ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE FRANÇOISE

Le théorème de M. Sebastiani pour une singularité quasi-homogène isolée

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 2 (1979), p. 247-254

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_2_247_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 2 (1979), 247-254.

LE THÉORÈME DE M. SÉBASTIANI POUR UNE SINGULARITÉ QUASI HOMOGÈNE ISOLÉE

par Jean Pierre FRANÇOISE

On note $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques en $0 \in \mathbf{C}^n$ et Ω^k le faisceau des k formes à coefficients dans $\mathcal{O}$.

M. Sébastiani [7] a complété la théorie de E. Brieskorn [1] et établi que si P désigne un élément de $\mathcal{O}$ à singularité isolée dont le nombre de Milnor est μ, $G = \dfrac{\Omega^n}{dP \wedge d\Omega^{n-2}}$ est un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang μ où l'action de t est la multiplication par P.

Rappelons que J. Vey a redémontré le théorème de M. Sébastiani dans le cas où $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ par des méthodes purement algébriques [8].

On se propose de donner ici une autre démonstration de ce résultat, dans le cas où P est quasi-homogène, qui utilise le théorème des voisinages privilégiés de B. Malgrange [4] et qui présente une certaine analogie avec un calcul de F. Pham [5].

Précisons les notations : on introduit

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Q}_+^{*n}$$

tel que $\theta_H P = H.P = P$. Choisissons des monômes $x^\alpha (\alpha \in A \subset \mathbf{N}^n)$ dont les classes modulo J_P, l'idéal jacobien de P, forment une C-base de $\mathcal{O}/J_P$. Avec $dx^n = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, on peut alors énoncer :

THÉORÈME. — *Les* μ *classes des* $x^\alpha dx^n (\alpha \in A)$ *modulo* $dP \wedge d\Omega^{n-2}$ *forment une base du* $\mathbf{C}\{t\}$*-module* G.

On s'assure d'abord de la finitude de G en tant que $\mathbf{C}\{t\}$-module :

1. Précisons dans un premier temps la situation en formel :

1.1. – Dans cette partie, on note $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x_1,\dots,x_n]]$ l'anneau des séries formelles en les indéterminées x_i, $\hat{\Omega}^k$ le $\hat{\mathcal{O}}$-module des k-formes extérieures à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{\mathrm{J}}_{\mathrm{P}}$ l'idéal jacobien de P considéré comme élément de $\hat{\mathcal{O}}$.

Le choix de monômes x^α ($\alpha \in \mathrm{A} \subset \mathbf{N}^n$) dont les classes modulo $\hat{\mathrm{J}}_{\mathrm{P}}$ forment une $\mathbf{C}$-base de $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathrm{J}}_{\mathrm{P}}$ détermine une décomposition de $\hat{\Omega}^n$; pour $f \in \hat{\mathcal{O}}$, on écrit :

$$f\,dx^n = \sigma(f)\,dx^n + d\mathrm{P} \wedge \pi = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \sigma_\alpha(f)x^\alpha\,dx^n + d\mathrm{P} \wedge \pi\,; \qquad \sigma_\alpha(f) \in \mathbf{C}.$$

Commençons par un lemme :

Lemme. – *Avec* $\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, *on pose* $\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

$$\mathrm{H} + \mathrm{M} : \ f \longmapsto \mathrm{H}.f + \mathrm{M}f$$

est une bijection de $\hat{\mathcal{O}}$ *sur* $\hat{\mathcal{O}}$.

Preuve. – En effet : $(\mathrm{H}+\mathrm{M})x^\beta = (\langle\beta,m\rangle + \mathrm{M})x^\beta$.

Dès lors si on considère $\hat{\mathrm{G}} = \hat{\Omega}^n/d\mathrm{P} \wedge d\hat{\Omega}^{n-2}$ en tant que $\mathbf{C}[[t]]$-module où l'action de t est la multiplication par P, on peut énoncer :

Proposition 1.1. – $\hat{\mathrm{G}}$ *est un* $\mathbf{C}[[t]]$*-module de type fini et les classes des* $x^\alpha\,dx^n$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) *en forment une famille génératrice.*

Preuve. – Pour tout élément f de $\hat{\mathcal{O}}$, il s'agit de trouver des $\varphi_\alpha \in \mathbf{C}[[t]]$ et $\xi \in \hat{\Omega}^{n-2}$ tels que :

$$f\,dx^n = \sum_{\alpha\in\mathrm{A}} x^\alpha \varphi_\alpha(\mathrm{P})\ dx^n + d\mathrm{P} \wedge d\xi.$$

Pour cela, on écrit :

$$f\,dx^n = \sigma(f)\,dx^n + d\mathrm{P} \wedge \pi_1$$

(où on fait un choix de π_1 qui est bien sûr arbitraire modulo $dP \wedge \hat{\Omega}^{n-2}$ [2]).

Puis $d\pi_1 = u_1\, dx^n$. On pose $\varphi_1 = (H+M)^{-1}u_1$ alors :

$$d\pi_1 = d\iota_{\varphi_1 H}\, dx^n$$

en sorte qu'il apparaît ζ_2 :

$$\pi_1 = \iota_{\varphi_1 H}\, dx^n + d\zeta_2 .$$

Il vient :

$$\begin{aligned} f\, dx^n &= \sigma(f)\, dx^n + dP \wedge \iota_{\varphi_1 H}\, dx^n + dP \wedge d\zeta_2 \\ &= \sigma(f)\, dx^n + P\varphi_1\, dx^n + dP \wedge d\zeta_2 . \end{aligned}$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} &\varphi_1\, dx^n = \sigma(\varphi_1)\, dx^n + dP \wedge \pi_2, \qquad d\pi_2 = u_2\, dx^n, \\ &\varphi_2 = (H+M)^{-1}u_2, \qquad \pi_2 = \iota_{\varphi_2 H}\, dx^n + d\zeta_3, \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Au p-ième itéré :

$$f\, dx^n = \sum_{j=0}^{p} P^j \sigma(\varphi_j)\, dx^n + P^p\, dP \wedge \pi_{p+1} + dP \wedge d\left(\sum_{j=1}^{p} P^{j-1}\zeta_{j+1}\right)$$

où il s'est révélé commode de poser $\varphi_0 = f$.

Il est facile de voir que cette itération converge au sens de Krull et fournit le résultat. □

Remarquons qu'à chaque étape, le choix de π_j procède d'un certain arbitraire. Anticipant quelque peu sur la suite, identifions $\hat{\Omega}^n$ à $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{\Omega}^{n-1}$ à $\hat{\mathcal{O}}^n$ et soulignons le fait qu'avec une scission λ de $u = dP \wedge : \hat{\mathcal{O}}^n \to \hat{\mathcal{O}}$ on possède une façon de choisir les π_j. Dans le cas analytique qui suit, je dois préciser la scission utilisée.

1.2. – Introduisons pour $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}$ le polycylindre

$$D(r) = \{x \in \mathbf{C}^n / |x_i| \leqslant r_i\}.$$

Avec $f = \sum_\beta a_\beta x^\beta \in \mathcal{O}$, on pose $|f|_r = \sum_\beta |a_\beta| r^\beta$. Le sous-espace de $\mathcal{O}$ sur lequel $|\ |_r$ est finie est noté $\mathcal{O}_r$. Pour $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{O}_r^p$ on écrit $|f|_r = \sum_{i=1}^{p} |f_i|_r$.

Ω_r^k désignant le $\mathcal{O}_r$-module des k-formes extérieures à coefficients dans $\mathcal{O}_r$, on se permet d'identifier Ω_r^n (respectivement Ω_r^{n-1}) à $\mathcal{O}_r$ (resp. $\mathcal{O}_r^n$).

Soit u une application $\mathcal{O}_r$-linéaire de $\mathcal{O}_r^n$ dans $\mathcal{O}_r$, rappelons [4] qu'une scission λ de u est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathcal{O}_r$ dans $\mathcal{O}_r^n$ telle que $u = u\lambda u$.

Ici je dirai que λ est adapté à $D(r)$ si elle est continue en tant qu'application linéaire de l'espace de Banach $\mathcal{O}_r$ dans l'espace de Banach $\mathcal{O}_r^n$ donc s'il existe $C_r > 0$: pour tout $f \in \mathcal{O}_r^n$, $|\lambda f|_r \leqslant C_r |f|_r$.

Le théorème des voisinages privilégiés de B. Malgrange [4] (*) a en particulier la conséquence suivante :

PROPOSITION 1.2. — *On peut trouver une scission λ de u qui possède la propriété :*

« l'ensemble des $D(r)$ tels que λ leur est adaptée est un système fondamental de voisinages de l'origine ».

Dans la suite on conduit l'itération de 1.1. avec une telle scission. Commençons par éclaircir le contrôle des normes à chaque étape du calcul.

LEMME 1. — *Posons $m = \min_{j=1,\dots,n} (m_j)$, $r = \min_{j=1,\dots,n} (r_j)$. Si $\varphi \in \mathcal{O}_r$ et $\pi \in \Omega_r^{n-1} \simeq \mathcal{O}_r^n$ sont tels que $d\iota_{\varphi_H} dx^n = d\pi$, alors :*

$$|\varphi|_r \leqslant \frac{1}{mr} |\pi|_r .$$

Preuve. — Un calcul simple qui se ramène à écrire :

si
$$\pi = \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, d\hat{x}_j \qquad \text{avec} \qquad \pi_j = \sum_{\beta} a_\beta^j x^\beta$$
alors
$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta} \frac{\beta_j}{\langle \beta, m \rangle - m_j + M} a_\beta^j x^{\beta - \mathbf{I}_j} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{I}_j = (0,\dots 1,\dots,0)$$
où le 1 est en j-ième position.

(*) Pour l'usage qu'on en fait, il suffirait ici d'invoquer les théorèmes de voisinages privilégiés classiques.

LEMME 2. — *Posons* $R = \sum_{j=1}^{n} r_j$.

Soit $\theta \in \Omega_r^{n-1}$ *avec* $d\theta = 0$, *il existe* $\zeta \in \Omega_r^{n-2}$ *telle que :* $\theta = d\zeta$ *et* $|\zeta|_r \leqslant R|\theta|_r$.

Preuve. — Il suffit de reprendre la démonstration du théorème de Poincaré [6].

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 1.3. — *Soit* $D(r)$ *un polycylindre tel que* λ *lui est adaptée, on peut choisir* r' *tel que* $D(r') \subset D(r)$ *et que pour tout élément* f *de* $\mathcal{O}_r$ *il existe* $\xi \in \Omega_{r'}^{n-2}$ *et* $\varphi_\alpha(P) \in \mathcal{O}_{r'}$ *satisfaisant :*

$$f\,dx^n = \sum_{\alpha\in A} x^\alpha \varphi_\alpha(P)\,dx^n + dP \wedge d\xi .$$

Preuve. — La première étape de l'itération consiste à écrire :

$$f\,dx^n = \sigma(f)\,dx^n + dP \wedge \pi_1$$

avec $|\pi_1|_r \leqslant C_r\,|f|_r$ puis $d\iota_{\varphi_1 H}\,dx^n = d\pi_1$. Le lemme 1 donne :

$$|\varphi_1|_r \leqslant \frac{C_r}{mr}\,|f|_r .$$

La relation $d\zeta_2 = \iota_{\varphi_1 H}\,dx^n - \pi_1$ et le lemme 2 permettent alors d'obtenir :

$$|\zeta_2|_r \leqslant R\left[1 + \frac{MR}{mr}\right] C_r |f|_r .$$

Et ainsi de suite au p-ième itéré on a :

$$|\varphi_j|_r \leqslant \left(\frac{C_r}{mr}\right)^j |f|_r$$

$$|\zeta_{j+1}|_r \leqslant RC_r\left[1 + \frac{MR}{mr}\right]\left[\frac{C_r}{mr}\right]^{j-1} |f|_r \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,p .$$

Je choisis alors r' en sorte que $|P|_{r'} \dfrac{C_r}{mr} < 1$.

Puisque

$$\left|\sum_{j=1}^{p} \mathrm{P}^{j-1}\zeta_{j+1}\right|_{r'} \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{P}|_{r'}^{j-1}|\zeta_{j+1}|_{r'} \leqslant \sum_{j=1}^{p} |\mathrm{P}|_{r'}^{j-1}|\zeta_{j+1}|_{r}$$

et

$$\left|\sum_{j=0}^{p} \mathrm{P}^{j}\sigma(\varphi_j)\right|_{r'} \leqslant \sum_{j=0}^{p} |\mathrm{P}|_{r'}^{j}|\varphi_j|_{r}$$

il s'ensuit le résultat de la proposition. □

Comme conséquences, on obtient les majorations :

$$|\xi|_{r'} \leqslant \frac{\mathrm{RC}_r\left(1+\dfrac{\mathrm{MR}}{mr}\right)}{1-|\mathrm{P}|_{r'}\dfrac{\mathrm{C}_r}{mr}}|f|_r \quad \text{et} \quad |\varphi_\alpha(\mathrm{P})|_{r'} \leqslant \frac{|f|_r}{1-\dfrac{\mathrm{C}_r}{mr}|\mathrm{P}|_{r'}}.$$

Par la proposition précédente on a établi que $\mathrm{G} = \dfrac{\Omega^n}{d\mathrm{P} \wedge d\Omega^{n-2}}$ est un $\mathbf{C}\{t\}$-module de type fini [1] [3]. Démontrons maintenant que G est sans torsion.

2. Convenons d'écrire qu'une forme ϖ est quasi-homogène de poids h si $\theta_{\mathrm{H}}\varpi = h\varpi$. H définit de la sorte une graduation de l'algèbre extérieure $\Omega = \bigoplus_{k\geqslant 0} \Omega^k$. Pour une forme différentielle ϖ on note $\varpi = \sum_h \varpi_h$ la décomposition en ses composantes quasi-homogènes.

En particulier un élément f de $\mathcal{O}$ $(\simeq \Omega^0)$ se laisse écrire $f = \sum_h f_h$.

Lemme. — *Soit f un élément de $\mathcal{O}$ tel que : $f\,dx^n \in d\mathrm{P} \wedge d\Omega^{n-2}$. Alors, toutes ses composantes quasi-homogènes f_h satisfont à : $f_h\,dx^n \in d\mathrm{P} \wedge d\Omega^{n-2}$.*

Preuve. — On écrit $f\,dx^n = d\mathrm{P} \wedge d\eta$ d'où $f_h\,dx^n = d\mathrm{P} \wedge (d\eta)_{h-1+\mathrm{M}}$ mais $(d\eta)_{h-1+\mathrm{M}} = d(\eta_{h-1+\mathrm{M}})$ car la dérivée de Lie commute avec d.

Proposition 2.1. — G *est sans torsion.*

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{O}$ tel que :

$$\mathrm{P}f\,dx^n = d\mathrm{P} \wedge d\eta.$$

On écrit alors :

$$d\mathrm{P} \wedge (\iota_{f\mathrm{H}}\,dx^n - d\eta) = 0.$$

Donc [2]

$$\iota_{fH}\, dx^n - d\eta = dP \wedge \rho \qquad \text{et} \qquad (H.f + Mf)\, dx^n = dP \wedge d(-\rho).$$

Décomposons f en ses composantes quasi-homogènes, il vient :

$$f_h\, dx^n = dP \wedge d\left(\frac{-\rho_{h-1+M}}{h+M}\right).$$

Il est facile d'en déduire un germe de $n-2$ forme analytique

$$\xi = \sum_h \frac{-\rho_{h-1+M}}{h+M}$$

tel que :

$$f\, dx^n = dP \wedge d\xi. \qquad \square$$

3. Notons $F = \dfrac{dP \wedge \Omega^{n-1}}{dP \wedge d\Omega^{n-2}}$ considéré comme $\mathbf{C}\{t\}$-module. Il est clair que $tG \subset F$.

PROPOSITION 3.1. — $tG = F$.

Preuve. — Je note $[\omega]$ la classe dans G d'un élément ω de Ω^n. Remarquons que les $[\omega_{\beta,i}]$ avec $\omega_{\beta,i} = dP \wedge (x^\beta\, d\hat{x}_i)$ engendrent F. Un calcul simple conduit à :

$$t[\beta_i x^{\beta-1_i}] = \quad \langle \beta, m \rangle + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} m_j \quad [\omega_{\beta,i}]. \qquad \square$$

De cette proposition résulte : $G/tG = G/F$. Comme

$$G/F \simeq \frac{\Omega^n}{dP \wedge \Omega^{n-1}} \simeq \mathcal{O}/J_P,$$

le fait que les $[x^\alpha\, dx^n]$ $(\alpha \in A)$ forment une base de G suit du lemme de Nakayama et le théorème est alors démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BRIESKORN, Die monodromie der isolierten singularitäten von hÿperflächen, *Manuscripta Math.*, 2 (1970), 103-161.

[2] G. DE RHAM, Sur la division des formes et des courants par une forme linéaire, *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), 346-352.

[3] B. MALGRANGE, Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. de l'ENS*, 4ème série, t. 7, fasc. 3 (1974).
[4] B. MALGRANGE, Frobenius avec singularités 1, *Revue de l'IHES* n° 46 (1976).
[5] F. PHAM, Caustiques, phase stationnaire et microfonctions, *Publications de l'Université de Nice.*
[6] PHAM-MAU QUAM, Introduction à la géométrie des variétés différentiables, Dunod.
[7] M. SEBASTIANI, Preuve d'une conjecture de Brieshorn, *Manuscripta Math.*, 2 (1970), 301-308.
[8] J. VEY, Un problème de cohomologie relative, *Arkiv för mathematik*, 15, n° 1 (1977).

Manuscrit reçu le 30 juin 1978.

Jean-Pierre FRANÇOISE,
Université Scientifique et Médicale
de Grenoble,
Laboratoire de Mathématiques Pures
associé au C.N.R.S.
Institut Fourier
B.P. 116
38402 St-Martin-d'Hères.