ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRALD TENENBAUM

Lois de répartition des diviseurs. IV

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 1-15

LOIS DE RÉPARTITION DES DIVISEURS, 4

par Gérald TENENBAUM (*)

1. Introduction.

Nous avons montré dans les trois articles précédents [3], [5] et [6] que le cadre naturel pour l'étude de la répartition des diviseurs d'un entier n consiste à les placer relativement aux puissances de n. Dans cette optique, définissons, pour tout couple (λ, t) de réels appartenant à $[0,1] \times [1, +\infty[$ et tout entier n, la quantité

$$d(\lambda, t, n) := \operatorname{card}\{d : d \mid n \,; n^{\lambda/t} \leqslant d < n^{1/t}\} \,;$$

si $d(n)$ désigne le nombre total de diviseurs de n, la fonction arithmétique

$$n \longmapsto \Delta(\lambda, t, n) := \frac{d(\lambda, t, n)}{d(n)}$$

est particulièrement bien adaptée à la détermination de la structure d'ordre de l'ensemble des diviseurs de n : désignant par D_n la variable aléatoire qui prend les valeurs $(\log d/\log n)$, lorsque d parcourt les diviseurs de n, avec probabilité uniforme $1/d(n)$, on a :

$$\Delta(\lambda, t, n) = \operatorname{Prob}(\lambda \leqslant t D_n < 1) .$$

Dans [4], I. Kátai a donné une condition nécessaire et suffisante sur une suite d'entiers $(n_i)_{i \geqslant 0}$, pour que la loi de probabilité de D_{n_i} tende vers la mesure de Dirac au point $1/2$ lorsque i tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{i \to \infty} \Delta(1 - \epsilon, 2, n_i) = \frac{1}{2} \cdot$$

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

Deshouillers, Dress et l'auteur ont étudié [3] la valeur moyenne de $\Delta(\lambda, t, n)$; on a :

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{n\leqslant x} \Delta(\lambda, t, n) = \frac{2}{\pi}\left\{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\frac{1}{t}} - \operatorname{Arc\,sin}\sqrt{\frac{\lambda}{t}}\right\} \quad (1)$$

Cependant, il n'existe pas de suite $(n_i)_{i\geqslant 0}$ de densité positive telle que la suite $(\mathrm{D}_{n_i})_{i\geqslant 0}$ possède une loi limite [5].

Nous avons montré dans [5] que la suite des entiers n tels que $\Delta(\lambda, t, n) \neq 0$ possède une densité $h(\lambda, t)$ qui est une fonction continue pour $(\lambda, t) \neq (1, 1)$ et qui vérifie :

$$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists c(\epsilon) \ \ \forall t \geqslant 2 \qquad h(\lambda, t) \leqslant c(\epsilon)\,(1-\lambda)^{\delta}\,|\log(1-\lambda)|^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \quad (2)$$

avec

$$\delta := 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}0860\ldots .$$

De plus la limite suivante existe et est une fonction continue de λ sur $[0, 1]$ (voir [6])

$$h(\lambda) := \lim_{t\to\infty} h(\lambda, t).$$

Nous nous proposons ici d'étudier plus précisément la fonction $n \longmapsto \Delta(\lambda, t, n)$, en particulier sous l'aspect de sa fonction de répartition.

THEOREME. – *Soit* Γ *l'ensemble des rationnels* γ *de* $[0,1]$ *dont le dénominateur est une puissance de* 2.

(i) *Pour tout* γ *de* Γ *la suite des entiers* n *tels que*

$$\Delta(\lambda, t, n) = \gamma$$

possède une densité $h(\lambda, t, \gamma)$ *qui est une fonction continue de* (λ, t) *sur* $]0,1] \times]1, +\infty[$ *telle que les fonctions partielles* $t \longmapsto h(0, t, \gamma)$ *et* $\lambda \longmapsto h(\lambda, 1, \gamma)$ *soient, pour* $\gamma \neq 1$, *continues respectivement sur* $[1, +\infty[$ *et* $[0, 1[$.

(ii) *Pour tout réel* χ *de* $[0,1]$ *la suite des entiers* n *tels que*

$$\Delta(\lambda, t, n) \leqslant \chi$$

possède une densité $\mathrm{H}(\lambda, t, \chi)$ *donnée par la formule :*

$$\mathrm{H}(\lambda, t, \chi) = \sum_{\substack{\gamma \leqslant \chi \\ \gamma \in \Gamma}} h(\lambda, t, \gamma) \tag{3}$$

La fonction $(\lambda, t) \longmapsto \mathrm{H}(\lambda, t, \chi)$ *est, pour tout* χ, *continue sur* $]0,1] \times]1, +\infty[$ *et les fonctions partielles* $t \longmapsto \mathrm{H}(0, t, \chi)$ *et* $\lambda \longmapsto \mathrm{H}(\lambda, 1, \chi)$ *sont, pour* $\chi \neq 1$, *continues respectivement sur* $[1, +\infty[$ *et* $[0, 1[$.

(iii) *Pour tout couple* (λ, t) *de* $[0,1] \times [1, +\infty[$ *la fonction* $\chi \longmapsto \mathrm{H}(\lambda, t, \chi)$ *est continue à droite ; de plus, sauf dans les cas triviaux* $(\lambda = 0, t \leqslant 2)$, $\left(\lambda \leqslant \frac{1}{2}, t = 1\right)$ *et* $(\lambda = 1)$ *on a, pour tout* χ *positif :*

$$\mathrm{H}(\lambda, t, \chi) > \mathrm{H}(\lambda, t, 0).$$

COROLLAIRE 1. – *Pour tout couple* (λ, t) *de* $[0,1] \times [1, +\infty[$, *on a :*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma h(\lambda, t, \gamma) = \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{1}{t}} - \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\}.$$

COROLLAIRE 2. – *Soit* λ *dans* $[0,1]$; *on a :*

(i) *pour tout* γ *non nul de* Γ

$$\lim_{t \to \infty} h(\lambda, t, \gamma) = 0$$

(ii) *pour tout* χ *de* $]0,1]$

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{H}(\lambda, t, \chi) = 1.$$

COROLLAIRE 3. – *Soit* (λ, t) *un couple de* $[0,1] \times [1, +\infty[$ *et soit* $n \longmapsto \psi(n)$ *une fonction qui tend vers* $+\infty$.

Il existe une suite d'entiers $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\lambda, t, \psi)$ *de densité* 1 *telle que, pour tout entier* n *de* $\mathfrak{A}$, *l'une des deux assertions suivantes soit vérifiée :*

(i) $$d(\lambda, t, n) = 0$$

(ii) $$d(\lambda, t, n) \geqslant d(n)/\psi(n).$$

De plus ce résultat est le meilleur possible en ce sens que, sauf dans les cas triviaux $(\lambda = 0, t \leqslant 2)$, $\left(\lambda \leqslant \frac{1}{2}, t = 1\right)$ *et* $(\lambda = 1)$, *si* *l'on remplace* ψ *par une fonction constante, la suite des entiers* n *vérifiant* (i) *ou* (ii) *est de densité inférieure à* 1.

2. Notations.

Outre celles introduites ci-dessus, nous utiliserons les notations suivantes :

Les lettres a, b, d, g, k, n désigneront des entiers positifs alors que la lettre p désignera exclusivement un nombre premier.

Les lettres $c, c_1, c_2, \ldots$ désigneront des constantes absolues positives.

Pour tout entier n nous noterons $\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre des facteurs premiers de n comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

La fonction $t \longmapsto \rho(t)$ est définie pour $t \geqslant 0$ par

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \rho \quad \text{continue à droite en} \quad t = 1 \\ t\rho'(t) + \rho(t-1) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 1 \end{cases}$$

Γ désignera l'ensemble des rationnels γ de $[0,1]$ de la forme $\gamma = r2^{-s}$, avec r, s entiers. Lorsque r est impair (resp. nul) on pose :

$$\|\gamma\| = s \text{ (resp. } = 0).$$

Dans tout l'article, δ désignera la quantité

$$\delta = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}0860\ldots .$$

3. Preuve des corollaires.

Fixons (λ, t) dans $[0,1] \times [1, +\infty[$ et définissons pour tout entier n une fonction :

$$\epsilon_n : [0,1] \longmapsto \{0,1\}$$

$$\chi \longmapsto \epsilon_n(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Delta(\lambda, t, n) \leqslant \chi \\ \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

D'après le théorème, on a

$$\mathrm{H}(\lambda, t, \chi) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \epsilon_n(\chi) + o(1) \tag{4}$$

Nous allons prouver le corollaire 1 en calculant de deux façons différentes l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \mathrm{H}(\lambda, t, \chi)\, d\chi \tag{5}$$

D'une part, en utilisant (4) et (1), on a :

$$\mathrm{I} = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \int_0^1 \epsilon_n(\chi)\, d\chi + o(1) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \{1 - \Delta(\lambda, t, n)\} + o(1)$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{1}{t}} - \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\}.$$

D'autre part, grâce à l'assertion (ii) du théorème, il vient, en intégrant (5) par parties :

$$\mathrm{I} = 1 - \int_0^1 \chi\, d\mathrm{H}(\lambda, t, \chi) = 1 - \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma h(\lambda, t, \gamma),$$

d'où le résultat attendu.

Pour tout γ de $\Gamma \setminus \{0\}$ et tout χ de $]0, \gamma[$ on a donc :

$$\begin{aligned} \chi \gamma h(\lambda, t, \gamma) &\leqslant \chi \sum_{\gamma' > \chi} \gamma' h(\lambda, t, \gamma') \leqslant \chi \{1 - \mathrm{H}(\lambda, t, \chi)\} \\ &= \chi \sum_{\gamma' > \chi} h(\lambda, t, \gamma') < \sum_{\gamma' \in \Gamma} \gamma' h(\lambda, t, \gamma') \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{1}{t}} - \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\} \end{aligned}$$

ce qui prouve le corollaire 2, en faisant tendre t vers $+\infty$.

Le corollaire 3 est immédiat en remarquant que l'assertion (iii) du théorème implique que la suite des entiers n tels que

$$1 \leqslant d(\lambda, t, n) \leqslant \chi\, d(n)$$

possède, pour tout χ positif, une densité qui tend vers 0 avec χ et que, sauf dans les cas triviaux mentionnés, cette densité est positive lorsque χ est positif.

4. Démonstration du théorème.

Soit (λ, t) un couple de réels fixé dans $]0,1] \times [1,+\infty[$; pour tout entier $n \leqslant x$, nous posons :

$$\Delta_x(n) := \Delta_x(\lambda, t, n) := d(n)^{-1} \operatorname{card} \{d : d \mid n \,; x^{\lambda/t} \leqslant d < x^{1/t}\} ,$$

et, pour ϵ positif,

$$n(\epsilon) := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p > x^{\epsilon\lambda/t}}} p^\nu .$$

Le principe de la démonstration de l'existence de $h(\lambda, t, \gamma)$ consiste à remarquer que pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O(\epsilon^\delta x)$, on a :

$$\Delta(\lambda, t, n) = \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon)) .$$

Comme le nombre des facteurs premiers de $n(\epsilon)$ est borné indépendamment de x pour chaque ϵ positif, on peut alors utiliser les techniques de [5] pour déterminer un équivalent à $O(\epsilon^\delta x)$ près de la quantité

$$\operatorname{card} \{n \leqslant x : \Delta(\lambda, t, n) = \gamma\} ;$$

on en déduit l'existence de $h(\lambda, t, \gamma)$ en faisant tendre ϵ vers 0.

Le fait que seuls les γ de Γ interviennent dans la fonction de répartition de $\Delta(\lambda, t, n)$ provient de ce que $n(\epsilon)$ est "presque toujours" un entier sans facteur carré ce qui implique que $\Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon))$ appartient à Γ.

*

En utilisant la symétrie des diviseurs de n autour de $n^{\frac{1}{2}}$, nous pouvons nous limiter à prouver l'existence de $h(\lambda, t, \gamma)$ lorsque (λ, t) parcourt $]0,1] \times]1,+\infty[$. Nous en déduirons le cas général par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} h(0,1,\gamma)=\begin{cases} 1 & \text{si } \gamma=1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \\[2ex] h(0,t,\gamma)=\begin{cases} h\left(\dfrac{2}{t},2,\dfrac{1}{2}-\gamma\right) & \text{si } t>2 \\[1ex] h\left(\dfrac{t}{2},t,\gamma-\dfrac{1}{2}\right) & \text{si } 1<t\leqslant 2 \end{cases} \\[2ex] h(\lambda,1,\gamma)=\begin{cases} h\left(2\lambda,2,\gamma-\dfrac{1}{2}\right) & \text{si } 0<\lambda\leqslant\dfrac{1}{2} \\[1ex] h\left(\dfrac{1}{2\lambda},\dfrac{1}{\lambda},\dfrac{1}{2}-\gamma\right) & \text{si } \dfrac{1}{2}<\lambda\leqslant 1\,. \end{cases}\end{array}\right. \qquad (6)(^1)$$

De plus la formule de transformation suivante, valable pour t dans $]1,2[$,

$$h(\lambda,t)=\begin{cases} h\left(\dfrac{t-1}{t-\lambda},\dfrac{t}{t-\lambda}\right) & \text{si } 1<t\leqslant 2\lambda \\[1ex] h\left(2\,\dfrac{t-1}{t},2\right) & \text{si } 2\lambda\leqslant t\leqslant 1+\lambda \\[1ex] h\left(\dfrac{2\lambda}{t},2\right) & \text{si } 1+\lambda\leqslant t<2 \end{cases}$$

montre, à l'aide de (2), que pour tout ϵ positif, il existe une constante positive $c_1(\epsilon)$ telle que l'on ait, pour $t\geqslant 1+\epsilon$,

$$h(\lambda,t)\leqslant c_1(\epsilon)\,(1-\lambda)^{\delta}\;|\log(1-\lambda)|^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \qquad (7)$$

LEMME 1. — *Pour tout couple* (λ,t) *de* $]0,1]\times]1,+\infty[$ *et tous réels positifs* u *et* ϵ, *on a l'inégalité asymptotique*

$$\operatorname{card}\{n\leqslant x : n>n(\epsilon)\,x^{u\lambda\epsilon/t}\}\leqslant(1+o(1))\,x\left\{\int_u^\infty\rho(v)\,dv+\rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right)\right\}.$$

Démonstration. — Notons a (resp. b) un entier inférieur ou égal à x dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux (resp. supérieurs) à $x^{\lambda\epsilon/t}$. On a les estimations asymptotiques (voir [1] et [2])

---

(1) Dans toutes ces expressions et les suivantes, nous posons bien entendu $h(\lambda,t,\gamma')=0$ lorsque $\gamma'<0$.

$$\left| \sum_{a \leqslant y} 1 - y\,\rho\left(\frac{t \log y}{\lambda\epsilon \log x}\right) \right| \leqslant c_1 \frac{ty}{\lambda\epsilon \log x} \tag{8}$$

$$\sum_{b \leqslant y} 1 \leqslant \frac{ty}{\lambda\epsilon \log x} + c_2 \frac{t^2 y}{\lambda^2 \epsilon^2 \log^2 x} + c_3 \frac{t x^{\lambda\epsilon/t}}{\lambda\epsilon \log x} \tag{9}$$

Désignant par S la quantité à majorer, on obtient :

$$\begin{aligned}
S &\leqslant \sum_{x^{u\lambda\epsilon/t} \leqslant a \leqslant x^{(t-\lambda\epsilon)/t}} \ \sum_{1 < b \leqslant x/a} 1 + \sum_{a \leqslant x} 1 \\
&\leqslant \frac{tx}{\lambda\epsilon \log x} \sum_{x^{u\lambda\epsilon/t} \leqslant a \leqslant x} \frac{1}{a} + x\,\rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right) + O\left(\frac{t^2 x}{\lambda^2 \epsilon^2 \log x}\right) \\
&\leqslant \frac{tx}{\lambda\epsilon \log x} \int_{x^{u\lambda\epsilon/t}}^{x} \rho\left(\frac{t \log y}{\lambda\epsilon \log x}\right) \frac{dy}{y} + x\,\rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right) + O\left(\frac{t^2 x}{\lambda^2 \epsilon^2 \log x}\right) \\
&\leqslant (1 + o(1))\, x \left\{ \int_u^{t/\lambda\epsilon} \rho(v)\, dv + \rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right) \right\}
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

LEMME 2. – *Pour tout couple* (λ, t) *de* $]0,1] \times]1,+\infty[$ *et tout réel positif* ϵ, *on a l'estimation asymptotique*

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : \Delta(\lambda, t, n) \neq \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon))\} = O(\epsilon^\delta x)$$

où la constante impliquée par le symbole O *est indépendante de* ϵ.

Démonstration. – Posons $u := \log \dfrac{1}{\epsilon}$ et désignons par $\mathcal{E}_x$ l'ensemble des entiers n inférieurs ou égaux à x qui vérifient les trois conditions suivantes :

(i) $\Delta(\lambda, t, n) = \Delta_x(\lambda, t, n)$

(ii) $\Delta_x\left(1 - u\epsilon, \dfrac{t}{\lambda}, n\right) = \Delta_x(1 - \lambda u\epsilon, t, n) = 0$

(iii) $n \leqslant n(\epsilon)\, x^{u\lambda\epsilon/t}$.

D'après le lemme 7 de [5], le nombre des entiers n inférieurs ou égaux à x qui ne vérifient pas (i) est $o(x)$; d'après (7) le nombre des n qui ne vérifient pas (ii) est $O(\epsilon^\delta x)$; enfin, d'après le lemme 1, le nombre des n qui ne vérifient pas (iii) est majoré par :

$$x\left\{\int_u^\infty \rho(v)\,dv + \rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right)\right\} \leqslant c_4 \epsilon x \text{ (}^1\text{)} .$$

On obtient donc : $x - \operatorname{card} \mathcal{E}_x = O(\epsilon^\delta x)$.

Pour achever la démonstration du lemme, il nous suffit de montrer que tout entier n de $\mathcal{E}_x$ vérifie :

$$\Delta(\lambda\,,t\,,n) = \Delta_x(\lambda\,,t\,,n(\epsilon)) . \tag{10}$$

Posons, pour n inférieur ou égal à x

$$d_x(\lambda\,,t\,,n) = d(n)\,\Delta_x(\lambda\,,t\,,n) = \operatorname{card}\{d : d \mid n\ ; x^{\lambda/t} \leqslant d < x^{1/t}\} .$$

Si n vérifie (i), on a

$$d(n)\,\Delta(\lambda\,,t\,,n) = d_x(\lambda\,,t\,,n) = \sum_{d_1 \mid n(\epsilon)} \quad \sum_{\substack{d_2 \mid (n/n(\epsilon)) \\ x^{\lambda/t} \leqslant d_1 d_2 < x^{1/t}}} 1\ ;$$

si n vérifie (iii), tous les diviseurs d_2 de la sommation intérieure sont inférieurs ou égaux à $x^{u\lambda\epsilon/t}$, donc la sommation extérieure porte en fait sur les d_1 qui sont comptés dans $d_x(\lambda(1 - u\epsilon)\,,t\,,n(\epsilon))$; si en outre n vérifie (ii) on a

$$d_x(\lambda(1 - u\epsilon)\,,t\,,n(\epsilon)) = d_x(\lambda\,,t\,,n(\epsilon)) = d(n(\epsilon))\,\Delta_x(\lambda\,,t\,,n(\epsilon))$$

et l'on voit sans peine que si la sommation extérieure porte sur les d_1 comptés dans $d_x(\lambda\,,t\,,n(\epsilon))$ alors tous les diviseurs de $n/n(\epsilon)$ sont comptés dans la sommation intérieure.

On obtient donc, pour tout entier n de $\mathcal{E}_x$:

$$d(n)\,\Delta(\lambda\,,t\,,n) = d(n(\epsilon))\,\Delta_x(n(\epsilon)) \quad d\left(\frac{n}{n(\epsilon)}\right)$$

ce qui équivaut à (10) puisque $\left(\dfrac{n}{n(\epsilon)}\,, n(\epsilon)\right) = 1$.

*

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'assertion (i) du théorème.

Soit $(\lambda\,,t)$ un couple de $]0,1] \times]1,+\infty[$ et soit γ un rationnel de Γ. On pose : $\nu(x) := x^{-1} \operatorname{card}\{n \leqslant x : \Delta(\lambda\,,t\,,n) = \gamma\}$.

---

(1) On utilise ici par exemple la majoration $\rho(u) \leqslant e^{1-u}$ qui est loin d'être optimale mais suffisante dans notre cas.

D'après le lemme 2, on a pour tout ϵ positif :

$$\nu(x) = x^{-1} \operatorname{card}\{n \leqslant x : \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon)) = \gamma\} + O(\epsilon^\delta).$$

Si nous notons toujours a (resp. b) un entier inférieur à x dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux (resp. supérieurs) à $x^{\lambda\epsilon/t}$, nous obtenons

$$\nu(x) = x^{-1} \sum_{\substack{b \leqslant x \\ \Delta_x(b)=\gamma}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n(\epsilon)=b}} 1 + O(\epsilon^\delta)$$

$$= x^{-1} \sum_{\substack{b \leqslant x \\ \Delta_x(b)=\gamma}} \sum_{a \leqslant x/b} 1 + O(\epsilon^\delta)$$

d'où en utilisant (8)

$$\nu(x) = \sum_{\substack{b \leqslant x \\ \Delta_x(b)=\gamma}} b^{-1} \rho\left(\frac{t \log(xb^{-1})}{\lambda\epsilon \log x}\right) + O\left(\log^{-1} x \ \Sigma \frac{1}{b}\right) + O(\epsilon^\delta).$$

Comme on a la majoration

$$\sum_{b \leqslant x} \frac{1}{b} \leqslant \prod_{x^{\lambda\epsilon/t} < p \leqslant x} (1 - p^{-1})^{-1} = O(\epsilon^{-1})$$

on obtient :

$$\nu(x) = \sum_{\substack{b \leqslant x \\ \Delta_x(b)=\gamma}} b^{-1} \rho\left(\frac{t \log(xb^{-1})}{\lambda\epsilon \log x}\right) + O(\epsilon^\delta) + o(1) \qquad (11)$$

Dans le terme principal de (11) la contribution des b ayant au moins un facteur carré est : $O\Big(\sum_{p > x^{\lambda\epsilon/t}} p^{-2}\Big) = o(1)$;

on peut donc écrire ce terme principal sous la forme d'une somme :

$$\sum_{k \leqslant t/\lambda\epsilon} S_k + o(1)$$

où S_k porte sur les entiers b tels que $\Omega(b) = \omega(b) = k$.

Si nous posons $b = p_1 \dots p_k$, la condition $\Delta_x(b) = \gamma$ est équivalente à $\left(\frac{\log p_1}{\log x}, \dots, \frac{\log p_k}{\log x}\right) \in D_k$, où D_k est un domaine de $\mathbf{R}^k$ inclus dans $\left[\frac{\lambda\epsilon}{t}, 1\right]^k$ et défini par des inégalités linéaires ;

D_k est donc intégrable au sens de Riemann et, d'après le lemme 9 de [5], on a :

$$S_k = \int_{D_k} \rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} u_i\right)\right) \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k} + o(1)\,.$$

Cela montre donc l'existence d'une fonction $h_\epsilon(\lambda, t, \gamma)$ telle que

$$\nu(x) = h_\epsilon(\lambda, t, \gamma) + O(\epsilon^\delta) + o(1) \qquad (12)$$

En faisant tendre x vers l'infini puis ϵ vers 0 dans (12) on déduit l'existence de la densité $h(\lambda, t, \gamma)$ pour tout γ de Γ et tout couple (λ, t) de $]0,1] \times]1, +\infty[$. Compte tenu de (6), cela montre l'existence de $h(\lambda, t, \gamma)$ dans le cas général.

La continuité de $(\lambda, t) \longmapsto h(\lambda, t, \gamma)$ pour (λ, t) dans $]0,1] \times]1, +\infty[$ est une conséquence immédiate de (7) ; grâce aux formules (6), on en déduit la continuité de $t \longmapsto h(0, t, \gamma)$ en tout point $t \neq 1$ et celle de $\lambda \longmapsto h(\lambda, 1, \gamma)$ en tout point λ différent de 0 ou 1.

De plus, on a pour $t \leqslant 2$ et $\lambda > 0$

$$h(0, t, \gamma) = h\left(0, \frac{t}{t-1}, 1-\gamma\right)$$

et

$$h(\lambda, 1, \gamma) = h\left(0, \frac{1}{\lambda}, 1-\gamma\right)$$

ce qui implique, pour $\gamma \neq 1$, d'après le corollaire 2

$$\lim_{t \to 1} h(0, t, \gamma) = 0 = h(0, 1, \gamma)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} h(\lambda, 1, \gamma) = 0 = h(0, 1, \gamma)\,.$$

*

Montrons maintenant l'assertion (ii) du théorème.

Pour tout couple (λ, t) de $]0,1] \times]1, +\infty[$ et tout réel χ de $[0,1]$ posons $H(x) = x^{-1}\,\mathrm{card}\,\{n \leqslant x : \Delta(\lambda, t, n) \leqslant \chi\}$ et, pour tout entier positif g

$$H_g(x) = x^{-1}\,\mathrm{card}\,\{n \leqslant x : \exists\, \gamma \in \Gamma\ \|\gamma\| \leqslant g\,; \gamma \leqslant \chi\,; \Delta(\lambda, t, n) = \gamma\}\,.$$

D'après l'assertion (i) du théorème, on a :

$$H_g(x) = \sum_{\substack{\gamma \leqslant \chi \\ \|\gamma\| \leqslant g}} h(\lambda, t, \gamma) + o(1) \qquad (13)$$

Soit n un entier inférieur ou égal à x ; alors $n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)$ n'a que des facteurs premiers supérieurs à $x^{1/g}$, d'où :

$$\Omega\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) \leqslant g$$

et

$$d\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) \leqslant 2^g .$$

On voit donc que si $\Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right)$ est égal à un γ de Γ, on a nécessairement $\|\gamma\| \leqslant g$.

Considérons un entier n qui fournit une contribution différente à $\mathrm{H}(x)$ et $\mathrm{H}_g(x)$; alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i) $$\Delta(\lambda, t, n) \neq \Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right)$$

(ii) $$\Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) \notin \Gamma .$$

D'après le lemme 2, le nombre des entiers n inférieurs ou égaux à x vérifiant (i) est $\mathrm{O}(g^{-\delta} x)$; de plus si n vérifie (ii) alors $n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)$ possède au moins un facteur carré, donc le nombre des n vérifiant (ii) est $\mathrm{O}\left(\sum_{p > x^{1/g}} p^{-2}\right) = o(1)$. Compte tenu de (13) on obtient donc :

$$\mathrm{H}(x) = \sum_{\substack{\gamma \leqslant \chi \\ \|\gamma\| \leqslant g}} h(\lambda, t, \gamma) + \mathrm{O}(g^{-\delta}) + o(1) \tag{14}$$

En faisant tendre x puis g vers l'infini dans (14), on obtient l'existence de la densité $\mathrm{H}(\lambda, t, \chi)$ et la formule (3).

La démonstration des propriétés de continuité de

$$(\lambda, t) \longmapsto \mathrm{H}(\lambda, t, \chi),\ t \longmapsto \mathrm{H}(0, t, \chi) \text{ et } \lambda \longmapsto \mathrm{H}(\lambda, 1, \chi)$$

utilise (7) et les propriétés de symétrie des diviseurs ; elle est laissée au lecteur.

*

La formule (14) implique

$$H(\lambda, t, \chi) = \sum_{\substack{\gamma \leqslant \chi \\ \|\gamma\| \leqslant g}} h(\lambda, t, \gamma) + O(g^{-\delta}) \tag{15}$$

En faisant tendre dans (15) χ vers χ_0 puis g vers l'infini on voit facilement que l'on a pour tout χ_0 de $[0, 1[$

$$\lim_{\substack{\chi \to \chi_0 \\ \chi > \chi_0}} H(\lambda, t, \chi) = H(\lambda, t, \chi_0) .$$

Pour achever la démonstration du théorème, il nous suffit donc de montrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit* (λ, t) *un couple de réels appartenant à*

$$[0, 1[\times [1, +\infty[\setminus \left(\{0\} \times [1, 2] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{1\}\right)$$

et soit χ *un réel positif.*

Alors la suite des entiers n *tels que*

$$1 \leqslant d(\lambda, t, n) \leqslant \chi\, d(n) \tag{16}$$

possède une densité strictement positive.

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'existence de la densité découle de l'assertion (ii) du théorème.

Nous distinguerons deux cas.

Si $\lambda = 0$, alors $t > 2$. Nous allons définir une suite d'entiers $\mathfrak{S}$ de densité positive telle que tout n de $\mathfrak{S}$ vérifie (16). Nous utiliserons pour cela le résultat suivant, dû à Kátai [4] :

Si $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, on a :

$$\frac{1}{d(n)} \sum_{d \mid n} \left\{\frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2}\right\}^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{k} a_i(a_i + 2) \frac{\log^2 p_i}{\log^2 n} \tag{17}$$

Posons $\epsilon := \min\left\{\frac{1}{t}, \left(1 - \frac{2}{t}\right)^2 \chi\right\}$; la suite $\mathfrak{S}$ sera la suite des entiers n sans facteur carré dont le plus grand facteur premier est inférieur à n^{ϵ}. On voit sans difficulté que $\mathfrak{S}$ possède une densité positive, égale à $\dfrac{6}{\pi^2}\rho\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)$. De plus, en utilisant (17), on obtient pour tout n de $\mathfrak{S}$:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)^2 \frac{d(0,t,n)}{d(n)} \leqslant \frac{1}{d(n)} \sum_{d|n} \left\{\frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2}\right\}^2 \leqslant \frac{1}{4} \sum_{p|n} \frac{\log^2 p}{\log^2 n} \leqslant \frac{\epsilon}{4} \tag{18}$$

Comme ϵ est majoré par $\dfrac{1}{t}$, $d(0,t,n)$ n'est pas nul et (18) montre que n vérifie (16).

Si $\lambda \neq 0$, ou bien $t = 1$ et l'on peut se ramener, par symétrie, au cas $\lambda = 0$, ou bien $t > 1$ et l'on peut supposer, quitte à remplacer χ par $\chi/2$, que l'on a $t \geqslant 2$.

Soit alors ϵ un réel vérifiant $0 < \epsilon < \min\left\{1 - \lambda, \chi, \dfrac{1}{e^4}\right\}$;

on pose :

$$k := 1 + \left[\frac{\log 1/\epsilon}{\log 2}\right] \quad \text{et } u := \frac{2t \log 1/\epsilon}{\lambda}.$$

Considérons la suite $\mathfrak{S}$ des entiers n ayant exactement k facteurs premiers distincts $p_1, \ldots, p_k$ dans l'intervalle $]n^{\epsilon/u}, n^{1/u}[$ et au moins un facteur premier p dans l'intervalle $]n^{((t-\lambda)/t)-(\epsilon/u)}, n^{(t-\lambda)/t}]$. En utilisant le théorème B de [5] on montre sans difficulté qu'il existe une constante absolue positive c telle que la densité de $\mathfrak{S}$ soit minorée par : $c\,\dfrac{\lambda}{t}\,\epsilon^2\,\dfrac{\log^{k-1} 1/\epsilon}{k!}$.

Considérons d'autre part un diviseur d de $n \in \mathfrak{S}$ dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$; puisque $\dfrac{n}{p}$ est inférieur à $n^{1/2}$ et que $d' = \dfrac{n}{d}$ est dans l'intervalle $[n^{1/2}, n^{(t-\lambda)/t}[$ on voit que $p \mid d'$ et donc qu'aucun p_i $(i = 1, \ldots, k)$ ne peut diviser d' ; le nombre des diviseurs d, égal au nombre des diviseurs d', est donc majoré par

$$d\left(\frac{n}{p_1 \ldots p_k}\right) = 2^{-k} d(n) \leqslant \epsilon\, d(n) \leqslant \chi\, d(n)$$

d'où : $$d(\lambda, t, n) \leqslant \chi\, d(n).$$

De plus $d(\lambda, t, n)$ n'est pas nul puisque $\frac{n}{p}$ appartient à l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{(\lambda/t)+(\epsilon/u)}[\subseteq [n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$. Les entiers n de $\mathfrak{S}$ vérifient donc (16), et ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.G. de BRUIJN, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *Indag. Math.*, 13 (1951), 50-60.

[2] J.D. BOVEY, On the size of prime factors of integers, *Acta Arithmetica,* 23 (1977), 65-80.

[3] J.M. DESHOUILLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arithmetica,*34, n° 4 (1979), 7-19.

[4] I. KATAI, The distribution of additive functions on the set of divisors, *Publicationes Mathematicae,* 24 (1-2) (1977), 91-96.

[5] G. TENENBAUM. Lois de répartition des diviseurs, 2, à paraître à *Acta Arithmetica,* 38, n° 1 (1980).

[6] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 3, à paraître à *Acta Arithmetica,* 39, n° 1 (1980).

Manuscrit reçu le 27 juin 1978.

Gérald TENENBAUM,
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique de
l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex.