE 2. — *Le Λ_t-module $O_N/O_{N_{t-1}}$ est libre de rang* $[\kappa : \mathbf{Q}_p]$.

Démonstration. — D'après [3] (propositions 3 et 6) il faut et il suffit que $(O_N/O_{N_{t-1}})/(1-\sigma)(O_N/O_{N_{t-1}})$ soit un $\mathbf{F}_p[T]$-module libre de rang $[\kappa : \mathbf{Q}_p]$. On note $\mathfrak{T}$ (resp. $\mathfrak{T}'$) la trace dans l'extension N/k (resp. N_{t-1}/k) restreinte aux anneaux d'entiers. On a immédiatement la suite exacte :

$$0 \to \ker \mathfrak{T}/(\ker \mathfrak{T}' + (1-\sigma)O_N) \to O_N/(O_{N_{t-1}} + (1-\sigma)O_N)$$
$$\to \mathfrak{T}(O_N)/p\mathfrak{T}'(O_{N_{t-1}}) \to 0$$

or dans $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$ nous avons :

$$\ker \mathfrak{T}/(\ker \mathfrak{T}' + (1-\sigma)O_N) = (\hat{H}_0(H_t, O_N)) - (\hat{H}_0(H_t/H_1, O_{N_{t-1}})),$$

ce qui, d'après le théorème 3 est égal à :

$$(O_k/pO_k) - (\mathfrak{T}(O_N)/p\mathfrak{T}'(O_N)),$$

ce qui donne dans $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$:

$$(O_N/(O_{N_{t-1}} + (1-\sigma)O_N)) = (O_k/pO_k) = [\kappa : \mathbf{Q}_p](\mathbf{F}_p[T]),$$

car l'extension k/κ est modérément ramifiée et O_k est $\mathbf{Z}_p$-libre de rang $[\kappa : \mathbf{Q}_p]$.

3. Propriétés locales d'extensions métacycliques relatives de $\mathbf{Q}$.

Dans ce paragraphe κ est une extension algébrique de degré fini de $\mathbf{Q}$. Pour toute place $\mathscr{L}$ d'une extension L de $\mathbf{Q}$ de degré fini, on note $L_{\mathscr{L}}$ (resp. $O_{L_{\mathscr{L}}}$) son complété (resp. le complété de la clôture intégrale de $\mathbf{Z}$) en $\mathscr{L}$.

Fixons $u (0 \leqslant u \leqslant t)$, notons $\mathfrak{p}_i$ les idéaux premiers au-dessus de p dans N_u, $\mathfrak{P}_{i,j}$ ceux de N au-dessus de $\mathfrak{p}_i$.

Soit $D_{i,j}$ le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}_{i,j}$ dans N/κ puis

$$V_{i,j}^u = H_{t-u} \cap D_{i,j}.$$

Nous pouvons alors énoncer

PROPOSITION 1. — *Les groupes* $\hat{H}_0(H_{t-u},O_N)$ *et* $\hat{H}^0(H_{t-u},O_N)$ *ont même image dans* $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$.

Démonstration. — Pour tout entier m, le groupe $\hat{H}^m(H_{t-u},O_{N_t})$ est un p-groupe abélien fini donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \hat{H}^m(H_{t-u},O_N)$ c'est-à-dire à $\hat{H}^m(H_{t-u},\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} O_N)$ qui peut s'écrire $\hat{H}^m\left(H_{t-u}, \prod_{\mathfrak{P}_{i,j}} O_{N_{\mathfrak{P}_{i,j}}}\right)$. Ce dernier groupe est lui-même isomorphe à $\prod_{\mathfrak{p}_i|p} \hat{H}^m\left(H_{t-u}, \prod_j O_{N_{\mathfrak{P}_{i,j}}}\right)$. Pour chaque indice i fixons $\mathfrak{P}_i$ une des places $\mathfrak{P}_{i,j}$ au-dessus de $\mathfrak{p}_i$; on a l'isomorphisme :

$$\prod_j O_{N_{\mathfrak{P}_{i,j}}} \simeq \mathbf{Z}_p[H_{t-u}] \otimes_{\mathbf{Z}_p[V_{1,j}^u]} O_{N_{\mathfrak{P}_i}}$$

ce qui d'après le lemme de Shapiro nous donne :

$$\hat{H}^m(H_{t-u},O_N) \simeq \prod_{\mathfrak{p}_i|p} \hat{H}^m(V_i^u,O_{N_{\mathfrak{P}_i}}).$$

Le groupe T opère sur $\prod_{\mathfrak{p}_i|p} \hat{H}^m(V_i^u,O_{N_{\mathfrak{P}_i}})$. Soit Γ_0^m l'un des groupes $\hat{H}^m(V_i^u,O_{N_{\mathfrak{P}_i}})$, T_0 son stabilisateur dans T et $\Gamma^m = \prod_{h \in T/T_0} h\Gamma_0^m$. On a $\Gamma^m \simeq \mathbf{Z}_p[T] \otimes_{\mathbf{Z}_p[T_0]} \Gamma_0^m$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3 aux groupes Γ_0^m pour les valeurs de m convenables et de remarquer que l'extension des scalaires de $\mathbf{Z}_p[T_0]$ à $\mathbf{Z}_p[T]$ définit un homomorphisme de $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T_0])$ dans $G_0^t(\mathbf{Z}_p[T])$.

Démonstration du théorème 1. — En procédant comme dans le cas local complet on obtient un isomorphisme entre les ordres

$$\mathcal{O}(\mathbf{Q}(\zeta_t)/E_t) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}[G_t]/\left(\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip^{t-1}}\right).$$

Puisque p est le seul ramifié dans $\mathbf{Q}(\zeta_t)/E_t$ il faut et il suffit que $\mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}}(O_N/O_{N_{t-1}})$ soit libre de rang $[\kappa : \mathbf{Q}]$ sur $\mathcal{O}(\mathbf{Q}_p(\zeta_t)/E_{t,p})$ donc, que $O_N/(1-\sigma)O_N + O_{N_{t-1}}$ soit $\mathbf{F}_p[T]$ libre de rang $[\kappa : \mathbf{Q}]$. La démonstration est alors analogue à celle du corollaire 2 du théorème 3.

II. PROPRIÉTÉS GLOBALES

On suppose désormais que le corps de base κ est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Pour simplifier les notations, on note Λ_t l'ordre $\mathbf{Z}[G_t]/\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip^{t-1}}$.

1. Énoncé des résultats.

Soit $\bar{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$, $\Omega_{\mathbf{Q}}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$, $J(\bar{\mathbf{Q}})$ la limite inductive des groupes d'idèles $J(L)$ des extensions algébriques L de degré fini de $\mathbf{Q}$. Considérons χ un caractère fidèle de degré un de H_t, θ une représentation de G_t dont le caractère est $\chi_* = \mathrm{Ind}_{H_t}^{G_t}(\chi)$. On peut choisir θ à valeurs dans $M_n(\bar{\mathbf{Q}})$; le groupe $\Omega_{\mathbf{Q}}$ opérant sur $M_n(\bar{\mathbf{Q}})$, on obtient pour tout ω de $\Omega_{\mathbf{Q}}$ une représentation θ^ω de caractère χ_*^ω. Si on fixe dans $\Omega_{\mathbf{Q}}$ un système de représentants des classes modulo $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E_t)$, on obtient une famille χ_i $(1 \leqslant i \leqslant p^{t-1}(p-1)/n)$ de caractères et le groupe abélien libre engendré par les χ_i est isomorphe, de façon canonique, au groupe de Grothendieck Γ de l'algèbre semi-simple $\bar{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{Q}[G_t]\Big\backslash \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^{ip^{t-1}}\right)$. Cet isomorphisme commute avec l'action de $\Omega_{\mathbf{Q}}$.

Pour tout élément x de O_{N_t}, on prend le déterminant de la somme $\sum_{g \in G_t} g(x)\theta^\omega(g^{-1})$, on obtient un élément noté $\langle x,\chi_*^\omega\rangle$. En notant $\tau(\chi_*^\omega)$ la somme de Gauss galoisienne associée au caractère χ_*^ω et à l'extension $N_t/\mathbf{Q}$ on constate que $\langle x,\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1}$ appartient à E_t (cf. [2] Prop. 1.5 et Th. 3).

On se propose de démontrer :

THÉORÈME 4. – *L'idéal fractionnaire* $\langle O_{N_t},\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1}$ *de* E_t *engendré par les éléments* $\langle x,\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1}$, *x parcourant* O_{N_t}, *est égal à* O_{E_t}.

Remarque. — Il est aisé de vérifier que $\langle x,\chi_*^\omega\rangle$ ne dépend que de la classe de x dans $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$; ce module étant localement libre sur Λ_t, on peut trouver pour chaque place finie ℓ de $\mathbf{Z}$, un élément a_ℓ de O_{N_t} tel que la composante semi-locale de $\langle O_{N_t},\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1}$ pour les places de E_t au-dessus de ℓ soit engendrée par $\langle a_\ell,\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1}$.

Désignons par S l'ensemble des places finies de $\mathbf{Z}$. L'application qui à χ_*^ω fait correspondre $(\langle a_\ell,\chi_*^\omega\rangle\tau(\chi_*^\omega)^{-1})_{\ell\in S}$ se prolonge par linéarité en un élément de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\Gamma,J(\bar{\mathbf{Q}}))$. Cette application représente la classe de $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$ dans le groupe $\mathrm{Cl}(\Lambda_t)$ des classes des Λ_t-modules localement libres de type fini tel qu'il est décrit dans [3] (Chapitre I).

COROLLAIRE. — *Le module* $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$ *est* Λ_t*-libre.*

D'après le théorème, toutes les composantes locales de l'application qui représente $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$ dans $\mathrm{Cl}(\Lambda_t)$ sont des unités. Ceci veut dire que, si l'on fait l'extension des scalaires à un ordre maximal $\mathfrak{M}$ contenant Λ_t, le module $\mathfrak{M}\otimes_{\Lambda_t}(O_{N_t}/O_{N_{t-1}})$ est $\mathfrak{M}$-libre ([3] Proposition 5.1 du Chapitre III et remarque 2). Comme l'ordre Λ_t est héréditaire cela veut bien dire que $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$ est Λ_t-libre ([6] Théorème 40.16).

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que les valuations des idéaux étudiés sont nulles pour les différentes places de E_t. En ce qui concerne les places premières à np, c'est la conséquence du Théorème 4 de [2].

Pour tout diviseur premier ℓ de np et tout module, on indique la localisation en ℓ en mettant cette lettre en indice.

2. Étude pour les places ℓ divisant n.

On peut, bien entendu, se contenter de faire l'étude pour un seul caractère χ_*. Dans ce paragraphe, l'automorphisme τ de $N_t/\mathbf{Q}$ est considéré comme la restriction à N_t d'un élément de $\Omega_{\mathbf{Q}}$ que l'on note encore τ. On sait que $(O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_\ell$ est $\Lambda_{t,\ell}$-libre ; soit a_ℓ un élément de O_{N_t} dont la classe $\overline{a_\ell}$ est une $\Lambda_{t,\ell}$-base. On en déduit que les éléments $\overline{\tau^i(a_\ell)}$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ forment une $\mathbf{Z}[\zeta_t]_\ell$-base de $(O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_\ell$. Nous pouvons mettre en évidence une autre base de ce module. L'extension N_t/k

est modérément ramifiée en ℓ, donc $O_{N_{t,\ell}}$ est $O_{k,\ell}[H_t]$-libre de rang 1, soit b_ℓ une base et (c_i) $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ une $\mathbf{Z}_\ell$-base de $O_{k,\ell}$. On en déduit que les éléments $\overline{c_i b_\ell}$ forment une $\mathbf{Z}[\zeta_t]_\ell$-base de $(O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_\ell$. On peut alors utiliser la méthode de la démonstration du théorème 7 de [2] :

Pour toute famille (w_i) $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ d'éléments de O_{N_t} dont les classes dans $(O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_\ell$ constituent une base, on construit la matrice W à n-lignes et n-colonnes où les lignes sont indexées par τ^u, les colonnes par i et dont le coefficient (τ^u, i) est $\sum_{h \in H_t} h\tau^u(w_i)\chi(h^{-1})$. Comme dans la remarque qui suit le théorème 4, on constate aisément que cet élément ne dépend que de la classe de w_i dans $O_{N_t}/O_{N_{t-1}}$. Pour deux bases différentes, on obtient deux matrices qui se déduisent l'une de l'autre par multiplication par un élément de $GL_n(\mathbf{Z}[\zeta_t]_\ell)$. En calculant le déterminant des matrices W obtenues pour chacune des bases mises en évidence ci-dessus, on obtient :

$$\det(c_i^{\tau^j}) \prod_{j=0}^{n-1} \langle b_\ell, \chi^{\tau^{-j}} \rangle^{\tau^j} = \langle a_\ell, \chi_* \rangle u$$

où u est une unité de $\mathbf{Z}[\zeta_t]_\ell$ et $\langle b_\ell, \chi^{\tau^{-j}} \rangle$ la résolvante de Lagrange associée à b_ℓ et $\chi^{\tau^{-j}}$.

On peut remarquer, puisque N_t/k est modérément ramifiée, que $\prod_{j=0}^{n-1} \langle b_\ell, \chi^{\tau^{-j}} \rangle^{\tau^j} \tau_\ell(\chi)^{-1}$ est une unité en ℓ ([2] Th. 4), où $\tau_\ell(\chi)$ est la somme de Gauss locale associée au caractère χ et à l'extension N_t/k. Les propriétés des sommes de Gauss locales et globales ([5] Propositions 4.1 et 7.1, Théorème 8.1) nous permettent de conclure pour les places divisant n.

3. Étude de la p-composante.

Puisqu'il n'y a qu'un seul idéal premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de p dans E_t, il suffit de démontrer que

$$\prod_{\omega \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_t)/\mathbf{Q})} \langle a_p, \chi_*^\omega \rangle \tau(\chi_*^\omega)^{-1}$$

est une unité en p.

Si on note ρ_t (resp. ρ_{t-1}) la représentation régulière de G_t (resp. G_t/H_1), on a :

$$\sum_{\omega \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_t)/\mathbf{Q})} \chi_*^\omega = \rho_t - \rho_{t-1}.$$

Les propriétés fonctionnelles des résolvantes font que la quantité à étudier est égale à

$$\langle a_p, \rho_t \rangle \langle a_p, \rho_{t-1} \rangle^{-1} \tau^{-1}(\rho_t - \rho_{t-1}).$$

On sait par ailleurs ([2] formules 1.1 et 1.2) que $\langle a_p, \rho_t \rangle^2$ est le discriminant dans $N_t/\mathbf{Q}$ du réseau engendré par a_p et ses conjugués tandis que $\langle a_p, \rho_{t-1} \rangle^2$ est le discriminant dans $N_{t-1}/\mathbf{Q}$ du réseau engendré par $T_{N_t/N_{t-1}}(a_p)$ et ses conjugués. D'où :

$$\langle a_p, \rho_t - \rho_{t-1} \rangle^2 \tau(\rho_t - \rho_{t-1})^{-2} = D_{N_t/\mathbf{Q}} \times D_{N_{t-1}/\mathbf{Q}}^{-1} \times [O_{N_t} : a_p \mathbf{Z}[G_t]]^2 \times [O_{N_{t-1}} : T_{N_t/N_{t-1}}(a_p)\mathbf{Z}[G_t/H_1]]^{-2}. \quad (3)$$

Mais le choix de a_p conduit au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & T_{N_t/N_{t-1}}(a_p)\mathbf{Z}[G_t/H_1] & \to & a_p \mathbf{Z}_p[G_t] & \to & (O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
 & 0 \to & O_{N_{t-1},p} & \to & O_{N_t,p} & \to & (O_{N_t}/O_{N_{t-1}})_p & \to & 0
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux du centre et de gauche sont injectifs. L'application du lemme du serpent montre que les p-composantes des indices de la formule (3) sont égales. On en déduit que les p-composantes de

$$\langle a_p, \rho_t - \rho_{t'} \rangle^2 \tau(\rho_t - \rho_{t-1})^{-2} \quad \text{et} \quad D_{N_t/\mathbf{Q}} \times D_{N_{t-1}/\mathbf{Q}}^{-1}$$

sont égales. Il suffit alors d'appliquer la « Führerdiskriminantenproduktformel » et la décomposition du conducteur d'Artin en produit de sommes de Gauss pour terminer la démonstration du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. COUGNARD, Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré pq des rationnels, *Compositio Mathematica*, vol. 40, fasc. 3 (1980), 407-416.

[2] A. Fröhlich, Arithmetic and Galois module structure for tame extensions, *J. reine angew. Math.*, 286/287 (1976), 380-440.
[3] A. Fröhlich, Classgroups, in particular Hermitian classgroups (à paraître).
[4] J.-F. Jaulent, Structures galoisiennes dans les extensions métabéliennes, Thèse de 3e cycle (Besançon, 1979).
[5] J. Martinet, *Character theory and Artin* L*-functions. Algebraic Number fields*, édité par A. Fröhlich, Academic Press, 1977.
[6] L. Reiner, *Maximal orders*, Academic Press, 1975.
[7] M. I. Rosen, Représentations of twisted group rings, Thesis, Princeton University, 1963.
[8] S. M. J. Wilson, Reduced norms in the K-theory of orders, *J. of Algebra*, 46 (1977), 1-11.

Manuscrit reçu le 6 juillet 1981.

Jean Cougnard,
E.R.A. du CNRS n° 070654
Laboratoire de Mathématiques
Faculté des Sciences de Besançon
Route de Gray – La Bouloie
25030 Besançon Cedex.