ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE ROSAY

Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 91-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_91_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979) 91-97.

SUR UNE CARACTÉRISATION DE LA BOULE PARMI LES DOMAINES DE $\mathbf{C}^n$ PAR SON GROUPE D'AUTOMORPHISMES

par Jean-Pierre ROSAY

1.

Dans [8] B. Wong a démontré que si G est un domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) G est biholomorphiquement équivalent à la boule unité de $\mathbf{C}^n$.

ii) G est homogène.

iii) Le groupe d'automorphismes de G n'est pas compact.

iv) Il existe une partie compacte de G dont la trajectoire sous l'action du groupe d'automorphismes de G est tout G.

Notre but est de donner une démonstration entièrement élémentaire du résultat de Wong, permettant ainsi d'établir l'équivalence des propositions i) ii) et iv) sous la seule hypothèse que G est un domaine borné de classe $\mathscr{C}^2$ (il n'est même pas nécessaire que toute la frontière soit $\mathscr{C}^2$). Notre démonstration n'est qu'une variante d'une des démonstrations de Wong qui diffère principalement par le fait qu'elle ne fait appel à aucune solution de « problème de $\bar{\partial}$ » (références à [2] dans [8]). Notons, même si cette remarque ne nous servira pas, qu'il est bien connu que chacune des hypothèses i) ii) et iv) assure que G est pseudo-convexe cf [7], p. 127.

Les affirmations qui précèdent découlent immédiatement de la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soient Ω un domaine borné de $\mathbf{C}^n$ et ζ_0 un point de la frontière de Ω qui soit un point de stricte pseudoconvexité. On suppose qu'il* *existe* K *compact* $\subset \Omega$, *une suite* (x_k) *dans* K *et une suite* T_k *d'automorphismes de* Ω *tels que* $T_k(x_k)$ *tende vers* ζ_0. *Alors* Ω *est biholomorphiquement équivalent à la boule.*

Remarquons que l'on pourrait sans changer la démonstration prendre pour Ω un domaine non pas de $\mathbf{C}^n$ mais d'une variété hyperbolique.

Par point de stricte pseudoconvexité, nous entendons, suivant [3], un point au voisinage duquel la frontière de Ω est de classe $\mathscr{C}^2$ et où Ω puisse être défini par une condition $\rho < 0$ où ρ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, strictement plurisousharmonique et de gradient $\neq 0$ aux points où $\rho = 0$. Rappelons que tout domaine borné de $\mathbf{C}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$ possède des points de stricte pseudoconvexité : par exemple les points de la frontière de norme maximum.

2. Rappels et préliminaires.

Soit B_n la boule euclidienne unité de $\mathbf{C}^n$, la différentielle d'une application holomorphe f en un point z est notée df_z ou $(df)_z$.

Soit D un domaine (ouvert connexe) de $\mathbf{C}^n$. Un théorème de H. Cartan (cf [1] ou [6], pp. 74-75) établit que si $z \in D$ et si f est une application holomorphe de D dans D telle que $f(z) = z$ alors :

a) $|\det df_z| \leqslant 1$ et il n'y a égalité que si f est un automorphisme de D.

b) les valeurs propres de df_z sont toutes de module $\leqslant 1$.
Si elles sont toutes égales à 1 f est l'application identité.
La partie *b* n'est pas entièrement explicite dans [6] mais est établie en cours de démonstration.

Pour tout domaine D borné de $\mathbf{C}^n$ et $z \in D$ définissons les volumes de Eisenman-Kobayashi et de Caratheodory respectivement par :

$K_D(z) = \operatorname{Inf} \dfrac{1}{|\det df_0|}$, lorsque f parcourt l'ensemble des applications holomorphes de B_n dans D vérifiant $f(0) = z$, $C_D(z) = \operatorname{Sup}(|\det dg_z|)$, lorsque g parcourt l'ensemble des applications holomorphes de D dans B_n vérifiant $g(z) = 0$.

Il s'agit d'un abus, les volumes invariants sous l'action du groupe des automorphismes de D étant $K_D(z)^2\, d\lambda$ et $C_D(z)^2\, d\lambda$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

Il est immédiat, à partir de a, que $C_D(z) \leqslant K_D(z)$. Par ailleurs, si D' est un domaine contenant D on a évidemment

$$C_{D'}(z) \leqslant C_D(z) \qquad \text{et} \qquad K_{D'}(z) \leqslant K_D(z).$$

Enfin, si T est une application holomorphe injective

$$\frac{K_{T(D)}(T,(z))}{K_D(z)} = \frac{C_{T(D)}(T(z))}{C_D(z)} = |\det dT_z|^{-1}.$$

Le lemme suivant figure dans [8] avec toutefois l'hypothèse supplémentaire que D est hyperbolique complet. L'adaptation de la démonstration se fait avec les idées de la démonstration du théorème 3.3, pp. 74-75 de [6].

LEMME 1. — *Si il existe $z \in D$ tel que $C_D(z) = K_D(z)$, D est holomorphiquement équivalent à la boule B_n.*

Démonstration. — Il existe une application holomorphe de D dans B_n, vérifiant $g(z) = 0$ et $C_D(z) = |\det dg_z|$. Par contre, on n'est pas assuré que la borne inférieure dans la définition de K_D soit atteinte pour une fonction f, cf [5]. Soit donc une suite (f_k) d'applications holomorphes de B_n dans D telle que $f_k(O) = z$ et $\dfrac{1}{|\det (df_k)_0|}$ tende vers $K_D(z)$ quand k tend vers $+\infty$.

De la suite des fonctions $H_k = g \circ f_k$ on peut extraire une sous-suite tendant uniformément sur tout compact de B_n vers une application H dont il est immédiat que c'est une application holomorphe de B_n dans lui-même, vérifiant $H(0) = 0$ et $|\det dH_0| = 1$. Donc H est un automorphisme de B_n. Par suite g est une application surjective de D sur B_n. En effet $H_k \circ H^{-1}$ tend, uniformément sur tout compact de B_n vers l'application identité. Un simple argument d'homotopie établit alors que tout $t \in B_n$ appartient à l'image de $H_k \circ H^{-1}$, pour tout k assez grand, et donc $t \in g(B_n)$.

Posons $F_k = f_k \circ g$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que D_ε, l'ensemble des points de D dont la distance de Kobayashi à z est $< \varepsilon$, soit relativement compact. Il est clair que le module des valeurs propres de $(dF_k)_z$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$. On peut donc extraire de la suite (F_k) une sous-suite $(F_{\varphi(k)})$ et trouver une suite d'entiers > 0 (λ_k) telles que les valeurs propres de $(dF^{\lambda_k}_{\varphi(k)})_z$ tendent vers 1 quand k tend vers $+\infty$.

Pour chaque $k \in \mathbf{N}$ $F^{\lambda_k}_{\varphi(k)}(z) = z$ et $F^{\lambda_k}_{\varphi(k)}(D_\varepsilon) \subset D_\varepsilon$, quitte à passer à une nouvelle sous-suite, on peut supposer que la suite $(F^{\lambda_k}_{\varphi(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact de D_ε vers une application F de D_ε dans lui-même (et non seulement dans la fermeture de D_ε). Toujours par le même théorème on voit que F est l'application identité. Il s'ensuit alors que $(F^{\lambda_k}_{\varphi(k)})_{k\in N}$ tend vers l'application identité, uniformément sur tout compact de D. Puisque chaque $F^{\lambda_k}_{\varphi(k)}$ est de la forme $h_k.g$ on voit que g est injective. Donc g est une application biholomorphe de D sur B_n.

3. Localisation.

Les notations sont celles de la proposition et du paragraphe précédent, $\|\,.\,\|$ désigne la norme usuelle euclidienne dans $\mathbf{C}^n$.

LEMME 2. — *Soient* $A > 0$ *et* $B(\zeta_0,A)$ *la boule de centre* ζ_0 *et rayon* A. *Soit* $(z_k)_{k\in N}$ *une suite de points de* Ω *tendant vers* ζ_0. *Alors :*

i) $\dfrac{K_\Omega(z_k)}{K_{\Omega\cap B(\zeta_0,A)}(z_k)} \to 1$.

ii) *Si il existe* $x \in \Omega$ *tel que pour tout* $k \in \mathbf{N}$ *il existe* T_k *un automorphisme de* Ω *vérifiant* $T_k(x) = z_k$, *alors*

$$\frac{C_\Omega(z_k)}{C_{\Omega\cap B(\zeta_0,A)}(z_k)} \to 1.$$

La partie i) du lemme n'est pas originale.

Démonstration. — Observons tout d'abord que si D est un domaine de $\mathbf{C}^n$, $y \in D$ et si (φ_j) est une suite d'applications holomorphes de D dans Ω telle que $\varphi_j(y)$ tende vers ζ_0, alors φ_j tend vers ζ_0 uniformément sur tout compact de D. En effet si p désigne une fonction holomorphe vérifiant $p(\zeta_0) = 1$ et $|p(\zeta)| < 1$ pour tout ζ dans la fermeture de Ω, suffisamment proche mais différent de ζ_0 (classiquement, on prend

$$p = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho(\zeta_0)}{\partial z_i}(\zeta-\zeta_0)_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial z_j}(\zeta-\zeta_0)_i(\zeta-\zeta_0)_j\right)\Bigg)$$

on voit que pour tout φ point d'adhérence de la suite (φ_j) dans la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, $p\circ\varphi$ est une application holomorphe ayant un maximum local en y donc constante.

Donc pour tout $\eta > 0$ il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega$ vérifiant $\|z-\zeta_0\| < \theta$ et toute application holomorphe de B_n dans Ω vérifiant $f(0) = z$ on a $\|f(t)-\zeta_0\| < A$ pour tout t tel que $\|t\| < 1-\eta$; par suite l'application $t \to f((1-\eta)t)$ est une application de B_n dans $\Omega \cap \mathrm{B}(\zeta_0,\mathrm{A})$. D'où l'on déduit immédiatement que pour tout tel z :

$$\mathrm{K}_{\Omega \cap \mathrm{B}(\zeta_0,\mathrm{A})}(z) \leqslant \frac{1}{(1-\eta)^n} \mathrm{K}_\Omega(z).$$

Comme par ailleurs trivialement $\mathrm{K}_\Omega(z) \leqslant \mathrm{K}_{\Omega \cap \mathrm{B}(\zeta_0,\mathrm{A})}(z)$, on en déduit i).

Démontrons maintenant ii). Soit $x \in \Omega$ avec la propriété de l'énoncé, fixons $\eta > 0$. Il existe un domaine Ω' relativement compact dans Ω contenant x tel que $\mathrm{C}_{\Omega'}(x) \leqslant (1+\eta)\mathrm{C}_\Omega(x)$, par un argument trivial de famille normale. D'après ce qui a été dit pour k assez grand on a $\mathrm{T}_k(\Omega') \subset \mathrm{B}(\zeta_0,\mathrm{A})$; d'où :

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{C}_{\Omega \cap \mathrm{B}(z,\mathrm{A})}(z_k)}{\mathrm{C}_\Omega(z_k)} \leqslant \frac{\mathrm{C}_{\mathrm{T}_k(\Omega')}(z_k)}{\mathrm{C}_\Omega(z_k)} = \frac{\mathrm{C}_{\Omega'}(x)}{\mathrm{C}_\Omega(x)} \leqslant 1 + \eta.$$

Ceci achève la démonstration.

4. Démonstration de la proposition.

Fixons $x \in \Omega$; il résulte de l'observation au début de démonstration du Lemme 2 que $\mathrm{T}_k(x)$ tend vers ζ_0 : posons $z_k = \mathrm{T}_k(x)$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$ $\dfrac{\mathrm{K}_\Omega(x)}{\mathrm{C}_\Omega(x)} = \dfrac{\mathrm{K}_\Omega(z_k)}{\mathrm{C}_\Omega(z_k)}$. On finit la démonstration en montrant que $\dfrac{\mathrm{K}_\Omega(z_k)}{\mathrm{C}_\Omega(z_k)}$ tend vers 1 puis appliquant le Lemme 1.

Cette fin de démonstration est maintenant tout à fait standard. On utilise des ellipsoïdes comme « domaines locaux de comparaison », le calcul explicite des volumes de Eisenman-Kobayashi et Caratheodory pour les ellipsoïdes, en s'assurant facilement d'une certaine uniformité dans l'étape de localisation (Lemme 2), cf. [4], [2], etc... et probablement la référence 8 de [8].

Pour la commodité, voici cependant quelques indications. Au voisinage du point $\zeta_0 = (\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0)$ le domaine Ω est défini par la condition $\rho < 0$ où ρ est une fonction strictement plurisousharmonique, et on pourra supposer que $\dfrac{\partial \rho}{\partial z_1}(\zeta_0) \neq 0$.

Si $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ est un point de la frontière de Ω suffisamment proche de ζ_0, nous pouvons passer localement des coordonnées $z = (z_1, \ldots, z_n)$ aux coordonnées $w = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ définies par :

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial z_i}(z_i - \zeta_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2\rho(\zeta)}{\partial z_i\,\partial z_j}(z_i-\zeta_i)(z_j-\zeta_i)$$
$$\omega_j = z_j - \zeta_i \qquad \text{pour} \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Dans ces nouvelles coordonnées Ω est localement défini par une condition $\tilde{\rho} < 0$, $\tilde{\rho}$ étant de la forme :

$$\tilde{\rho}(w) = 2\,\mathrm{Re}\,\omega_1 + \mathscr{L}_\zeta(w) + o(\|w\|^2)$$

où $\mathscr{L}_\zeta$ est une forme hermitienne quadratique définie > 0 (hessien complexe de ρ). Pour tout $z \in \Omega$, suffisamment proche de ζ_0, on peut choisir $\zeta = z^*$ tel que les nouvelles coordonnées, définies ci-dessus, de z soient $(a, 0, \ldots, 0)$ avec $a < 0$.

A toute forme hermitienne quadratique Q définie > 0 on associe l'ellipsoïde constitué par l'ensemble des $w = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbf{C}^n$ vérifiant $2\,\mathrm{Re}\,\omega_1 + Q(w) < 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, si ε est assez petit soient $E_\varepsilon^+(z^*)$ et $E_\varepsilon^-(z^*)$ les ellipsoïdes définis respectivement par les formes quadratiques

$$Q^+ = \mathscr{L}_{z^*}(w) - \varepsilon\|w\|^2, \qquad Q^- = \mathscr{L}_{z^*}(w) + \varepsilon\|w\|^2.$$

Soit $A > 0$, assez petit, on note Ω_1 l'image de $\Omega \cap B(\zeta_0, A)$ dans l'espace de la variable w, pour $r > 0$ assez petit on a :

$$E_\varepsilon^-(z^*) \cap B(0, r) \subset \Omega_1 \subset E_\varepsilon^+(z^*).$$

S'assurant facilement d'une certaine uniformité dans l'étape de localisation car il faut appliquer le Lemme 2 aux domaines Ω et $E_\varepsilon^-(z^*)$, et utilisant la propriété de décroissance des volumes on voit que la majoration de $\dfrac{K_\Omega(z_k)}{C_\Omega(z_k)}$ est ramenée à la majoration de

$$\frac{K_{E_\varepsilon^-(z_k^*)}(a_k, 0, \ldots, 0)}{C_{E_\varepsilon^+(z_k^*)}(a_k, 0, \ldots, 0)} \qquad \text{où} \qquad a_k < 0 \ldots$$

Il suffit, pour terminer, de calculer les volumes de Eisenman-Kobayashi et de Caratheodory pour les ellipsoïdes, ce qui ne pose pas de problème, les ellipsoïdes étant biholomorphiquement équivalents à la boule B_n, et partant du fait évident que $C_{B_n}(0) = K_{B_n}(0) = 1$.

Pour l'ellipsoïde E défini par une forme quadratique Q on trouve que pour tout $w \in \mathrm{E}$ on a :

$$\mathrm{C_E}(w) = \mathrm{K_E}(w) = \lambda\,(\det \mathrm{Q})^{1/2}\,|\rho(w)|^{-\frac{n+1}{2}}$$

où :

$$\rho(w) = 2\,\mathrm{Re}\,\omega_1 + \mathrm{Q}(w),$$

det Q est le déterminant de la matrice associée à Q dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$, et λ est la norme de l'application $w \to \mathrm{Re}\,\omega_1$ de $\mathbf{C}^n$ muni de la norme définie par Q dans $\mathbf{R}$ (avec norme usuelle).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, *J. Math. Pures Appl.*, 10 (1931), 1-114 et : Sur les fonctions de plusieurs variables complexes, l'itération de transformations intérieures d'un domaine borné, *Math. Z.*, 35 (1932), 760-773.

[2] I. Graham, Boundary behaviour of the Caratheodory and Kobayashi metrics in strictly pseudo-convex domains in $\mathbf{C}^n$ with smooth boundary, *TAMS*, 207 (1975), 219-240.

[3] G. M. Henkin, An analytic polyhedron is not holomorphically equivalent to a strictly pseudo-convex domain, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 14 n° 3 (1973).

[4] L. Hörmander, L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator, *Acta Math.*, 113 (1965), 89-152.

[5] N. Kerzman, Taut manifolds and domains of holomorphy in $\mathbf{C}^n$, *Notices AMS*, 16 (1969), 675-676.

[6] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, M. Dekker NY (1970).

[7] R. Narasimhan, Several complex Variables, The Univ. of Chicago Press, 1971.

[8] B. Wong, Characterization of the unit ball in $\mathbf{C}^n$ by its automorphism group, *Inv. Math.*, 41 (1977), 253-257.

Manuscrit reçu le 28 juin 1979.

Jean-Pierre Rosay,
U.E.R. Math. et C.N.R.S. LA 225
Université de Provence
Place Victor Hugo
13331 Marseille Cedex 3.