ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL ZINSMEISTER

Courbes de Jordan vérifiant une condition corde-arc

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 2 (1982), p. 13-21

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_13_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 2 (1982), 13-21.

COURBES DE JORDAN VÉRIFIANT UNE CONDITION CORDE-ARC

par Michel ZINSMEISTER

1. Introduction.

Soit Γ un arc de Jordan fermé rectifiable du plan complexe. Pour $M, N \in \Gamma$ on note $\widehat{MN}$ la plus petite des longueurs des deux sous-arcs de Γ joignant M et N.

DÉFINITION 1. — *On dit que* Γ *vérifie une condition corde-arc s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout couple* (M,N) *de points de* Γ *on ait :*

$$\widehat{MN} \leqslant CMN.$$

Keldysh et Lavrent'ev ont été les premiers à étudier ces courbes [5] et les travaux de Coifman et Meyer [3] ont montré le rôle important que joue cette classe de courbes dans le problème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy.

Soit Ω le domaine limité par l'arc de Jordan Γ vérifiant une condition corde-arc et Φ une transformation conforme du disque unité D sur Ω. Le but de cet article est d'étudier les propriétés de Φ et notamment celles concernant la distorsion au bord. Cette étude nous amène à considérer une autre classe de courbes de Jordan, un peu plus générale que la précédente :

si Γ est une courbe de Jordan fermée (non nécessairement rectifiable) et (M,N) un couple de points de Γ, appelons d(M,N) le plus petit des diamètres des deux sous-arcs de Γ joignant M et N.

DÉFINITION 2. — *On dit que* Γ *est un quasicercle s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout couple de points* (M,N) *de* Γ *on ait :*

$$d(M,N) \leqslant CMN.$$

Cette classe de courbes a été introduite par Ahlfors [1].

2. Généralités.

Dans toute la suite Γ désignera un arc de Jordan fermé quelconque entourant le domaine Ω et Φ une transformation conforme du disque unité D sur Ω.

PROPOSITION 1. — *Φ se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{D}$ sur $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ et en particulier $\theta \to \Phi(e^{i\theta})$ est une paramétrisation de Γ.*

— Γ est rectifiable si, et seulement si, $\Phi' \in H^1(D)$, l'espace de Hardy usuel du disque et, si c'est le cas, les propriétés suivantes sont vraies :

— $\theta \to \Phi(e^{i\theta})$ est absolument continue et l'on a

$$\frac{d}{d\theta}(\Phi(e^{i\theta})) = ie^{i\theta}\Phi'(e^{i\theta})(= ie^{i\theta}\lim_{r\to 1}\Phi'(re^{i\theta})\ p.p.$$

— Φ est conforme en presque tout point du cercle unité.

Tous ces résultats sont classiques. On se reportera par exemple à [10] pour les démonstrations.

DÉFINITION 3. — *On dit que Ω est un domaine de Smirnov si Γ est rectifiable et si la fonction Φ' est extérieure, ce qui signifie que la fonction* $\mathrm{Log}\,|\Phi'|$, *harmonique dans* D, *est l'intégrale de Poisson de sa valeur au bord.*

La condition de Smirnov joue un rôle important dans la théorie des espaces de Hardy $H^p(\Omega)$ (voir [9]). On vérifie facilement par exemple que tout domaine de Jordan étoilé est un domaine de Smirnov (à condition que Γ soit rectifiable).

Keldysh et Lavrent'ev [5] ont montré que si Γ est corde-arc, alors Ω est un domaine de Smirnov. Nous utiliserons ce résultat dans la suite.

3. La transformation conforme et la condition corde-arc.

Avant d'énoncer le théorème principal, rappelons la définition de la classe A^∞ de poids de Muckenhoupt.

DÉFINITION 4. — *Soit p un réel tel que $1 < p < \infty$ et w une fonction positive intégrable sur ∂D. On dit que $w \in A^p(\partial D)$ s'il existe une constante*

$C > 0$ *telle que pour tout intervalle* I *de* ∂D *on ait :*

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(z)|dz|\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(z)^{-1/p-1}|dz|\right)^{p-1} \leqslant C,$$

on note alors $A^\infty(\partial D) = \bigcup_{p>1} A^p(\partial D)$.

(Voir [2] pour plus de détails sur cette classe.)

THÉORÈME 1. — Γ *vérifie une condition corde-arc si et seulement si* Γ *est un quasicercle,* Ω *est un domaine de Smirnov et* $|\Phi'|$, *restreint à* ∂D, *est un poids de* $A^\infty(\partial D)$.

Le point de départ de la démonstration du théorème 1 est un lemme dû à Pommerenke [7].

LEMME 1. — *Si* Γ *vérifie une condition corde-arc avec une constante* α, *il existe une constante* β *ne dépendant que de* α *telle que*

$$(1) \qquad \forall \zeta \in D, \qquad \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant \beta(1-|\zeta|)\,|\Phi'(\zeta)|.$$

Réciproquement, si Γ *est un quasicercle avec une constante* α *et s'il existe* β *tel que l'on ait* (1), *alors* Γ *vérifie une condition corde-arc avec une constante* $\leqslant C\alpha\beta$.

(Dans cet énoncé, $I(\zeta)$ désigne l'intervalle de centre $\dfrac{\zeta}{|\zeta|}$ et de longueur $1-|\zeta|$).

Passons alors à la démonstration du théorème 1. Supposons tout d'abord que Γ vérifie une condition corde-arc. Alors on sait déjà que Γ est un quasicercle et que Ω est un domaine de Smirnov. Par le lemme 1, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(2) \qquad \forall \zeta \in D, \qquad \frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant C|\Phi'(\zeta)|.$$

Ce résultat, combiné avec le théorème de distorsion de Koebe permet de montrer (voir [7]) que $\operatorname{Log}|\Phi'| \in BMO(\partial D)$ et donc que $\operatorname{Log}\dfrac{1}{|\Phi'|} \in BMO(\partial D)$. D'après l'inégalité de John et Nirenberg, il existe a,

$c > 0$ tels que

$$\forall \zeta \in D, \ \frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \frac{1}{|\Phi'(z)|^a}\,|dz| \leqslant C \exp\left(-a\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \operatorname{Log}|\Phi'(z)|\,|dz|\right)$$
$$\leqslant \frac{C}{|\Phi'(\zeta)|^a}\exp a\left(\operatorname{Log}|\Phi'(\zeta)| - \frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \operatorname{Log}|\Phi'(z)|\,|dz|\right)\cdot$$

Mais $\operatorname{Log}|\Phi'(\zeta)|$ est l'intégrale Poisson de ses valeurs au bord et, comme $\operatorname{Log}|\Phi'| \in \mathrm{BMO}(\partial D)$, on en déduit facilement

$\exists C > 0 | \forall \zeta \in D,$

$$(3) \quad \left|\operatorname{Log}|\Phi'(\zeta)| - \frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \operatorname{Log}|\Phi'(z)|\,|dz|\right| \leqslant C\,\|\operatorname{Log}|\Phi'|\|_{\mathrm{BMO}}.$$

De toute cette étude on déduit l'existence d'une constante C' telle que :

$$(4) \qquad \forall \zeta \in D, \quad \left(\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \frac{1}{|\Phi'(z)|^a}\,|dz|\right)^{1/a} \leqslant C'\frac{1}{|\Phi'(\zeta)|}\cdot$$

En multipliant (2) et (4) on s'aperçoit alors que $|\Phi'| \in A^p(\partial D)$ avec $p = 1 + \frac{1}{a}\cdot$

Réciproquement, supposons maintenant que Γ est un quasicercle, Ω un domaine de Smirnov et $|\Phi'|$ un poids de $A^\infty(\partial D)$. On sait alors que $|\Phi'|$ vérifie une inégalité de Hölder inverse du type :

$$\exists C > 0, \quad \forall \zeta \in D,$$
$$\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant C \exp\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} \operatorname{Log}|\Phi'(z)|\,|dz|\right)\cdot$$

Mais Ω est un domaine de Smirnov et donc (3) est encore vrai, car $\operatorname{Log}|\Phi'| \in \mathrm{BMO}(\partial D)$. On en déduit

$$\exists C' > 0, \quad \forall \zeta \in D,$$
$$\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant C'|\Phi'(\zeta)|$$

et le lemme 1 permet de conclure.

Le théorème 1 est ainsi démontré. Signalons que ce théorème a été indépendamment démontré par D. S. Jerison et C. Kenig [4], mais les méthodes sont différentes.

COROLLAIRE 1. — *Si* Γ *vérifie une condition corde-arc, il existe un réel* $p > 1$ *tel que* Φ' *appartienne à l'espace de Hardy* $H^p(D)$.

Démonstration. — Cela découle immédiatement de la propriété des poids de la classe A^∞ de satisfaire une inégalité de Hölder inverse du type

$$\exists C > 0, \quad \exists p > 1, \quad \forall I \subset \partial D,$$
$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^p(z)\,|dz|\right)^{1/p} \leqslant \frac{C}{|I|}\int_I w(z)\,|dz|$$

(voir [2]).

COROLLAIRE 2. — *Supposons que* Γ *vérifie une condition corde-arc. Alors il existe deux constantes* c, $C > 0$, *telles que*

$$\forall \zeta \in D, \qquad c\,\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant |\Phi'(\zeta)| \leqslant C\,\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz|.$$

Démonstration. — La première inégalité a déjà été démontrée. Pour démontrer l'autre, on utilise le (4) du théorème 1.

$$|\Phi'(\zeta)| \leqslant \frac{C'}{\left(\dfrac{1}{1-|\zeta|}\displaystyle\int_{I(\zeta)} \left|\frac{1}{\Phi'(z)}\right|^a |dz|\right)^{1/a}} \leqslant C'\,\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz|$$

(la deuxième inégalité est une conséquence de l'inégalité de Hölder).

COROLLAIRE 3. — *Si* Γ *vérifie une condition corde-arc alors les courbes* Γ_r *transformées par* Φ *des cercles de centre* 0 *et de rayon* r *vérifient uniformément une condition corde-arc pour* $0 < r \leqslant 1$.

Démonstration. — L'analogue du corollaire 3 pour les quasicercles est vrai : ce résultat est implicite dans [1]. D'après le lemme de Pommerenke pour démontrer le corollaire 3 il suffit donc de prouver l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall \zeta \in D, \qquad \forall r \in]0,1],$$
$$\frac{1}{1-|\zeta|}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)|\,|dz| \leqslant \beta\,|\Phi'(r\zeta)|. \tag{5}$$

Pour ce faire, on utilise d'abord le corollaire 2 qui fournit :

$$\exists C > 0, \qquad \forall \zeta \in D,$$
$$\int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)|\,|dz| \leqslant \frac{C}{1-r}\int_{I(\zeta)}\left(\int_{I(rz)} |\Phi'(u)|\,|du|\right)|dz|$$

et l'on considère 2 cas pour estimer la dernière intégrale.

1^er^ *cas.* $1 - r \leqslant 1 - |\zeta|$. Il vient en appliquant le théorème de Fubini

$$\frac{1}{1-r}\int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)|\,|dz| \leqslant \int_{I(r\zeta)} |\Phi'(u)|\,|du| \leqslant C(1-r|\zeta|)\,|\Phi'(r\zeta)|\,.$$

Mais $1 - r|\zeta| \leqslant 2(1-|\zeta|)$ et (5) en découle.

2^e^ *cas.* $1 - |\zeta| \leqslant 1 - r$. On utilise alors le fait que $I(rz) \subset I(r\zeta)$, et donc

$$\int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)|\,|dz| \leqslant \frac{1-|\zeta|}{1-r}\int_{I(r\zeta)} |\Phi'(z)|\,|dz| \leqslant C\,\frac{1-r|\zeta|}{1-r}(1-|\zeta|)|\Phi'(r\zeta)|\,.$$

Mais $1 - r|\zeta| \leqslant 2(1-r)$ et on a encore (5).

4. Cas particuliers.

Lorsqu'on impose des conditions supplémentaires à la courbe Γ on peut parfois préciser les conclusions du théorème 1.

a) Un domaine Ω est dit spiralé de type $\alpha(-\pi/2<\alpha<\pi/2)$ si l'on a la condition

$$\forall w \in \Omega, \qquad \forall \tau \geqslant 0, \qquad we^{-\tau e^{-i\alpha}} \in \Omega\,.$$

Pour $\alpha = 0$ cette condition n'est autre que la définition d'un domaine étoilé. On montre (voir [8]) que si f est une fonction analytique injective sur D telle que $f(0) = 0$, alors $f(D)$ est spiralée de type α si et seulement si

$$(*) \qquad \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad \text{pour} \qquad |z| < 1\,.$$

PROPOSITION 2. — *Soit* Γ *une courbe de Jordan vérifiant la condition corde-arc entourant un domaine spiralé de type* α *et* Φ *la transformation conforme de* D *sur* Ω *vérifiant* $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) \geqslant 0$. *Alors* $|\Phi'|$ *appartient à tous les* $A^p(\partial D)$ *pour* $p > 2$.

Démonstration. — La fonction $\dfrac{\Phi(z)}{z}$ est une fonction analytique sur D continue sur $\bar{D}$ qui ne s'annule pas. On en déduit que $\operatorname{Log}\left|\dfrac{\Phi(z)}{z}\right|$ est bornée sur $\bar{D}$. D'autre part, en posant $p(z) = e^{i\alpha}z\dfrac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ on a que p est une fonction de $H^1(D)$ (parce que Γ est rectifiable) qui est extérieure d'après la condition (*). On a donc

$$\operatorname{Log}|p(e^{i\theta})| = -\operatorname{H}(\operatorname{Arg} p(e^{i\theta}))$$

où H désigne la transformée de Hilbert, avec $|\operatorname{Arg} p| < \pi/2$. On en déduit que $|\Phi'(e^{i\theta})| = e^{u+Hv}$, avec $u \in L^\infty(\partial D)$ et $\|v\|_\infty \leqslant \pi/2$, et par conséquent, d'après le théorème de Helson-Szegö,

$$\forall\, \delta < 1, \qquad |\Phi'|^\delta \in A^2(\partial D).$$

La proposition va alors découler du lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit* w *un poids appartenant à* $A^\infty(\partial D)$ *tel que* $\forall\, \delta \in]0,1[$, $w^\delta \in A^2(\partial D)$, *alors* $w \in A^p(\partial D)$ *pour tout* $p > 2$.

Démonstration. — Puisque $w \in A^p(\partial D)$ pour p assez grand, il existe une constante C telle que pour tout $\delta > 0$

$$\forall \text{I intervalle de } \partial D, \qquad \frac{1}{|I|}\int_I w \leqslant C \exp \frac{1}{|I|}\int_I \log w \leqslant C\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^\delta\right)^{1/\delta}.$$

Soit alors p un réel > 2. Alors $1/p-1 < 1$ et, d'après l'hypothèse, $w^{1/p-1} \in A^2$ et donc

$$\exists C_p > 0, \qquad \forall I,$$
$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1/p-1}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-1/p-1}\right)^{p-1} \leqslant C_p.$$

Mais d'après ce qui vient d'être dit

$$\frac{1}{|I|}\int_I w \leqslant C\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1/p-1}\right)^{p-1}$$

et donc :

$$\forall I \text{ intervalle} \subset \partial D, \qquad \left(\frac{1}{|I|}\int_I w\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{-1/p-1}\right)^{p-1} \leqslant C_p,$$

ce qui prouve que $w \in A^p(\partial D)$.

D'un autre côté, on peut montrer (voir [6]) que pour tout $p < 2$ il existe un domaine vérifiant la condition corde-arc (même Lipschitz) tel que $|\Phi'| \notin A^p$.

b) On peut également préciser les conclusions du théorème 1 lorsqu'on impose des conditions de régularités à Γ.

DÉFINITION 5. — *Soit* Γ *un arc de Jordan rectifiable. On dit que* Γ *est presque régulier si l'on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \eta > 0, \qquad \forall M, N \in \Gamma,$$
$$MN \leqslant \eta \Rightarrow \widehat{MN} \leqslant (1+\varepsilon)MN.$$

On vérifie facilement que toute courbe presque régulière vérifie la condition corde-arc. D'autre part, toute courbe de classe C^1 est presque régulière, la réciproque étant fausse (voir [9]). Dans [9] on montre qu'une courbe Γ est presque régulière si et seulement si $\operatorname{Log} \Phi' \in \mathrm{VMOA}(D)$ (c'est-à-dire $H^1(D) \cap \mathrm{VMO}(\partial D)$ où $\mathrm{VMO}(\partial D)$ désigne l'adhérence dans $\mathrm{BMO}(\partial D)$ des polynômes trigonométriques). De ceci on déduit facilement que si Γ est presque régulière, alors $|\Phi'|$ appartient à tous les $A^p(\partial D)$ pour $p > 1$.

5. Conclusion.

Tous ces résultats permettent de développer une théorie des espaces $H^p(\Omega)$ lorsque Γ vérifie une condition corde-arc avec notamment caractérisation de ces espaces par fonction maximale non tangentielle et par l'intégrale de Paley-Littlewood. Voir [9] pour les détails. Notons enfin qu'il est vraisemblable que le résultat de la proposition 2 soit vrai pour toute courbe vérifiant la condition corde-arc, mais le problème est ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Princeton, 1966.
[2] R. R. COIFMAN, C. FEFFERMAN, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, 51 (1974), 241-249.
[3] R. R. COIFMAN, Y. MEYER, Le théorème de Caldéron par des méthodes de variable réelle, *C.R.A.S.*, Paris, Sér. A, t. 289 (1979), 425-428.
[4] D. S. JERISON, C. E. KENIG, Hardy spaces, A^{∞} and singular integrals on chord-arcs domains, (preprint).
[5] M. B. KELDYSCH, M. LAVRENT'EV, Sur la transformation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, *Ann. Sci. E.N.S.*, 3e série, t. 54 (1937), 1-38.
[6] C. E. KENIG, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, *Amer. J. Math.*, 102 (1980), 129-163.
[7] Ch. POMMERENKE, Schichte Funktionen und BMOA, *Comm. Math. Helv.*, 62 (1977), 591-602.
[8] Ch. POMMERENKE, *Univalent functions*, Göttingen, 1975.
[9] M. ZINSMEISTER, Espaces de Hardy généralisés, Thèse de 3e cycle, Orsay (1980).
[10] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Cambridge, 1959.

Manuscrit reçu le 8 mai 1981.

Michel ZINSMEISTER,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.