ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCOS SEBASTIANI

La dimension de la frontière d'un ensemble analytique dans son saturé par une application

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 3 (1981), p. 91-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_3_91_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 3 (1981), 91-97

LA DIMENSION DE LA FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE DANS SON SATURE PAR UNE APPLICATION

par Marcos SEBASTIANI

1. Enoncé des résultats.

On considère un germe γ d'ensemble analytique dans $0 \in \mathbf{C}^n$ de dimension q.

DEFINITION 1. – *On dira que* γ *est une intersection complète si l'idéal de* γ *dans* $\mathcal{O}$ *(anneau local de* $\mathbf{C}^n$ *en* 0) *est engendré par* $n - q$ *éléments*

LEMME 1. – *Si* γ *est une intersection complète, alors il existe une application analytique locale* $F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ *de type fini telle que :*

a) $\gamma = F^{-1}(\mathfrak{f})$ *où* $\mathfrak{f}$ *est un germe analytique non-singulier dans* $0 \in \mathbf{C}^n$;

b) $\mathfrak{f}$ *n'est pas contenu dans le lieu discriminant de* F.

Ce lemme rend naturelle la définition suivante :

DEFINITION 2. – *On dira que* γ *est prénormal si il existe une application analytique locale* $F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ *de type fini telle que :*

a) $\gamma = F^{-1}(\mathfrak{f})$ *où* $\mathfrak{f}$ *est un germe analytique normal en* $0 \in \mathbf{C}^n$;

b) $\mathfrak{f}$ *n'est pas contenu dans le lieu discriminant de* F.

D'après le lemme 1, toute intersection complète est prénormale. Tout germe normal est prénormal.

PROPOSITION 1. – *Supposons que* γ *est un germe prénormal de dimension* q. *Alors :*

a) *toutes les composantes irréductibles de* γ *ont dimension* q *;*

b) *si* σ *est une composante irréductible de* γ *telle que* $\mathcal{O}(\sigma)$ *(son anneau local) soit un domaine de factorisation unique, alors ou bien* $\sigma = \gamma$, *ou bien il existe une composante irréductible* $\tau \neq \sigma$ *de* γ *telle que* $\dim(\tau \cap \sigma) = q - 1$.

Exemple 1. – Soit γ le germe en $0 \in \mathbf{C}^4$ de l'union des deux plans $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 = z_4 = 0$. Alors, par la Prop. 1, γ n'est pas prénormal. En particulier, γ n'est pas une intersection complète (dans [1] il est démontré que γ n'est pas intersection complète, même dans *le sens plus large* que γ ne peut pas se définir par deux équations).

Exemple 2. – Soit σ un germe d'intersection complète et soit $\tau \not\supset \sigma$ un germe analytique en $0 \in \mathbf{C}^n$ avec $\dim \sigma = \dim \tau = q$. Soit $\gamma = \sigma \cup \tau$. Supposons que le lieu singulier de γ est de codimension $\geqslant 4$. Alors γ n'est pas prénormal. En effet, *par un théorème connu,* $\mathcal{O}(\sigma)$ est un domaine de factorisation unique. Mais si $\mathfrak{f}$ est une composante irréductible de τ, alors $\dim(\mathfrak{f} \cap \sigma) \leqslant q - 4$, ce qui implique que γ n'est pas prénormal par la Prop. 1.

PROPOSITION 2. – *Soient* $U, V \subset \mathbf{C}^n$ *des ouverts et soit* $F : U \longrightarrow V$ *une application analytique propre. Soit* X *un sous-ensemble analytique (fermé) de* U *irréductible et de dimension* q. *Soit* $Y = F(X)$ *et soit* $Z = F^{-1}(Y)$ *(saturé de* X *par* F). *Soit* T *l'intersection de* X *avec l'adhérence dans* U *de* $Z - X$ *(frontière de* X *dans* Z). *Alors :*

a) T *est un sous-ensemble analytique (fermé) de* X ;

b) T *est de dimension pure* $q - 1$ *(éventuellement vide) si les trois conditions (i), (ii), (iii) suivantes sont satisfaites :*

i) Y *est normal ;*

ii) $\mathcal{O}_P(X)$ *(anneau local de* X *en* P) *est un domaine de factorisation unique pour tout* $P \in X$;

iii) X *n'est pas contenu dans l'ensemble des zéros du jacobien de* F.

Observation. – Il résulte de [1] que la Prop. 2 est encore valable si on remplace les conditions (i), (ii), (iii) par la seule condition : «Y est localement défini, en chacun de ses points, par $n-q$ équations».

La proposition 2 généralise le théorème 4.2 de [3].

L'auteur remercie M. Klaus Hulek pour des entretiens utiles et l'orientation dans la littérature.

2. Lemmes auxiliaires.

D'abord, on va prouver le lemme 1. Supposons γ intersection complète et soient $f_{q+1}, \ldots, f_n$ des fonctions analytiques dans un voisinage U de $0 \in \mathbf{C}^n$ dont les germes en 0 engendrent l'idéal de γ.

Par le théorème de paramétrisation locale, si U est convenablement choisi, on peut représenter les composantes irréductibles de γ par des sous-ensembles analytiques $X_1, \ldots, X_r$ de U et on peut choisir des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ telles que l'ensemble : $z_1 = \ldots = z_q = f_{q+1} = \ldots = f_n = 0$ se réduise à 0 et que la projection $(z_1, \ldots, z_n) \longrightarrow (z_1, \ldots, z_q)$, restreinte à des ouverts denses $U_1, \ldots, U_r$ des points non-singuliers de $X_1, \ldots, X_r$ respectivement, soit un homéomorphisme local. Soit

$$F = (z_1, \ldots, z_q, f_{q+1}, \ldots, f_n) \quad F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$$

et soit J le jacobien de F. Alors, $F^{-1}(0) = 0$ (c'est-à-dire, F est de type fini), $\gamma = F^{-1}(\mathfrak{f})$ (où $\mathfrak{f}$ est le germe de $z_{q+1} = \ldots = z_n = 0$) et J ne s'annule sur aucun point de U_i pour $i = 1, \ldots, r$ (ce qui implique que $\mathfrak{f}$ n'est pas contenu dans le lieu discriminant de F).

Considérons, maintenant, une application analytique $F : U \longrightarrow V$ entre des voisinages de $0 \in \mathbf{C}^n$ avec $F^{-1}(0) = 0$. En particulier, on peut supposer, en prenant U, V assez petits, que F est propre. Soient $R = \mathcal{O}_0(U)$ et $S = \mathcal{O}_0(V)$. Alors, on peut supposer $S \subset R$ par composition avec F. Soient $N \subset M$ les corps de fractions de R, S respectivement. Alors $[M : N]$ est fini (c'est le degré local de F en 0) et R est la clôture intégrale de S dans M. Soit $\mathrm{Tr} : M \longrightarrow N$ l'application trace définie par l'extension M/N.

Soit Y un sous-ensemble analytique (fermé) de V, irréductible et de dimension q en 0. Soit $Z = F^{-1}(Y)$. Soit $I_Z \subset R$ l'idéal du germe de Z en 0 et $I_Y = I_Z \cap S$ celui de Y (I_Y est un idéal premier, par hypothèse).

LEMME 2. –

a) *Chaque composante irréductible de* Z *en* 0 *est de dimension* q.

b) *Soit* $\alpha \in R$. *Alors* $\alpha \in I_Z$ *si et seulement si* $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ *pour tout* $\beta \in R$.

Démonstration. – On a $I_Z = P_1 \cap \ldots \cap P_s$, où les P_j sont les idéaux premiers de R dont l'intersection avec S est I_Y et $\dim R_{P_j} = \dim S_{I_Y}$ pour tout j. Cela entraîne (a).

Il est évident que si $\alpha \in I_Z$, alors $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$, puisque $\alpha\beta \in I_Z$.

Pour prouver la réciproque, on prend U, V convenablement petits pour que l'ensemble des points non-singuliers de Y soit connexe et que α possède un représentant f analytique sur U. Nous voulons prouver que $f \mid Z = 0$.

Soit $z \in Z$ et soit $w = F(z) \in Y$. Soit

$$F^{-1}(w) = \{z = z_1, z_2, \ldots, z_r\}.$$

Soit m_j le degré local de F en z_j. Soit $g : U \longrightarrow \mathbf{C}$ analytique telle que $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = \ldots = g(z_r) = 0$. Si β est le germe de g en 0, on a $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ par hypothèse. Mais $\mathrm{Tr}(\alpha\beta)$ est le germe en 0 d'une fonction h dont la valeur en w est :

$$h(w) = m_1 f(z_1)\, g(z_1) + m_2 f(z_2)\, g(z_2) + \cdots = m_1 f(z_1).$$

Comme $h \mid Y = 0$ on a $h(w) = 0$. Donc, $f(z) = 0$, ce qui complète la preuve de (b).

LEMME 3. – *Soit* J *le germe en 0 du jacobien de* F. *Il existe* $N > 0$ *tel que si* $\alpha \in I_Z^N$, *alors* $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ *pour tout* $\beta \in R$.

Démonstration. – En effet, pour N assez grand, $I_Z^N \subset RI_Y$. Alors, $\alpha \in I_Z^N$ entraîne $\alpha = \Sigma \alpha_i \beta_i$ avec $\alpha_i \in R$, $\beta_i \in I_Y$. Donc, si $\beta \in R$: $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) = \Sigma \beta_i \mathrm{Tr}(\alpha_i \beta/J) \in I_Y$.

LEMME 4. – *Supposons* Y *normal en* 0. *Soit* σ *une composante irréductible du germe* γ *de* Z *en* 0. *Supposons que :*

a) $\sigma \neq \gamma$;

b) σ *n'est pas contenue dans le lieu critique de* F *(c'est-à-dire,* J *ne s'annule pas sur* σ) ;

c) $\mathcal{O}(\sigma)$ *est un domaine de factorisation unique. Alors, il existe une composante irréductible* τ *de* γ *telle que* $\dim \sigma \cap \tau = q - 1$.

Démonstration. – On peut supposer que $Z = Z' \cup X$ où Z' est un sous-ensemble analytique de U qui représente la réunion des composantes irréductibles de γ différentes de σ et que X est un sous-ensemble analytique de U qui représente σ.

Soit I_X l'idéal de σ dans R et soit :

$$\mathcal{J} = \{\alpha \in R : \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y \quad \text{pour tout} \quad \beta \in I_X\},$$

idéal de R. Soient $A = R/I_X$, $B = S/I_Y$. Considérons l'application : $\psi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(R, S)$ définie par :

$$\psi(\alpha)(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J), \ \alpha \in \mathcal{J}, \ \beta \in R.$$

Alors, pour chaque $\alpha \in \mathcal{J}$, $\psi(\alpha)$ passe au quotient et définit un B-homomorphisme $\varphi(\alpha) : A \longrightarrow B$. On a ainsi défini une application : $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(A, B)$.

Cette application φ est additive et compatible avec la projection canonique $R \longrightarrow A$ pour les structures respectives de R et A-module. Nous allons prouver :

i) φ est surjective et $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathcal{J} \cap I_X$

ii) $I^N \subset \mathcal{J} \subset I$, pour N assez grand, où I est l'idéal du germe γ' de Z' en 0 $(I_Z = I \cap I_X)$.

Admettons, pour l'instant, les assertions (i) et (ii) et prouvons le lemme 4. Par la dualité locale, on sait que $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ est un A-module principal (c'est-à-dire, engendré par un seul élément) ([3] (3.7) et (3.8)). Comme $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Hom}_B(A, B)$, on déduit que $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un R-module principal. Par (i), $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un quotient de $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi$. Donc, $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un R-module principal. Alors, $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un idéal principal de A. Par (ii), le radical de $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est le même que celui de $I/I \cap I_X$ (dans A). Le germe des zéros de $I/I \cap I_X \subset A$ est $\gamma' \cap \sigma$. Donc, $\gamma' \cap \sigma$ est le germe des zéros de $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X \subset A$. Comme cet idéal est principal, $\dim \gamma' \cap \sigma = q - 1$, ce qui prouve le lemme 4.

Il reste à prouver (i) et (ii). Soit $\widetilde{L} \in \mathrm{Hom}_B(A, B)$. Comme R est un S-module libre ([2] theor. 24.16), $\widetilde{L}$ se relève en un S-homomorphisme $L : R \longrightarrow S$. Par la dualité locale, il existe $\alpha \in R$ tel que : $L(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J)$ pour tout $\beta \in R$. Comme $L(I_X) \subset I_Y$, on a $\alpha \in \mathcal{J}$. Alors, $\widetilde{L} = \varphi(\alpha)$. Ceci prouve que φ est surjective.

Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$. En particulier, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$. Donc, d'après le lemme 2(b), $\alpha \in I_Z$. En particulier, $\alpha \in I_X$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathcal{J} \cap I_X$.

Soit $\alpha \in \mathcal{J}$. Alors, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$. En particulier, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$. Donc, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta\beta') \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$, $\beta' \in R$. Alors, par le lemme 2(b), $\alpha\beta \in I_Z$ pour tout $\beta \in I_X$. Donc, $\alpha\beta \in I$ pour tout $\beta \in I_X$. Comme I est intersection d'idéaux premiers qui ne contiennent pas I_X, par le lemme 2(a), cela entraîne $\alpha \in I$. Ceci prouve que $\mathcal{J} \subset I$.

Maintenant, nous allons utiliser l'hypothèse (b). Soit $w \in Y$ tel que aucun point de $F^{-1}(w) \cap X$ ne soit point critique de F et que $F^{-1}(w) \cap X \cap Z'$ soit vide. Soit

$$F^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_r\} \quad \text{avec} \quad X \cap F^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_s\},\ s < r.$$

Pour chaque z_j avec $s < j \leqslant r$, on peut choisir $N > 0$ tel que si f est une fonction analytique sur U telle que $f | Z' = 0$, alors $\mathrm{Tr}_j(\alpha_j^N \mathfrak{f}/J_j)$ s'annule sur le germe de Y en w, où α_j est le germe de f en z_j, $\mathfrak{f}$ est un élément quelconque de $\mathcal{O}_{z_j}(U)$, J_j est le germe du jacobien de F en z_j et Tr_j est l'application trace associée à l'application locale $F : (\mathbf{C}^n, z_j) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, w)$ (lemme 3).

Si $1 \leqslant j \leqslant s$, $\mathrm{Tr}_j(\alpha_j \mathfrak{f}/J_j)$ s'annule sur le germe de Y en w, pour tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}_{z_j}(U)$ nul sur le germe de X en z_j, puisque $J_j(z_j) \neq 0$ (lemme 2a).

En définitive, il existe $N > 0$ tel que si f est une fonction analytique sur U nulle sur Z' et g est une fonction analytique sur U nulle sur X, alors $\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Tr}_j(\alpha_j^N \beta_j/J_j)$ est nul sur le germe de Y en w, où β_j est le germe de g en z_j, α_j celui de f et J_j celui du jacobien de F. Alors $\mathrm{Tr}(\alpha^N \beta/J) \in I_Y$ où α est le germe de f en 0 et β celui de g.

Cela entraîne que $I^N \subset \mathcal{J}$ pour N assez grand $(I, I_X$ sont des B-modules de type fini).

3. Démonstration des propositions 1 et 2.

La partie (a) de la Prop. 1 suit du lemme 2a. La partie (b) découle du lemme 4, parce que si γ est l'image réciproque d'un germe irréductible qui n'est pas contenu dans le lieu discriminant, aucune composante irréductible de γ n'est contenue dans le lieu critique.

Pour prouver la Prop. 2 observons que, d'après les hypothèses, $C \cap X$ est un ensemble de dimension pure $q-1$, si C est l'ensemble critique de F. La partie (a) de la Prop. 2 est immédiate, puisque l'adhérence dans U du complémentaire de X dans Z est un sous-ensemble analytique de Z. Pour prouver (b) il suffit d'observer que le problème est local, puisque $F|X : X \longrightarrow Y$ est ouverte (parce que Y est irréductible en chaque point), et appliquer le lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. HARTSHORNE, Complete intersections and connectedness, *Amer. J. of Math.*, 84 (1962), 497-508.

[2] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience, 1962.

[3] M. SEBASTIANI, Sur la dualité locale, *Annales de l'Institut Fourier*, 30, 1 (1980), 65-90.

Manuscrit reçu le 3 novembre 1980.

Marcos SEBASTIANI,
Instituto de Matemática da UFRGS
Rua Sarmento Leite 425
90.000 – Porto Alegre, RS (Brasil).