

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-RENÉ JOLY

CLAUDE MOSER

**Ordre de grandeur de  $L(1, \chi)$  et de  $L'(1, \chi)$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 1 (1979), p. 125-135

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_1\\_125\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_125_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ORDRE DE GRANDEUR DE $L(1, \chi)$ ET DE $L'(1, \chi)$

par J. R. JOLY et Cl. MOSER

*Dédié à Monsieur Claude Chabauty.*

### 1. Introduction.

Soit  $\chi$  un caractère réel primitif non principal de conducteur  $k$ . Notons  $S(y, \chi) = \sum_{n \leq y} \chi(n)$  ( $y \geq 1$ ) sa fonction sommatoire et  $L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) n^{-s} = s \int_1^{\infty} S(y, \chi) y^{-s-1} dy$  ( $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 0$ ) sa série  $L$  de Dirichlet. Pour  $\chi$  variable, l'estimation de Landau  $L(1, \chi) = \exp\left(\sum_p \chi(p) p^{-1} + O(1)\right)$  et les résultats de Chowla et d'Elliott [1], [2], [4] indiquent que les valeurs  $L(1, \chi)$  ont tendance à se distribuer symétriquement autour d'un centre  $\lambda$  voisin de 1 (apparemment,  $\lambda = (\pi^2/6)^{1/2} = 1,283$  : [1], [9]). Cette symétrie est confirmée par les calculs numériques ([11], tables 3 à 6). Cependant, alors qu'une simple sommation d'Abel fournit une majoration  $L(1, \chi) < c_1 \log k$  (avec  $c_1 < 1$ ), on ne connaît aucune démonstration d'une hypothétique minoration  $L(1, \chi) > c_2 / \log k$  ; on sait seulement qu'une telle minoration résulterait d'une majoration  $\beta < 1 - (c_3 / \log k)$  des zéros réels  $\beta$  des séries  $L(s, \chi)$  (théorème de Hecke) ou d'une majoration  $L'(1, \chi) < c_4$  (avec  $c_4$  suffisamment petit) de la dérivée en  $s = 1$  des séries  $L(s, \chi)$  (résultat dû à Fluch [5] avec  $c_4 = 1$  ; voir aussi un récent article de Pintz [8], notamment th. 1.)

L'objet de ce travail est de reprendre le résultat de Fluch d'un double point de vue :

- (i) évaluation empirique de l'ordre de grandeur de  $L'(1, \chi)$  (ce problème sera traité de façon plus précise dans une publication ultérieure) ;
- (ii) amélioration de la borne  $c_4 = 1$  utilisée par Fluch.

On arrive à deux conclusions convergentes :

- (i)  $L'(1, \chi)$  est en général inférieur à  $\pi^2/6$  ;
- (ii) pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $c(\epsilon) > 0$  effectivement calculable telle que la majoration  $L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - \epsilon$  implique la minoration  $L(1, \chi) > c(\epsilon)/\log k$ .

En d'autres termes, les séries  $L(s, \chi)$  avec zéro exceptionnel (s'il en existe) figurent parmi celles pour lesquelles la dérivée  $L'(1, \chi)$  est très proche de  $\pi^2/6$  (ou éventuellement supérieure à  $\pi^2/6$ ). Ce résultat est analogue à celui de Pintz mentionné plus haut.

L'ordre de grandeur de  $L'(1, \chi)$  est examiné au § 2, et la minoration conditionnelle de  $L(1, \chi)$  est établie au § 4 (th. 4.1) ; le § 3. donne des lemmes et des estimations utiles à la démonstration du théorème 4.1. Les démonstrations (et les notations) sont inspirées de [5] et de [3], chap. 4 et 21. Pour une bibliographie détaillée sur l'ordre de grandeur de  $L(1, \chi)$ , voir notamment [7].

## 2. Ordre de grandeur de $L'(1, \chi)$ .

Soit  $\lambda(n)$  la fonction de Liouville, et posons pour simplifier  $\alpha(s) = \zeta(2s)/\zeta(s)$  ( $\sigma > 1$ ). On a  $\sum_{n \geq 1} \lambda(n)n^{-s} = \prod_p (1 + p^{-s})^{-1} = \alpha(s)$ , et une comparaison de produits eulériens donne, pour  $s$  réel  $> 1$ , l'encadrement classique  $\alpha(s) < L(s, \chi) < \zeta(s)$ . Un calcul direct sur les séries de Dirichlet donne par ailleurs, toujours pour  $s > 1$ , l'inégalité  $L'(s, \chi) > \zeta(s)$ , mais ne permet pas de comparer  $\alpha'(s)$  et  $L'(s, \chi)$ . Le tracé de quelques courbes  $w = L(s, \chi)$  semble cependant indiquer que l'inégalité  $\alpha'(s) > L'(s, \chi)$  est également vérifiée, du moins pour  $k$  petit. Admettons donc *provisoirement* la *double* inégalité  $\zeta'(s) < L'(s, \chi) < \alpha'(s)$  ( $s > 1$ ), et faisons tendre  $s$  vers 1 ; il vient, à la limite,  $\zeta'(1) = -\infty \leq L'(1, \chi) \leq \pi^2/6 = \alpha'(1)$ , ce qui suggère une propriété du genre suivant :

(I) pour  $\chi$  variable, les valeurs  $L'(1, \chi)$  doivent se distribuer approximativement entre  $-\infty$  et  $\pi^2/6$ .

La comparaison des deux formules

$$L(1, \chi) = \int_1^{\infty} S(y, \chi) y^{-2} dy$$

et

$$L'(1, \chi) = \int_1^{\infty} (1 - \log y) S(y, \chi) y^{-2} dy,$$

et le tracé d'un certain nombre de courbes  $w = L(s, \chi)$  ( $s > 1$ ), suggèrent une seconde propriété :

(II) il existe entre  $L(1, \chi)$  et  $L'(1, \chi)$  une corrélation ainsi décrite : quand  $L(1, \chi)$  est petit,  $L'(1, \chi)$  est positif, voisin de  $\pi^2/6$  ; quand au contraire  $L(1, \chi)$  est grand,  $L'(1, \chi)$  est négatif, et très grand en valeur absolue.

Une étude numérique portant sur environ cinq cents caractères pairs ou impairs, avec  $k < 20\,000$ ,  $k = p, 4p, 8p, p_1 p_2$  ou  $2p_1 p_2$  ( $p, p_1, p_2$  premiers) a confirmé (autant qu'on pouvait l'espérer) la double tendance (I), (II). Le programme comportait, pour chaque caractère  $\chi$  considéré, le calcul de  $L(1, \chi)$  et celui de  $L'_0(1, \chi) = - \sum_{n=1}^k (\log n) \chi(n) n^{-1}$  ; la différence  $L'(1, \chi) - L'_0(1, \chi) = - \sum_{n=k}^{\infty} (\log n) \chi(n) n^{-1}$  se majore facilement par la formule d'Euler-Maclaurin périodique et est négligeable pour  $k \geq 1000$ . Cette étude a permis notamment d'observer

(i) les valeurs maxima et minima

$$L'_0(1, \chi) = 0,817 \quad (k = 1\,012 ; L(1, \chi) = 0,395)$$

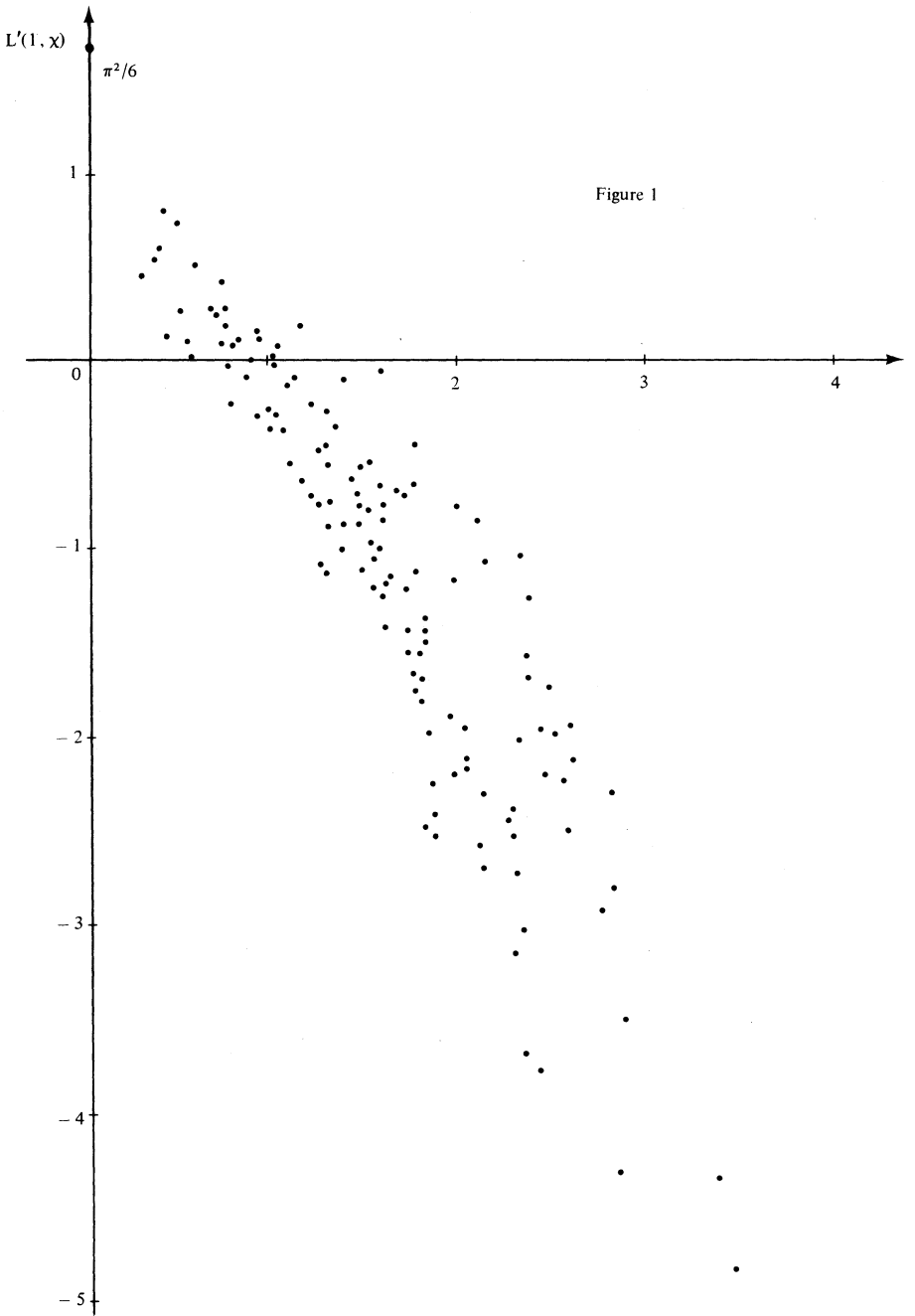
$$L'_0(1, \chi) = -5,507 \quad (k = 2\,279 ; L(1, \chi) = 3,685)$$

parfaitement en accord avec (I) et (II) (rappel :  $\pi^2/6 = 1,645$ ) ;

(ii) une corrélation entre  $L(1, \chi)$  et  $L'(1, \chi)$  (ou  $L'_0(1, \chi)$ ) en accord avec (II) (cette corrélation est plus nette pour les caractères impairs que pour les caractères pairs) : voir figure 1.

Pour plus amples détails, voir [10].

Cet ensemble de considérations n'autorise aucune conjecture précise, mais permet de considérer  $\pi^2/6$  comme valeur critique pour



$L'(1, \chi)$ , et de qualifier d'exceptionnels les caractères  $\chi$  tels que  $L'(1, \chi) > (\pi^2/6) - \epsilon$ ; ceci sera confirmé dans une certaine mesure par le théorème 4.1 (§ 4). Signalons par ailleurs que la démonstration du théorème 4.1 permet de *prouver* que (pour  $L'(1, \chi) < 0$ ), on a  $-L'(1, \chi) = O(L(1, \chi) \log k)$ . Cette estimation est évidemment à rapprocher de l'estimation élémentaire  $|L'(1, \chi)| = O((\log k)^2)$ , qu'elle améliore doublement : (i) en distinguant le cas  $L'(1, \chi) < 0$  du cas  $L'(1, \chi) > 0$ ; (ii) en remplaçant dans le  $O$  un facteur  $\log k$  par un facteur  $L(1, \chi)$  (lequel est en général  $O(\log \log k)$  : [4]). Cette estimation est également à rapprocher de la forme vaguement exponentielle de la courbe de corrélation entre  $L(1, \chi)$  et  $L'(1, \chi)$  (fig. 1).

### 3. Coefficients de Taylor de $\zeta(s) L(s, \chi)$ .

Conservons les conventions des §§ 1-2, et notons  $D = \chi(-1)k$  le discriminant de  $\chi$ ,  $K = \mathbf{Q}(D^{1/2})$  le corps quadratique associé à  $\chi$ , et  $F(s) = \zeta(s) L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ ,  $\sigma > 1$  la fonction zêta de  $K$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$  = le nombre d'idéaux entiers  $\alpha$  de  $K$  tels que  $N\alpha = n$ , d'où évidemment

$$a_n \geq 0 \text{ pour tout } n; a_n \geq 1 \text{ si } n \text{ est un carré.} \quad (1)$$

$F(s)$  admet un prolongement méromorphe au demi-plan  $\sigma > 0$ , avec unique pôle simple de résidu  $L(1, \chi)$  en  $s = 1$ . Si on pose

$$G(s) = F(s) - L(1, \chi) (s - 1)^{-1}, \quad (2)$$

$G(s)$  est donc holomorphe dans le demi-plan  $\sigma > 0$ . Les développements

$$\zeta(s) = (s - 1)^{-1} + \gamma + O(s - 1),$$

$$L(s, \chi) = L(1, \chi) + L'(1, \chi) (s - 1) + O((s - 1)^2),$$

donnent facilement

$$G(1) = L'(1, \chi) + \gamma L(1, \chi). \quad (3)$$

Introduisons maintenant les développements de Taylor modifiés de  $F(s)$  et  $G(s)$  autour de  $s_0 = 2$ ; on a d'une part

$$F(s) = \sum_{m \geq 0} b_m (2 - s)^m, \quad |2 - s| < 1, \quad (4)$$

$$b_m = \frac{1}{m!} \sum_{n \geq 1} a_n (\log n)^m n^{-2}, \quad (4')$$

et d'autre part, puisque  $(s-1)^{-1} = \sum_{m \geq 0} (2-s)^m$  pour  $|2-s| < 1$ ,

$$G(s) = \sum_{m \geq 0} c_m (2-s)^m, \quad |2-s| < 2, \quad (5)$$

$$c_m = b_m - L(1, \chi). \quad (5')$$

Posons également, pour simplifier l'écriture,

$$\beta_m = \frac{(-2)^m}{m!} \zeta^{(m)}(4). \quad (6)$$

Alors  $\beta_m \geq 0$ , et

$$\sum_{m \geq 0} \beta_m = \zeta(2) = \pi^2/6. \quad (7)$$

(En effet,  $\beta_m$  peut aussi s'écrire  $\frac{\zeta^{(m)}(4)}{m!} (2-4)^m$ , terme général du développement de Taylor de  $\zeta(s)$  autour de  $s_0 = 4$ , et pour  $s = 2$ .) D'autre part,

LEMME 3.1. — *Pour tout  $m \geq 0$ , on a l'inégalité*

$$b_m \geq \beta_m. \quad (8)$$

L'égalité (4') et la double minoration (1) donnent en effet, en écrivant  $n = \nu^2$  lorsque  $n$  est un carré,

$$b_m \geq \frac{1}{m!} \sum_{\nu \geq 1} (\log(\nu^2))^m (\nu^2)^{-2},$$

et le second membre se transforme immédiatement en

$$\frac{2^m}{m!} \sum_{\nu \geq 1} (\log \nu)^m \nu^{-4} = \frac{(-2)^m}{m!} \zeta^{(m)}(4) = \beta_m.$$

LEMME 3.2. — *Pour tout  $m \geq 0$ , on a l'estimation*

$$|\beta_m - (1/3)(2/3)^m| \leq (1/2)^m. \quad (9)$$

Il suffit évidemment de démontrer l'inégalité

$$\left| \frac{(-1)^m}{m!} \zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1} \right| \leq 4^{-m}. \quad (10)$$

Posons pour cela  $f_m(x) = (\log x)^m x^{-4}$  ( $x \geq 1$ ),  $S_m = \sum_{n \geq 1} f_m(n)$ ,  $I_m = \int_1^\infty f_m(x) dx = m! 3^{-m-1}$  (cette valeur s'obtient par  $m$

intégrations par parties, ou par le changement de variable  $y = \log x$ . On a  $f'_m(x) = (m - 4 \log x) (\log x)^{m-1} x^{-5}$ ;  $f_m(x)$  est donc croissante entre 1 et  $\exp(m/4)$ , décroissante entre  $\exp(m/4)$  et  $+\infty$ , avec un maximum égal à  $(m/4e)^m$  en  $\exp(m/4)$ . Une comparaison facile série/intégrale donne alors  $|S_m - I_m| \leq (m/4e)^m$ , soit, en remarquant que  $S_m = (-1)^m \zeta^{(m)}(4)$  et en divisant par  $m!$ ,

$$\left| \frac{(-1)^m}{m!} \zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1} \right| \leq \frac{(m/e)^m}{m!} 4^{-m}.$$

Mais une seconde comparaison série/intégrale donne

$$\log(m!) = \sum_{\nu \leq m} \log \nu > \int_1^m (\log x) dx = m(\log m) - m = \log(m/e)^m;$$

le facteur précédant  $4^{-m}$  dans la dernière majoration est donc inférieur à 1, et l'inégalité (10) se trouve démontrée.

*Remarque.* — Cette inégalité est plus explicite que celle résultant de l'application à  $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$  des inégalités de Cauchy (avec  $s_0 = 4$ ,  $R = 4$ ). Signalons qu'en appliquant à  $S_m$  la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre  $2j$  ( $j \geq 1$ ) pour  $m > 2j$  (ce qui précise la comparaison série/intégrale utilisée ci-dessus), on obtient une estimation

$$\left| \frac{(-1)^m}{m!} \zeta^{(m)}(4) - 3^{-m-1} \right| \leq A_j \binom{m}{2j} (4 + 2j - 1)^{-m}$$

qui donne directement le prolongement holomorphe de  $\zeta(s) - (s-1)^{-1}$  au disque  $|4-s| < 4 + 2j - 1$ , donc en fait (puisque  $j$  est quelconque) au plan complexe tout entier.

LEMME 3.3. — Pour  $m \geq 7$ , on a l'encadrement

$$(1/6) (2/3)^m \leq \beta_m \leq (1/2) (2/3)^m. \quad (11)$$

C'est une conséquence facile de (9).

LEMME 3.4. — Pour  $M \geq 6$ , les sommes partielles de la série (divergente)  $\sum_{m \geq 0} b_m$  vérifient l'inégalité

$$\sum_{m \leq M} b_m > (\pi^2/6) - (2/3)^M. \quad (12)$$

On a en effet (lemme 3.1)

$$\sum_{m \leq M} b_m \geq \sum_{m \leq M} \beta_m = \sum_{m \geq 0} \beta_m - \sum_{m > M} \beta_m,$$



et il suffit pour obtenir (12) d'utiliser le lemme 3.3, et de se rappeler (voir (7)) que  $\sum_{m \geq 0} \beta_m = \pi^2/6$ .

LEMME 3.5. — *Pour tout  $m \geq 0$ , on a l'inégalité*

$$|c_m| \leq 21 k^{1/2} (2/3)^m. \quad (13)$$

Les inégalités de Cauchy appliquées à  $G(s)$  avec  $s_0 = 2$  et  $R = 3/2$  donnent en effet

$$|c_m| \leq A(2/3)^m, \quad A = \sup |G(s)|, \quad (14)$$

le sup, dans cette formule et les suivantes, étant pris sur le cercle  $|2 - s| = 3/2$ . Sur ce cercle, on a  $|(s - 1)^{-1}| \leq 2$ , et aussi  $|\zeta(s)| \leq 2$  (écrire

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} \frac{s+1}{s-1} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)}{2} \int_1^\infty \beta_2(x) x^{-s-2} dx$$

et majorer la deuxième fonction de Bernoulli  $\beta_2(x)$  par  $1/6$ . D'où la majoration

$$A \leq 2 \sup |L(s, \chi)| + 2L(1, \chi). \quad (15)$$

Posant pour simplifier  $Y = (2/\pi) k^{1/2} \log k$ , on a par ailleurs, pour  $\sigma > 0$ ,

$$|L(s, \chi)| \leq |s| (I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \int_1^Y |S(y, \chi)| y^{-\sigma-1} dy,$$

$$I_2 = \int_Y^\infty |S(y, \chi)| y^{-\sigma-1} dy.$$

Sur le cercle  $|2 - s| \leq 3/2$ , on a évidemment  $\sigma \geq 1/2$  et  $|s| \leq 7/2$ ; de plus, on peut, dans  $I_1$ , majorer  $|S(y, \chi)|$  par  $y$ , et, dans  $I_2$ , la majorer par  $Y$  (inégalité de Polya; voir par exemple [6]). D'où  $I_1 \leq 2Y^{1/2}$ ,  $I_2 \leq Y(2Y^{-1/2}) = 2Y^{1/2}$ ,  $|L(s, \chi)| \leq (7/2)(4Y^{1/2})$ , et par conséquent

$$\sup |L(s, \chi)| \leq 14(2/\pi)^{1/2} k^{1/4} (\log k)^{1/2}. \quad (16)$$

Mais l'étude de la fonction  $(\log x)/x^{1/2}$  ( $x \geq 1$ ) montre qu'elle est maxima et égale à  $2/e$  pour  $x = e^2$ . D'où  $\log k \leq (2/e) k^{1/2}$ . Il suffit alors de porter cette inégalité dans (16), d'utiliser la majoration  $L(1, \chi) < \log k \leq (2/e) k^{1/2}$  et de reporter le tout dans (15) pour obtenir  $A \leq [28(4/\pi e)^{1/2} + (4/e)] k^{1/2}$ , et donc (13) (la constante entre crochets valant 20,634).

4. Minoration conditionnelle de  $L(1, \chi)$ .

THEOREME 4.1. — Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux constantes positives  $c(\epsilon)$  et  $k_0(\epsilon)$ , effectivement calculables, telles que, si  $k \geq k_0(\epsilon)$  et si  $L'(1, \chi) \leq (\pi^2/6) - \epsilon$ , alors on ait  $L(1, \chi) > c(\epsilon)/\log k$ .

Démonstration. — D'après (3) et (5), (5'), on a

$$L'(1, \chi) + \gamma L(1, \chi) = \sum_{m \geq 0} c_m = \sum_{m \geq 0} (b_m - L(1, \chi)). \quad (17)$$

Soient  $M = M(\epsilon) \geq 6$  et  $H = H(k) \geq 1$  deux entiers (dont la dépendance par rapport à  $\epsilon$  et à  $k$  sera définie plus loin). L'égalité (17) peut se détailler en

$$L'(1, \chi) + \gamma L(1, \chi) = \sum_{m \leq M} (b_m - L(1, \chi)) + \sum_{m=M+1}^{M+H} (b_m - L(1, \chi)) + \sum_{m > M+H} c_m,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(M + H + \gamma + 1) L(1, \chi) = S_1 + S_2 + S_3, \quad (18)$$

$$\text{avec } S_1 = \left( \sum_{m \leq M} b_m \right) - L'(1, \chi), \quad S_2 = \sum_{m=M+1}^{M+H} b_m \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{m > M+H} c_m.$$

Choisissons maintenant  $M$  assez grand pour que  $(2/3)^M \leq \epsilon/2$ . L'hypothèse sur  $L'(1, \chi)$  et le lemme 3.4 impliquent alors  $S_1 > \epsilon/2$ . Les inégalités  $M \geq 6$ ,  $H \geq 1$  impliquent d'autre part  $M + 1 \geq 7$  et  $S_2 \geq b_{M+1} \geq \beta_{M+1} \geq (1/9) (2/3)^M$  (lemmes 3.1 et 3.3). Enfin, on a évidemment (lemme 3.5)

$$S_3 \geq - \sum_{m > M+H} |c_m| \geq - 42 k^{1/2} (2/3)^M (2/3)^H.$$

Comme  $\gamma = 0,577 < 1$ , (18) donne donc

$$(M + H + 2) L(1, \chi) > \epsilon/2 + (2/3)^M [(1/9) - 42 k^{1/2} (2/3)^H]. \quad (19)$$

Choisissons alors  $H$  assez grand pour que  $(1/9) \geq 42 k^{1/2} (2/3)^H$ : l'inégalité (19) devient

$$L(1, \chi) > \epsilon/2(M + H + 2); \quad (20)$$

d'où le résultat annoncé, puisque les inégalités définissant le choix de  $M$  et de  $H$  sont effectives, et que le choix de  $H$  peut être réalisé avec  $H = H(k) = c \log k + c'$  ( $c, c'$ , constantes absolues).

Pour  $\epsilon \geq 2(2/3)^6 = 0,176$ , on peut prendre  $M = 6$ ,  $H = (5/4)(\log k) + 16$  : le théorème 4.1 (ou plutôt l'inégalité (20)) admet donc le

COROLLAIRE 4.2. — *Pour tout caractère  $\chi$  tel que*

$$L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - 2(2/3)^6 = 1,469,$$

*on a la minoration explicite*  $L(1, \chi) > \frac{0,07}{20 + \log k}$ .

Pour  $\epsilon < 2(2/3)^6$ , on peut prendre  $M = (5/2)\log(\epsilon^{-1}) + 2$ , et conserver la valeur de  $H$  indiquée ci-dessus ; de là le

COROLLAIRE 4.3. — *Pour tout caractère  $\chi$  tel que*

$$L'(1, \chi) < (\pi^2/6) - \epsilon, \quad \epsilon < 0,176,$$

*on a la minoration explicite*  $L(1, \chi) > \frac{\epsilon}{5 \log(\epsilon^{-1}) + 20 + (5/2)\log k}$ .

Terminons en remarquant (voir d'ailleurs la fin du § 2) que si  $L'(1, \chi) < 0$  ( $< 1,469$ ) le raisonnement qui a mené au corollaire 4.2 donne en fait l'inégalité

$$(\pi^2/6) - L'(1, \chi) < (5/4) L(1, \chi) (20 + \log k)$$

soit

$$-L'(1, \chi) = O(L(1, \chi) \log k).$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. CHOWLA, Improvement of a result of Linnik and Walfisz, *Proc. London Math. Soc.*, 50 (1949), 423-429.
- [2] S. CHOWLA, On the class number of the corpus  $P(\sqrt{-k})$ , *Proc. Nat. Inst. Sc. India*, 13 (1947), 197-200.
- [3] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory*, Markham, Chicago (1967).
- [4] P.D.T.A. ELLIOTT, On the size of  $L(1, \chi)$ , *J. reine angew. Math.*, 236 (1969), 26-36.
- [5] W. FLUCH, Zur Abschätzung von  $L(1, \chi)$ , *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, (1964), 101-102.

- [6] J.R. JOLY, Suites périodiques et inégalité de Polya, *Bull. Sc. Math.*, 102 (1978), 3-13.
- [7] P.T. JOSHI, The size of  $L(1, \chi)$  for real characters  $\chi$  with prime modulus, *J. Number Theory*, 2 (1970), 58-73.
- [8] J. PINTZ, Elementary methods in the theory of L-functions, II, *Acta Arithm.*, 31 (1976), 273-289.
- [9] J.E. LITTLEWOOD, On the class number of the corpus  $P(\sqrt{-k})$ , *Proc. London Math. Soc.*, 28 (1927), 358-372.
- [10] C. MOSER, Distribution des valeurs de  $L'(1, \chi)$ , *Sém. Th. Nombres*, Grenoble.
- [11] D. SHANKS, Littlewood bounds, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, Analytic Number Theory, XXIV (1973).

Manuscrit reçu le 20 juin 1978.

J.R. JOLY et Cl. MOSER,  
Université de Grenoble I  
Laboratoire de Mathématiques Pures  
Associé au CNRS  
Institut Fourier  
B.P. 116  
38402 Saint-Martin d'Hères (France).