

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LE VAN THANH

## **Le lemme fondamental de Nilsson dans le cas analytique local**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 32, n° 1 (1982), p. 29-37

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1982\\_\\_32\\_1\\_29\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_29_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LE LEMME FONDAMENTAL DE NILSSON DANS LE CAS ANALYTIQUE LOCAL

par LE VAN THANH

0.

Nous considérons une intégrale de la forme

$$I_0(x) = \int_{\Gamma(x)} \varphi_0(x, y) dy \quad (0.1)$$

où  $\varphi_0$  est une détermination d'une fonction  $\varphi$  de classe de Nilsson locale dans un ouvert connexe  $D \times \Omega \subset \mathbf{C}^2$ ;  $\Gamma(x)$  est une courbe dans l'ouvert  $\Omega$  dépendant continûment de  $x$  dans un voisinage d'un point  $x_0$ , et dont l'origine  $a_1(x)$  et l'extrémité  $a_2(x)$  parcourent une courbe analytique irréductible

$$Y_k = \{(x, a_k(x))\} \subset D \times \Omega, \quad k = 1, 2.$$

Soit  $\pi : D \times \Omega \rightarrow D$  la projection évidente et on supposera que la restriction  $\pi|_X : X \rightarrow D$  est propre à fibres finies, où  $X \subset D \times \Omega$  le lieu de ramification de  $\varphi$ .

Puisque  $\varphi$  est de classe de Nilsson locale et d'après les inégalités de Łojasiewicz, il existe un nombre réel  $\nu_0$  et une fonction non décroissante  $c_\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^+$  tels que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout point  $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$  du revêtement universel  $\widetilde{D \times \Omega - X}$  de  $D \times \Omega - X$ :

$$|\varphi(\widetilde{x}, \widetilde{y})| \leq \frac{C_\varphi(L(\widetilde{x}, \widetilde{y}))}{\text{dist}(y, X \cap \pi^{-1}(x))^{\nu_0}} \quad (0.2)$$

où  $L(\widetilde{x}, \widetilde{y})$  désigne le nombre minimal de segments d'une ligne brisée joignant le point base  $(x_0, y_0)$  au point  $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$  du  $\widetilde{D \times \Omega - X}$ , et que nous supposons formée uniquement de segments horizontaux ( $y$  fixé) ou verticaux ( $x$  fixé). La borne inférieure  $\bar{\nu}_0$  des  $\nu_0$  tels qu'on ait une inégalité de ce type sera appelée "indicateur de croissance de  $\varphi$  relativement à la projection  $\pi$ ".

Pour que l'intégrale ait un sens, on supposera que la courbe d'intégration  $\Gamma(x)$  ne rencontre pas la fibre de  $X$  au-dessus de  $x$  (à l'exception peut-être de ses extrémités, si l'on fait l'hypothèse de convergence  $\bar{\nu}_0 < 1$ ). Soit  $\Sigma$  le lieu discriminant de  $\pi | X \cup Y_1 \cup Y_2$  et soit  $D^* = D - \Sigma$ . Avec toutes ces hypothèses,  $I_0(x)$  définira dans tout voisinage ouvert simplement connexe  $U$  de  $x_0$  dans  $D^*$  une fonction analytique, qui se prolongera en fonction multiforme  $I$  dans tout  $D^*$ , donnée aussi par une représentation intégrale :

$$I(\tilde{x}) = \int_{\tilde{\Gamma}(\tilde{x})} \widetilde{\varphi(x, y)} dy \in \mathcal{O}(\tilde{D}^*) \quad (0.3)$$

où  $\tilde{\Gamma}(\tilde{x})$  est un chemin de  $\widetilde{D \times \Omega - X}$  dépendant continûment de  $\tilde{x} \in \tilde{D}^*$  (revêtement universel de  $D^*$ ). De plus, on a le théorème suivant qui est l'analogue analytique local du lemme fondamental de Nilsson [3] : l'intégrale  $I(\tilde{x})$  est une fonction de classe de Nilsson locale dans  $D^*$ , ayant  $\Sigma$  comme lieu de ramification. C'est un cas particulier d'un théorème démontré dans [2] à l'aide de la résolution des singularités.

Nous nous proposons ici de le démontrer directement par une méthode semblable à celle de Nilsson-Björk [1] pour obtenir une évaluation de l'indicateur de croissance de  $I(x)$  en un point  $x_\sigma \in \Sigma$ , c'est-à-dire une évaluation de la borne inférieure  $\bar{\nu}$  des nombres  $\nu$  tels que dans un voisinage de  $x_\sigma$  on ait  $c_1 : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}^+$  décroissante et

$$|I(\tilde{x})| \leq \frac{c_1(L(\tilde{x}))}{\text{dist}(x, x_\sigma)^\nu}, \quad (0.4)$$

où  $L(\tilde{x})$  est le nombre minimal de segments d'une ligne brisée joignant le point base  $\tilde{x}_0$  au point  $\tilde{x}$  du revêtement universel  $\tilde{D}^*$  de  $D^*$ .

Comme il s'agit d'une question locale on peut se ramener — quitte à couper l'intégrale en morceaux — à considérer le cas où  $D \times \Omega$  est un polydisque de centre  $0 \in \mathbf{C}^2$  ayant l'origine comme unique point critique de  $\pi | X \cup Y_1 \cup Y_2$ . On a :

**THEOREME.** — Soit  $\nu_0$  l'indicateur de croissance de  $\varphi$  relativement à la projection  $\pi$ , alors il existe deux nombres rationnels  $K_{\max}$  et  $K_{\min}$  ne dépendant que du type topologique de  $(X \cup Y_1 \cup Y_2, 0)$  tels que l'indicateur de croissance  $\bar{\nu}$  de  $I(x)$  vérifie :

$$\bar{\nu} \leq K_{\max}(\bar{\nu}_0 - 1).$$

De plus, si  $\bar{\nu}_0 < 1$ , on a une meilleure inégalité

$$\bar{\nu} \leq K_{\min}(\bar{\nu}_0 - 1).$$

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. — Soit  $X \cap \pi^{-1}(x) = \{(x, y_\alpha(x))\}$  et soit  $\Gamma$  un segment fermé de  $\Omega^* = \Omega - \bigcup_{\alpha} y_\alpha(x)$  (ou un segment ouvert si  $\bar{\nu}_0 < 1$ ) tel qu'il existe un  $\alpha_0$  pour lequel  $|y - y_{\alpha_0}(x)| < |y - y_\alpha(x)|$  pour tout  $y \in \Gamma$  et tout  $\alpha \neq \alpha_0$ . Posons

$$\delta_\Gamma = \min_{y \in \Gamma} \{|y - y_{\alpha_0}(x)|\},$$

$$\Delta_\Gamma = \max_{y \in \Gamma} \{|y - y_{\alpha_0}(x)|\}$$

et soit  $\|\Gamma\|$  la longueur de  $\Gamma$ , alors sous l'hypothèse (0.2) avec  $\nu_0 \neq 1$  on a :

i) si  $\nu_0 > 1$

$$\left| \int_\Gamma \varphi(x, y) dy \right| \leq \frac{2C_\varphi \left[ \sup_{(\xi, \eta) \in \tilde{\Gamma}} (L(\xi, \eta)) \right] \cdot (\nu_0 + 1)}{(\nu_0 - 1) \delta_\Gamma^{\nu_0 - 1}}$$

ii) si  $0 \leq \nu_0 < 1$

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}} \varphi(x, y) dy \right| \leq \frac{2C_\varphi \left[ \sup_{\tilde{\Gamma}} (L(\xi, \eta)) \right] (1 + \nu_0)}{(1 - \nu_0)} \max \{ \|\Gamma\|^{1 - \nu_0}, \delta_\Gamma^{1 - \nu_0} \}$$

iii) si  $\nu_0 < 0$

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}} \varphi(\widetilde{x}, y) dy \right| \leq 2C_\varphi \left[ \sup_{\tilde{\Gamma}} (L(\widetilde{\xi}, \eta)) \right] \Delta_\Gamma^{1 - \nu_0}.$$

Preuve du lemme. — On peut toujours se ramener au cas  $\Gamma = [a b] \subset \mathbb{R}$   $0 \in \Gamma$  et  $\delta_\Gamma = \|y_{\alpha_0}, \Gamma\| = |y_{\alpha_0}|$ . Dans ce cas, le lemme est évident.  $\square$

COROLLAIRE. — Soit  $\Gamma$  une ligne brisée formée de  $L(\Gamma)$  segments fermés (ou éventuellement ouverts si  $\bar{\nu}_0 < 1$ ) contenue dans l'ouvert  $\Omega^*$  dont le diamètre  $\Delta$  vérifie l'inégalité

$$\Delta \geq 2 \max_{\alpha \beta \gamma k} \{|y_\alpha - y_\beta|, |y_\gamma - a_k|\}.$$

Supposons que pour chaque segment  $\Gamma_\ell$  de  $\Gamma$  ( $\ell = 1, \dots, L(\Gamma)$ ) il existe un point  $y_{\alpha_\ell}$  tel que

$\delta_\ell =: |y - y_{\alpha_\ell}| < |y - y_\alpha|$  pour tout  $y \in \Gamma_\ell$  et  $\alpha \neq \alpha_\ell$  et

$$\delta_\ell \leq \frac{1}{3} \delta =: \frac{1}{3} \min_{\alpha\beta\gamma k} \{|y_\alpha - y_\beta|, |y_\gamma - a_k|\}.$$

Alors sous l'hypothèse (0.2) avec  $\nu_0 \neq 1$  il existe une constante  $C = C(\nu_0)$  telle que

i) si  $\nu_0 > 1$

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}} \varphi(\tilde{x}y) dy \right| \leq C(\nu_0) C_\varphi \left[ \sup_{\tilde{\Gamma}} (L(\tilde{\xi}\tilde{\eta})) \right] L(\Gamma) \left( \frac{1}{\delta} \right)^{\nu_0 - 1}$$

ii) si  $\nu_0 < 1$

$$\left| \int_{\tilde{\Gamma}} \varphi(\tilde{x}y) dy \right| \leq C(\nu_0) C_\varphi \left[ \sup_{\tilde{\Gamma}} (L(\tilde{\xi}\tilde{\eta})) \right] L(\Gamma) \Delta^{1 - \nu_0}. \quad \square$$

Nous revenons au théorème en utilisant le corollaire précédent pour construire une fonction  $C_1$  vérifiant (0.4) avec  $\Sigma = \{0\}$ . Il suffira de :

1) démontrer que  $\tilde{\Gamma}(\tilde{x})$  est homotope à une ligne brisée de segments vérifiant ce corollaire et évaluer le nombre de segments  $L(\tilde{\Gamma}(\tilde{x}))$  de cette ligne brisée et de  $\sup_{(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \Gamma} \{L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\}$ .

2) Evaluer  $\delta$  et  $\Delta$  par les caractéristiques topologiques de  $X \cup Y_1 \cup Y_2$ .

### 1. Type d'homotopie de $\tilde{\Gamma}(\tilde{x})$ et $\sup_{\tilde{\Gamma}} \{L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\}$ .

Contrairement au  $\sup_{\tilde{\Gamma}} \{L(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\}$  qui dépend véritablement de la position du chemin  $\tilde{\Gamma}(\tilde{x})$  dans le revêtement universel, le  $L(\tilde{\Gamma}(\tilde{x}))$  ne dépend que de la projection de ce chemin dans l'espace de base, projection que nous noterons  $\Gamma_\gamma(x)$ , où  $\gamma$  désigne un chemin polygonal de  $D^*$  dont la classe d'homotopie représente le point  $\tilde{x} \in \tilde{D}^*$ ; le chemin  $\Gamma_\gamma(x)$ , qu'on a toujours supposé polygonal, est défini sans ambiguïté à homotopie près comme le "déformé" du chemin  $\Gamma(x_0)$  lorsque  $x$  parcourt  $\gamma$ .

LEMME. — *Considérons les deux segments :*

$$J(x) = [a_1(x), a_2(x)] \subset \pi^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \gamma = [x_0, x_1] \subset D^*,$$

alors il existe un entier  $N_0$  ne dépendant pas de  $\gamma$  tel que pour tout  $\alpha$ , l'équation  $y_\alpha(x) \in J(x)$  soit ou bien vérifiée pour tout  $x \in \gamma$ , ou bien ait au plus  $N_0$  racines sur  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Soit  $\zeta = x^{1/p}$  ( $p \in \mathbf{N}$ ) une uniformisante commune à  $y_\alpha$  et à  $a_k$ , alors la condition pour que  $y_\alpha(\zeta^p)$ ,  $a_1(\zeta^p)$ ,  $a_2(\zeta^p)$  soient alignés définit un germe de courbe analytique réel  $\mathfrak{S}$  dans  $(\mathbf{R}^2, 0) \simeq (\mathbf{C}, 0) \ni \zeta$ .

Mais l'application  $x = \zeta^p$  de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}^2$  a la propriété de transformer tout germe de courbe analytique réelle en germe de courbe analytique réelle : en effet, si  $f \in \mathbf{C}\{\bar{\zeta}, \zeta\}$  est l'équation d'un tel germe (avec  $f(\bar{\zeta}, \zeta) = f(\zeta, \bar{\zeta})$ ), on ne change pas l'image de ce germe en lui adjoignant ses transformées par tous les automorphismes "rotation de  $\frac{2\pi}{p}$ " :  $\zeta \mapsto \epsilon \zeta$ ,  $\epsilon^p = 1$ , c'est-à-dire en remplaçant  $f$  par  $\prod_{\epsilon^p=1} f(\epsilon \zeta, \bar{\epsilon \zeta})$ ; on se ramène ainsi au cas où  $f$  est invariant par ces automorphismes, auquel cas il est facile de vérifier que  $f \in \mathbf{C}\{\bar{\zeta}^p, \zeta^p\}$ .

Ainsi on peut choisir comme constante  $N_0$  la multiplicité d'intersection du germe de courbe  $\mathfrak{S}$  (dont on aura enlevé les branches linéaires) avec son cône tangent au point  $x = 0$ . □

PROPOSITION. — *Il existe un entier M tel que pour tout segment  $\gamma = [x_0, x_1] \subset D^*$  on ait :*

$$L(\Gamma_\gamma(x_1)) \leq L(\Gamma(x_1)) + M \tag{1.1}$$

où  $L(\Gamma_\gamma(x_1))$  est le rang de  $\Gamma_\gamma(x)$ , c'est-à-dire le nombre minimal de segments d'une ligne brisée homotope à  $\Gamma_\gamma(x)$  dans  $(D \times \Omega - X) \cap \pi^{-1}(x)$ . (Dans le cas  $\bar{v}_0 < 1$  on remplacera  $X$  par l'union de ses composantes irréductibles distinctes de  $Y_1, Y_2$ ).

*Démonstration.* — La proposition se démontre par la méthode de Nilsson-Björk [1] comme suit : puisque

$$J(x) \subset \Omega_1^* = \Omega - \bigcup_{y_\alpha \neq a_k} \{y_\alpha(x)\}$$

pour tous  $x \in \gamma$ , à l'exception d'au plus  $N_0$  points  $x_\nu \in \gamma$ ,  $\Gamma_\gamma(x)$

est homotope à  $\varrho \circ J(x)$  avec  $\varrho \in \pi_1(\Omega_1^*, *)$ . Soit  $L_\alpha$  les générateurs de  $\pi_1(\Omega_1^*, *)$  et  $\rho^J(\Gamma_\gamma(x))$  la longueur du mot  $\varrho$  dans sa présentation par les  $L_\alpha$  :

$$\rho^J(\Gamma_\gamma(x)) =: \min_{\varrho \circ J \sim \Gamma_\gamma(x)} \# \{L_\alpha, L_\beta^{-1} \mid \varrho = \prod_{\alpha\beta} L_\alpha \circ L_\beta^{-1}\}. \quad (1.2)$$

Alors  $\rho^J(\Gamma_\gamma(x))$  est une fonction de  $x$  continue à valeurs entières et donc localement constante sur  $\gamma$ .

D'autre part, l'hypothèse d'ouverture et de connexité de  $\Omega$  implique  $L(\Gamma_\gamma(x)) \leq 4\rho^J(\Gamma_\gamma(x)) + 1$ , de sorte qu'il ne reste plus qu'à évaluer les sauts de  $\rho^J(\Gamma_\gamma(x))$  sur  $\gamma$ . Chaque fois qu'un point  $y_\alpha(x)$  traverse  $J(x)$ ,  $\rho^J(\Gamma_\gamma(x))$  fait un saut de 1. Ainsi, la somme des sauts le long de  $\gamma$  est au plus égale à  $mN_0$ , où  $m$  est le degré du revêtement  $\pi|_X$ . On en tire la proposition avec  $M = 4mN_0 + 1$ .  $\square$

Maintenant, l'évaluation de  $L(\Gamma_\gamma(x))$  résultera directement de la proposition précédente. Et pour évaluer  $\sup_{\xi, \eta \in \tilde{\Gamma}(\tilde{x})} \{L(\xi, \eta)\}$  on peut supposer que le point base  $(x_0, y_0)$  est joint au point  $(\xi, \eta)$  par une ligne brisée formée d'une partie horizontale fixe  $\gamma \times \{y_0\}$  suivie d'une partie verticale variant avec  $(\xi, \eta)$ . Il sera commode de supposer  $(x, a_1(x)) \notin X$ , (on pourra toujours se ramener à ce cas en coupant l'intégrale en morceaux) ce qui permettra d'imposer à la partie verticale ci-dessus de passer par  $(x, a_1(x))$ . On aura alors :

$$L(\widetilde{\xi, \eta}) \leq L(\widetilde{x, a_1(x)}) + L(\Gamma_\gamma(x)) \quad (1.3)$$

et 
$$L(\widetilde{x, a_1(x)}) \leq L(\gamma) + L(\Gamma'_\gamma(x)) \quad (1.4)$$

où  $\Gamma'_\gamma(x)$  est une ligne brisée verticale joignant  $(\widetilde{x, y_0})$  à  $(\widetilde{x, a_1(x)})$  dépendant continûment de  $x$ , à laquelle on peut à nouveau appliquer la proposition

$$L(\Gamma'_\gamma(x)) \leq L(\Gamma'_\gamma(x_0)) + M. \quad (1.5)$$

## 2. Evaluer $\delta$ et $\Delta$ ; compléter la démonstration du théorème énoncé.

L'évaluation des  $\delta$  et  $\Delta$  résultera directement de la proposition générale suivante :

**PROPOSITION.** — Soit  $f \in \mathbf{C}\{x\}[y]$  l'équation réduite du germe de courbe  $(C, 0) \subset (\mathbf{C}^2, 0)$  (munie d'une projection finie

$\pi : \mathbf{C}, 0 \rightarrow \mathbf{C}, 0$  sur l'axe des  $x$ ) et soient  $y_\alpha(x)$  et  $y_\beta(x)$  deux racines distinctes de cette équation. Soient :

$$y_\alpha(x) - y_\beta(x) = C_{\alpha\beta} x^{K_{\alpha\beta}} + \dots \quad C_{\alpha\beta} \neq 0$$

$$K_{\max} = \max_{\alpha\beta} \{K_{\alpha\beta}\}, \quad K_{\min} = \min_{\alpha\beta} \{K_{\alpha\beta}\}$$

et  $\frac{\beta_s^i}{m_i}$ ,  $s = 1, 2, \dots, g_i$  les exposants caractéristiques de Puiseux de la branche  $(C_i, 0)$  de  $(\mathbf{C}, 0)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) dans le développement de  $y$  en  $x$ , (où  $m_i$  est la multiplicité d'intersection de  $C_i$  avec l'axe  $x = 0$ ). Alors

$$K_{\min} = \min_{ij} \left\{ \frac{\beta_1^i}{m_i}, \frac{(C_i \cdot C_j)}{m_i m_j} \right\} \tag{2.1}$$

$$K_{\max} = \max_k \left\{ \frac{\beta_{g_k}^k}{m_k}, \frac{1}{m_k} \left[ \max_{C_i, C_j \in \mathcal{C}_k} (C_i \cdot C_j) - \sum_{s=1}^{g_k} (e_{s-1}^k - e_s^k) \beta_s^k \right] \right\} \tag{2.2}$$

où  $e_0^k = m_k$ ,  $e_s^k = (m_k, \beta_1^k, \dots, \beta_s^k)$  (p.g.c.d.) et  $\mathcal{C}_k$  est la famille des branches ayant leurs développements de Puiseux qui coïncident jusqu'au dernier exposant caractéristique inclus.

*Démonstration.* — Soit  $\beta = n_i m_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) un multiple commun à tous les  $m_i$ , soit  $\epsilon \in \mathbf{C}$ ,  $\epsilon^\beta = 1$  et soit  $m_{ij\epsilon}$  la valuation de  $\overline{\Theta}_{\mathbf{C}} = \bigoplus \mathbf{C} \{t_i\}$  induite par l'homomorphisme

$$\varphi_{ij\epsilon} (\bigoplus h_i(t_i)) = h_i(t^{n_i}) - h_j((\epsilon t)^{n_j}).$$

En posant  $m_{ij\epsilon}(y) = \max_{\epsilon} \{m_{ij\epsilon}(y) \neq \infty\}$  on a évidemment :

$$K_{\min} = \min_{ij\epsilon} \left\{ \frac{1}{\beta} m_{ij\epsilon}(y) \right\}$$

et

$$K_{\max} = \max_{ij} \left\{ \frac{1}{\beta} m_{ij\epsilon}(y) \right\}.$$

La proposition précédente résultera des lemmes suivants :

LEMMES. — On a :

a)  $(C_i \cdot C_j) = \frac{1}{\beta} \sum_{\epsilon^\beta = 1} m_{ij\epsilon}(y).$

b)  $K_{\min}(C_i) = \frac{\beta_1^i}{m_i}$  ;  $K_{\max}(C_i) = \frac{\beta_{g_i}^i}{m_i}.$



c) Si  $m_{ij\epsilon}(y) \leq \min \{n_i \beta_1^i, n_j \beta_1^j\}$  alors  $m_{ij\epsilon}(y) = m_{ij\epsilon}(y)$  pour tous  $\epsilon^\beta = 1$ .

d) Si  $m_{ij\epsilon}(y) > \min \{n_i \beta_{s_0}^i, n_j \beta_{s_0}^j\}$  alors pour chaque  $1 \leq s \leq s_0$  il existe exactement  $n_i(e_{s-1}^i - e_s^i)$  racines  $\beta$ -ièmes de l'unité,  $\epsilon^\beta = 1$ , telles que :  $m_{ij\epsilon}(y) = n_i \beta_s^i = n_j \beta_s^j$  et ainsi

$$\{n_i \beta_1^i = n_j \beta_1^j, \dots, n_i \beta_{s_0}^i = n_j \beta_{s_0}^j\}$$

est l'ensemble de toutes les valeurs de  $m_{ij\epsilon}(y) < m_{ij\epsilon}(y)$ .

*Démonstration.* —

a) Le lemme a) résulte de l'égalité :

$$(C_i \cdot C_j) = v_x \left\{ \prod_{\ell, k} [y_i^\ell(x) - y_j^k(x)] \right\}$$

où  $y_i^\ell$  ( $y_j^k$  respectivement) sont les racines du polynôme de Weierstrass qui définit la branche  $(C_i, 0)$ .

b) Soit  $y_i(t^{n_i}) = \sum_k a_k t^k$  on a

$$m_{ii\epsilon}(y) = \min \{k \mid a_k(1 - \epsilon^k) \neq 0\}.$$

Ne nous intéressant qu'aux  $m_{ii\epsilon}(y) \neq \infty$  nous pouvons supposer  $\epsilon \neq 1$ . Alors il existe  $s_0 = s_0(\epsilon)$  tel que

$$\beta_{s_0}^i = \min \{\beta_s^i \mid \epsilon^{\beta_s^i} \neq 1\} \quad (\text{car } e_{g_i}^i = 1).$$

Donc  $m_{ii\epsilon}(y) = n_i \beta_{s_0(\epsilon)}^i \leq n_i \beta_{g_i}^i$ . Mais si  $s_0 < g_i$ ,  $e_{s_0} \neq 1$  et il existe  $\epsilon_0 \neq 1$ ,  $\epsilon_0^{e_{s_0}} = 1$  tel que  $\epsilon_0^{\beta_s^i} = 1$  pour tous  $s \leq s_0$ .

Alors  $m_{ii\epsilon_0}(y) > n_i \beta_{s_0}^i$ . Ainsi  $m_{ii\epsilon}(y) = n_i \beta_{g_i}^i$  et  $K_{\max}(C_i) = \frac{\beta_{g_i}^i}{m_i}$ .

De façon analogue,  $K_{\min}(C_i) = \frac{\beta_1^i}{m_i}$ .

c et d) Soient  $y_i(t^{n_i}) = \sum_k a_k^i t^k$  et

$$E_{ij} = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k^i \neq 0\} \cup \{k \in \mathbf{N} \mid a_k^j \neq 0\},$$

on a  $m_{ij\epsilon}(y) = \min \{k \in E_{ij} \mid a_k^i - \epsilon^k a_k^j \neq 0\}$ , et pour tout  $k_0 \in E_{ij}$  tel que  $k_0 < m_{ij\epsilon}(y)$ , alors  $k_0 = m_{ij\epsilon_0}(y)$  si et seulement si  $\epsilon_0^{k_0} \neq (\epsilon)^{k_0}$  et  $\epsilon_0^k = (\epsilon)^k$  pour tout  $k < k_0$ . Les lemmes c)

et d) s'en déduisent simplement en jouant avec les exposants caractéristiques de Puiseux :

$$\beta_s^i = \min \{k \in \text{Exposants dans } y_i(t_i) \mid e_{s-1}^i \nmid \beta_s^i\}, \quad s = 1, \dots, g_i. \quad \square$$

Finalement, les évaluations (1.1)-(1.5) et (2.1)-(2.2) achèvent de démontrer le théorème du § 0 fournissant pour la fonction  $C_1$  de (0.4) l'évaluation suivante :

$$C_1(L(\tilde{x})) \leq C(\nu_0) C_\varphi [L(\Gamma'_0) + (M + 1) L(\gamma)] (L(\Gamma_0) + ML(\gamma)) \\ \forall \tilde{x} \in \tilde{D}^*. \quad \square$$

*L'auteur remercie beaucoup le professeur F. Pham qui lui a posé ce problème. Il remercie également Lê Dũng Tráng et J.E. Björk pour de nombreuses et fructueuses suggestions.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.E. BJÖRK, Nilsson's work on multiple integrals, (Notes préprint, Stockholm 1979).
- [2] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lect. Notes in Math.*, 163 (1970).
- [3] N. NILSSON, Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifold, *Arkiv for Mat.*, B5, n° 32 (1964).

Manuscrit reçu le 5 mai 1981.

LE VAN THANH,  
 Institut de Mathématiques  
 208 Đ. Đỏi Cán  
 Hanoi (Vietnam).