

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD HOST

FRANÇOIS PARREAU

Sur un problème de I. Glicksberg : les idéaux fermés de type fini de $M(G)$

Annales de l'institut Fourier, tome 28, n° 3 (1978), p. 143-164

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_143_0

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE I. GLICKSBERG : LES IDÉAUX FERMÉS DE TYPE FINI DE $M(G)$

par B. HOST et F. PARREAU

1. Introduction.

1.1. G désigne un groupe abélien localement compact, Γ son dual, $M = M(G)$ l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G , et $L^1 = L^1(G)$ est identifié à l'idéal de M formé des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar m de G . Les autres notations d'analyse harmonique sont celles de [6].

Le but de cet article est de caractériser les mesures μ de M telles que $\mu * L^1$ soit fermé. Il est clair que, si μ est une mesure inversible dans M , ou idempotente, l'idéal $\mu * L^1$ est fermé ; plus généralement, c'est le cas si μ est la convoluée d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible. I. Glicksberg a conjecturé la réciproque dans [4] et l'a démontrée pour quelques cas particuliers ; nous nous proposons de la démontrer dans le cas général (théorème 1).

Nous utilisons l'étude de I. Glicksberg [4], essentiellement ses théorèmes 1.4 et 1.6, et corollaire 1.5, résumés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Soit μ une mesure de M . $\mu * L^1$ est fermé si et seulement si $\mu * M$ est fermé ; alors*

a) *il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \epsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;*

b) *$\mu * L^1$ est l'idéal des fonctions de L^1 dont la transformée de Fourier s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$;*

c) $\mu * M$ est l'idéal des mesures de M dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

COROLLAIRE. — Si $\mu * L^1$ est fermé, et s'il existe une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$, μ est la convoluée de η et d'une mesure inversible.

En effet, d'après la proposition 1, η appartient à $\mu * M$; soit $\nu \in M$ tel que $\mu * \nu = \eta$, et soit $\lambda = \mu + (\delta - \eta)$. λ est inversible :

$$\lambda * (\eta * \nu + (\delta - \eta)) = \delta,$$

et $\mu = \eta * \lambda$.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème :

THEOREME 1. — Soit μ une mesure de M . Si $\mu * L^1$ est fermé, ou si $\mu * M$ est fermé, μ est la convoluée d'une mesure idempotente et d'une mesure inversible.

D'après le corollaire de la proposition 1, il nous suffira de montrer que si $\mu * L^1$ est fermé il existe une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$.

1.2. Nous groupons, au §2, les définitions et résultats utilisés sur le spectre Δ de l'algèbre de Banach M .

— Pour la partie technique (§3), on a surtout besoin des résultats de G. Brown sur les produits de Riesz et les caractères généralisés [1].

— La seconde partie de la démonstration (§4) utilise la méthode des points critiques de J.L. Taylor [7] ; mais nous travaillons ici dans l'adhérence $\bar{\Gamma}$ de Γ dans Δ , et nous devons montrer que les points critiques de $\bar{\Gamma}$ sont des points critiques de Δ au sens de J.L. Taylor ; son résultat essentiel se démontre d'ailleurs beaucoup plus simplement et rapidement dans ce cas. Nous reprenons au §2 des résultats de C. Dunkl et D. Ramirez [2] [3], et nous incluons une démonstration du théorème des idempotents de Cohen (il devient très simple après l'étude de l'adhérence de Γ dans $L^\infty(\eta)$, pour une mesure idempotente η).

Ce travail n'est pas indispensable si $G = \mathbb{T}$, et nous indiquons (§4) comment obtenir alors une démonstration plus directe du théorème 1.

Enfin, la dernière partie (§5) est la généralisation du théorème 1 aux idéaux $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1)$ ou $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M)$ fermés, avec le résultat que *tout idéal fermé de type fini de M est de la forme $\eta * M$ pour une mesure idempotente η de M.*

2. L'adhérence des caractères forts dans le spectre de $M(G)$.

2.1. Nous utiliserons les notations de [1] pour le spectre Δ de l'algèbre de Banach M . $\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de $\mu \in M$.

Pour $\mu \in M$, la restriction d'un caractère $\chi \in \Delta$ à $L^1(\mu)$, identifié à un sous-espace de M , définit un élément χ_μ de $L^\infty(\mu)$. $\Delta(\mu)$ désigne l'ensemble de ces restrictions.

Dans Δ , le conjugué et le module d'un caractère χ , et le produit de deux caractères χ et φ , sont définis de façon que, pour tout $\mu \in M$,

$$(\overline{\chi}_\mu) = \overline{\chi_\mu} \quad , \quad |\chi|_\mu = |\chi_\mu| \quad , \quad \text{et} \quad (\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \varphi_\mu \quad .$$

On définit une opération de Δ sur M de façon que, pour $\chi, \varphi \in \Delta$ et $\mu, \nu \in M$,

$$\chi_\mu = \chi_\mu \mu \quad , \quad \chi(\mu * \nu) = \chi_\mu * \chi_\nu \quad .$$

$$(\varphi\mu)^\wedge(\chi) = (\chi\mu)^\wedge(\varphi) = \hat{\mu}(\varphi\chi) \quad .$$

Un caractère $\varphi \in \Delta$ est positif si pour toute mesure $\nu \geq 0$, $\hat{\nu}(\varphi)$ est positif ; alors, pour toute mesure $\mu \in M$, φ_μ est positif. L'ensemble Δ_+ des caractères positifs est ordonné de façon que $\varphi \leq \psi$ si et seulement si, pour $\nu \geq 0$, $\hat{\nu}(\varphi) \leq \hat{\nu}(\psi)$, ou, pour $\mu \in M$, $\varphi_\mu \leq \psi_\mu$.

Un élément γ de Γ définit un caractère de M par la transformation de Fourier-Stieltjes : $\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma d\mu$, pour $\mu \in M$. On appelle ces caractères *les caractères forts*. En particulier $1 \in \Gamma$ est identifié à l'élément 1 de Δ , tel que, pour tout $\mu \in M$, $1_\mu = 1$ et $\hat{\mu}(1) = \int d\mu$.

Les caractères forts sont de module 1. Inversement, si $\chi \in \Delta$ est de module 1, χ n'est pas identiquement nul sur L^1 , donc est un caractère fort.

2.2. Pour l'étude des topologies sur Δ , on pourra se reporter à [7], chapitre 5 (J.L. Taylor y présente Δ comme le dual \hat{S} d'un semi-groupe S).

La *topologie faible* de Δ est la topologie de Gelfand ; elle correspond sur chaque $\Delta(\mu)$ à la topologie faible $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$.

Pour cette topologie, Δ est compact ; Δ_+ , et pour $\varphi \in \Delta_+$ l'ensemble des caractères de module $\leq \varphi$ sont fermés ; la conjugaison est continue, mais la multiplication est seulement séparément continue et $\chi \rightarrow |\chi|$ n'est pas continue.

PROPOSITION 2. — Si $\chi_\alpha \rightarrow \chi$ et $|\chi_\alpha| \rightarrow \varphi$ faiblement, on a $|\chi| \leq \varphi$.

En effet, soit $\mu \geq 0$ et $f \in L^\infty(\mu)$ tel que $f\chi_\mu = |\chi_\mu|$ et $|f| \leq 1$;

$$\hat{\mu}(|\chi|) = (f\mu)^\wedge(\chi) = \lim (f\mu)^\wedge(\chi_\alpha) \leq \lim \hat{\mu}(|\chi_\alpha|) = \hat{\mu}(\varphi).$$

Sauf mention explicite du contraire, la topologie considérée sur Δ sera toujours la topologie faible.

La *topologie forte* sur Δ est définie par l'opération de Δ sur M : χ_α tend fortement vers χ si, pour toute mesure μ , $\|\chi_\alpha\mu - \chi\mu\|$ tend vers 0. Pour cette topologie, la multiplication et les applications $\chi \rightarrow \chi$, $\chi \rightarrow |\chi|$ sont continues.

PROPOSITION 3. — Si χ_α tend vers χ faiblement, χ_α tend fortement vers χ dès que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- a) $|\chi| \geq |\chi_\alpha|$
- b) $\chi_\alpha \geq \chi$.

En particulier les topologies fortes et faibles coïncident sur les parties de Δ formées de caractères ayant le même module.

PROPOSITION 4. — Toute partie fortement fermée non vide de Δ_+ admet un élément minimal.

Ces résultats sont démontrés par J.L. Taylor [7]. Il définit les points critiques qui sont les éléments minimaux des parties fortement ouvertes et fermées de Δ_+ , et montre que ce sont les idempotents h_τ construits ci-dessous. Nous n'utiliserons pas ce résultat, mais nous ferons une construction analogue dans l'adhérence faible de Γ dans Δ .

2.3. Pour une topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, on note G_τ le groupe G muni de cette topologie, et $M(G_\tau)$ la sous-algèbre de M formée des mesures régulières pour cette topologie. Toute mesure de M admet une décomposition

$$\mu = \mu_\tau + \nu_\tau$$

où μ_τ appartient à $M(G_\tau)$ et ν_τ est étrangère à $M(G_\tau)$, c'est-à-dire que $|\nu_\tau|(K) = 0$ pour tout compact K de la topologie τ ; ces mesures forment un idéal, et le projecteur $\mu \rightarrow \mu_\tau$ est un homomorphisme de M .

On définit un caractère h_τ de Δ par

$$\hat{\mu}(h_\tau) = \hat{\mu}_\tau(1) = \int d\mu_\tau; \quad h_\tau \mu = \mu_\tau.$$

h_τ est un caractère idempotent.

Si φ appartient au dual $\bar{\Gamma}_\tau$ de G_τ , l'application $\mu \rightarrow \hat{\mu}_\tau(\varphi)$ est un caractère de M , qui est de module h_τ . Les caractères de module h_τ forment un groupe d'élément unité h_τ , isomorphe à Γ_τ (de même que les caractères de module 1 forment un groupe identifié à Γ). Sur ce groupe les topologies forte et faible, ainsi que la topologie du dual de G_τ , coïncident.

2.4. *Notations.* — L'adhérence faible $\bar{\Gamma}$ de Γ dans Δ est un semi-groupe stable par conjugaison. On note $\bar{\Gamma}_+ = \bar{\Gamma} \cap \Delta_+$; si $\chi \in \bar{\Gamma}$, $|\chi|$ n'est pas en général dans $\bar{\Gamma}$, mais $|\chi|^2 = \chi\bar{\chi} \in \bar{\Gamma}_+$.

Si h est un idempotent de $\bar{\Gamma}_+$, les caractères de $\bar{\Gamma}$ de module h forment un groupe d'élément unité h , qu'on note Γ_h . Sur Γ_h les topologies forte et faible coïncident (proposition 3).

Par analogie avec les points critiques de J.L. Taylor, on définit :

DEFINITION. — Soit $h \in \bar{\Gamma}_+$ un idempotent; on dit que h est critique dans $\bar{\Gamma}$ si h n'est pas limite de caractères de $\bar{\Gamma}_+$ strictement inférieurs à h .

Dans cette définition, les convergences forte et faible sont équivalentes. Il suffit (et d'ailleurs il faut) que l'idempotent h soit un élément minimal d'une partie fortement ouverte et fermée de $\bar{\Gamma}_+$.

THEOREME 2. — *Les idempotents critiques dans $\bar{\Gamma}$ sont les caractères h_τ associés aux topologies τ de groupe localement compact sur G plus fines que la topologie initiale.*

a) Soit h un idempotent critique dans $\bar{\Gamma}$ et $\varphi \in \Gamma_h$; si $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$ avec $\varphi_\alpha \in \bar{\Gamma}$ et $|\varphi_\alpha| \leq |\varphi| = h$, la convergence est forte (proposition 3) et on a aussi

$$|\varphi_\alpha|^2 \rightarrow |\varphi|^2 = h, \quad |\varphi_\alpha|^2 \leq h, \quad |\varphi_\alpha|^2 \in \bar{\Gamma}_+ ;$$

donc $|\varphi_\alpha| = h$ pour α assez grand, c'est-à-dire $\varphi_\alpha \in \Gamma_h$.

Γ_h est donc ouvert dans l'ensemble compact des caractères de $\bar{\Gamma}$ de module inférieur ou égal à h ; Γ_h est un groupe localement compact.

C. Dunkl et D. Ramirez [2], [3], ont caractérisé les groupes localement compacts dans $\bar{\Gamma}$, avec le résultat donné par le théorème (le groupe Γ_h est alors isomorphe à un groupe Γ_τ). Nous en donnons une démonstration plus directe.

b) Soit G_h le groupe dual de Γ_h . L'homomorphisme $j : \gamma \rightarrow h\gamma$ de Γ dans Γ_h est continu, d'image dense car

$$\overline{h\Gamma} = h\bar{\Gamma} = \{\chi \in \bar{\Gamma} ; h\chi = \chi\} = \{\chi \in \bar{\Gamma} ; |\chi| \leq h\}.$$

Donc l'adjoint $j^* : G_h \rightarrow G$ de j est une injection continue.

Soit d'autre part δ_g la mesure de Dirac en $g \in G$; pour $\chi \in \Delta$, $\chi\delta_g$ est de la forme $\lambda\delta_g$; en intégrant on trouve $\lambda = \hat{\delta}_g(\chi) \neq 0$ puisque δ_g est inversible. Pour $\chi, \psi \in \Delta$, il vient

$$\chi\psi\delta_g = \hat{\delta}_g(\chi\psi)\delta_g = \hat{\delta}_g(\chi)\hat{\delta}_g(\psi)\delta_g \neq 0.$$

$\varphi \mapsto \hat{\delta}_g(\varphi)$ définit donc un caractère \tilde{g} continu sur Γ_h — en particulier $\hat{\delta}_g(h) = 1$ — et pour $\gamma \in \Gamma$

$$\langle \tilde{g}, j(\gamma) \rangle = \hat{\delta}_g(h\gamma) = \hat{\delta}_g(h)\hat{\delta}_g(\gamma) = \hat{\delta}_g(\gamma) = \langle g, \gamma \rangle,$$

soit $g = j^*(\tilde{g})$, ce qui montre que j^* est surjectif.

j^* est donc une bijection continue de G_h sur G ; on identifie G_h au groupe G muni de sa topologie τ plus fine que la topologie initiale de G .

c) Pour montrer $h = h_\tau$; il suffit de montrer que, pour $\mu \in M$, $h\mu \in M(G_\tau)$ et que, pour $\nu \in M(G_\tau)$, $h\nu = \nu$.

Soit $\mu \in M$; comme $h|\mu| = |h\mu|$ et que toute mesure absolument continue par rapport à une mesure de $M(G_\tau)$ est dans $M(G_\tau)$, on peut se restreindre au cas où μ est positive. Alors la restriction de $\hat{\mu}$ à Γ_h est définie positive et continue ; c'est donc, d'après le théorème de Bochner, la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\nu \in M(G_h)$. En identifiant G_h à G_τ , on a plongé $M(G_h)$ dans M de façon que, pour $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\nu}(\gamma) = \hat{\nu}(j(\gamma)) = \hat{\mu}(h\gamma) = (h\mu)^\wedge(\gamma) ;$$

Alors $h\mu = \nu \in M(G_\tau)$.

Inversement, soit $\nu \in M(G_\tau)$ et $\gamma_\alpha \rightarrow h$; $h\gamma_\alpha \rightarrow h$, donc γ_α converge vers l'unité dans la topologie induite sur Γ par j , qui est la topologie sur Γ duale de la topologie τ sur G ; pour cette topologie $\hat{\nu}$ est continue, et pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\nu}(h\gamma) = \lim \hat{\nu}(\gamma_\alpha \gamma) = \hat{\nu}(\gamma) .$$

Donc $\nu = h\nu$, ce qui achève de démontrer que $h = h_\tau$.

d) Il reste à montrer que, pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale, l'idempotent h_τ est un idempotent critique dans $\bar{\Gamma}$.

Soit Ω l'ensemble des caractères de $\bar{\Gamma}_+$ supérieurs ou égaux à h_τ ; Ω est fermé et $1 \in \Omega$, donc Ω admet un élément minimal h ; il est clair que $h^2 \leq h$ et $h^2 \in \Omega$, donc h est idempotent.

Soit μ une mesure de probabilité dans $L^1(G_\tau)$; si $\chi \in \bar{\Gamma}$ et si $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$, la restriction de χ à $M(G_\tau)$, non nulle sur $L^1(G_\tau)$, est un caractère fort de $M(G_\tau)$, et $|\chi| \geq h_\tau$. Ω est donc aussi l'ensemble des caractères φ de $\bar{\Gamma}_+$ tels que $\hat{\mu}(\varphi) \neq 0$; c'est un ouvert de $\bar{\Gamma}_+$, et h est critique.

Soient alors $j : \Gamma \rightarrow \Gamma_h$, $j_\tau : \Gamma \rightarrow \Gamma_\tau$ et $k : \Gamma_h \rightarrow \Gamma_\tau$ les homomorphismes définis par $j(\gamma) = h\gamma$, $j_\tau(\gamma) = h_\tau\gamma$ et $k(\varphi) = h_\tau\varphi$; ils sont continus et $j_\tau = k \circ j$; les adjoints de j et j_τ sont les identités continues $G_h \rightarrow G$ et $G_\tau \rightarrow G$; l'adjoint k^* de k est donc l'identité de G_τ dans G_h et est continu ; pour montrer $h_\tau = h$, il suffit d'après ce qui précède de montrer que k^* est un isomorphisme ; k est injectif et d'image dense (adjoint de l'identité) et il reste à vérifier que l'image réciproque par k d'un compact K de Γ_τ est un compact de Γ_h ; soit K' le compact de $\bar{\Gamma}$

$$K' = \{\chi \in \bar{\Gamma} ; |\chi| \leq h \text{ et } h_\tau\chi \in K\} ;$$

$k^{-1}(K)$ est inclus dans K' et, si $\chi \in K'$, $|h_\tau \chi| = h_\tau$ donc $|\chi| \geq h_\tau$; on a alors $h_\tau \leq |\chi^2| \leq h$, et, d'après la définition de h comme élément minimal de Ω , $|\chi|^2 = h$; χ est donc dans Γ_h , $K' = k^{-1}(K)$. $k^{-1}(K)$ est compact, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Cette dernière partie de la démonstration (d) montre que pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G plus fine que la topologie initiale et pour toute mesure $\mu \in M$, on a

$$\hat{\mu}_\tau(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}.$$

2.5. Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions, pour une mesure η idempotente – plus généralement pour une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières, le *semi-groupe* $\overline{\Gamma}(\eta)$ des restrictions à $L^1(\eta)$ des caractères de $\overline{\Gamma}$, qui est aussi l'adhérence pour la topologie $\sigma(L^\infty(\eta), L^1(\eta))$ du groupe $\Gamma(\eta)$ des caractères forts dans $L^\infty(\eta)$.

PROPOSITION 5. – Soit η une mesure telle que $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$;

a) La topologie forte est discrète dans $\overline{\Gamma}(\eta)$,

b) Tout $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ a son module idempotent,

c) $\overline{\Gamma}_+(\eta) = \{\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta) ; \varphi \geq 0\}$ est fini.

a) On a encore $\hat{\eta}(\overline{\Gamma}) \subset \mathbf{Z}$, et si $\varphi, \psi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ avec $\varphi \neq \psi$, $\varphi\eta$ est différente de $\psi\eta$; il existe donc un $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$|(\varphi\eta)^\wedge(\gamma) - (\psi\eta)^\wedge(\gamma)| = |\hat{\eta}(\varphi\gamma) - \hat{\eta}(\psi\gamma)| \geq 1,$$

donc

$$\|\varphi\eta - \psi\eta\| \geq 1.$$

b) Soit $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$; il suffit de montrer que $|\varphi^2|$ est idempotent ; on peut donc supposer $\varphi \geq 0$. Alors la suite (φ^n) converge fortement dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, donc est stationnaire ; or si $\varphi^n = \varphi^{n+1}$ pour un n , il est clair que φ est idempotent.

c) On suppose que φ_α converge vers φ faiblement, avec $\varphi_\alpha, \varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$;

$$\|\varphi\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi - \varphi\varphi_\alpha) d|\eta| = |\eta|^\wedge(\varphi) - |\eta|^\wedge(\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

$$\|\varphi_\alpha\eta - \varphi\varphi_\alpha\eta\| = \int (\varphi_\alpha - \varphi\varphi_\alpha) d|\eta| = |\eta|^\wedge(\varphi_\alpha) - |\eta|^\wedge(\varphi\varphi_\alpha) \longrightarrow 0$$

donc $\|\varphi\eta - \varphi_\alpha\eta\| \longrightarrow 0$, la topologie faible (compacte) coïncide avec la topologie forte (discrète) sur $\overline{\Gamma}_+(\eta)$, qui est donc fini.

Le dernier argument montre plus généralement que pour un idempotent φ de Δ les convergences forte et faible vers φ dans Δ_+ sont équivalentes.

$\Gamma(\eta)$ est dense dans le groupe des caractères de module 1 de $\overline{\Gamma}(\eta)$, et celui-ci est discret car la topologie forte y coïncide avec la topologie faible ; dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, tout caractère de module 1 est donc un caractère fort.

Soit H le groupe-support de η ; $H^\perp = \{\gamma \in \Gamma ; \gamma\eta = \eta\}$ est le noyau de la projection $\Gamma \longrightarrow \Gamma(\eta)$; H^\perp est ouvert, donc H est compact.

On dira que η est une *mesure élémentaire* si 1 est le seul élément positif non nul de $\overline{\Gamma}(\eta)$. L'ensemble des $\varphi \in \overline{\Gamma}(\eta)$ tels que $\hat{\mu}(\varphi) \neq 0$, qui est compact, est alors contenu dans le groupe discret $\Gamma(\eta)$ des caractères de module 1 ; il est donc fini.

Dans ce cas, $\hat{\eta}$ est nul sauf sur une réunion finie de classes $\gamma_j H^\perp$, sur chacune desquelles $\hat{\eta}$ a une valeur constante $n_j \in \mathbf{Z}$. On trouve donc, si m_H désigne la mesure de Haar de H ,

$$\eta = \sum_{1 \leq j \leq k} n_j \gamma_j m_H.$$

Dans le cas général $\hat{\eta}(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$, pour tout $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$, on définit une *partie élémentaire de η associée à φ* ,

$$\epsilon_\varphi = \left(\prod_{\psi < \varphi} (\varphi - \psi) \right) \eta = \left(\varphi - \sup_{\psi < \varphi} \psi \right) \eta.$$

ϵ_φ est une combinaison à coefficients entiers de mesures $\psi\eta$, donc $\hat{\epsilon}_\varphi$ a ses valeurs entières. ϵ_φ est bien une mesure élémentaire, car tout élément $\theta \in \overline{\Gamma}_+(\epsilon_\varphi)$ est la restriction d'un élément θ_0 de $\overline{\Gamma}_+(\eta)$ (si $\gamma_\alpha \longrightarrow \theta$ dans $\overline{\Gamma}(\epsilon_\varphi)$, et si θ_1 est un point adhérent de (γ_α) dans $\overline{\Gamma}(\eta)$, $\theta_0 = |\theta_1|^2$ a aussi θ pour restriction dans $\overline{\Gamma}(\epsilon_\varphi)$) ; et

- si $\theta_0 \geq \varphi$, on a $\theta_0 \psi = \psi$ pour tout $\psi \leq \varphi$, donc $\theta_0 \epsilon_\varphi = \epsilon_\varphi$, et $\theta = 1$,

- sinon $\theta_0 \varphi < \varphi$ et $\theta_0(\varphi - \theta_0 \varphi) = 0$, donc $\theta_0 \epsilon_\varphi = 0$, et $\theta = 0$.

De plus, η est la somme de ses parties ϵ_φ pour $\varphi \in \overline{\Gamma}_+(\eta)$.

Cette décomposition de η en une somme finie de mesures élémentaires de la forme $\sum n_j \gamma_j m_H$ est celle du *théorème des idempotents de Cohen*.

3. Les lemmes techniques .

3.1. Pour la démonstration du théorème 1, dans ce paragraphe et le suivant, on considère une mesure μ de M telle que $\mu * L^1$ soit fermé. D'après la proposition 1, toute mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$ est dans $\mu * M$ et il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \epsilon$ si $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$.

Notation. — Pour deux nombres complexes s, t , on écrira $s \sim t$ si s et t sont tous les deux nuls, ou tous les deux non nuls.

Etant donné que 0 est isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, pour toute mesure idempotente η l'ensemble $\{\chi \in \bar{\Gamma} ; \hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)\}$ est un ouvert et fermé de $\bar{\Gamma}$. Il suffit de trouver une mesure idempotente η telle que cet ensemble soit $\bar{\Gamma}$ entier (d'après la remarque à la fin de 1.1).

Dans la démonstration du lemme qui suit, on utilise des produits de Riesz, avec les définitions et les résultats de G. Brown [1] ; nous rappelons simplement les propriétés qui interviennent ici.

Soit L un groupe abélien compact, m_L sa mesure de Haar ; une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ d'éléments $\neq 1$ de L est dite *dissociée* si, pour toute suite $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ d'entiers de valeur absolue ≤ 2 ,

$$\prod_{1 \leq k \leq n} \gamma_k^{\epsilon_k} = 1$$

si et seulement si $\gamma_k^{\epsilon_k} = 1$ pour $1 \leq k \leq n$.

Pour $0 < r \leq \frac{1}{2}$, si la suite (γ_n) est dissociée, le produit

$$\prod_{n \geq 1} (1 + r\gamma_n + r\bar{\gamma}_n) \cdot m_L$$

converge vaguement dans $M(L)$ vers une mesure de probabilité ρ appelée *produit de Riesz*. Les γ_n sont appelés les *lettres* et les produits finis $\prod_{1 \leq k \leq n} \gamma_k^{\epsilon_k}$ avec $|\epsilon_k| \leq 1$, sont appelés les *mots* du produit de Riesz ; la longueur d'un mot est le nombre d'exposants non nuls qui y figurent.

Pour $\gamma \in \hat{L}$, $\hat{\rho}(\gamma)$ est non nul si et seulement si γ est un mot, avec alors, si $\gamma \neq 1$, $0 < \hat{\rho}(\gamma) \leq 2r$.

Pour tout caractère φ de $M(L)$ adhérent à la suite (γ_n) , d'après (1), φ_ρ est une constante non nulle. Alors, pour le caractère $h = |\varphi|^\circ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\varphi|^\epsilon$ (pour la définition de ces caractères, on pourra se reporter à [1]), on a $h_\rho = 1$. Par contre, comme γ_n tend vers l'infini dans \hat{L} , on a $\varphi m_L = 0, hm_L = 0$, et $h\sigma = 0$ pour toute mesure σ absolument continue par rapport à m_L .

Si L est un sous-groupe compact de G , on dira que la suite (γ_n) dans Γ est *dissociée sur L* si sa projection dans $\hat{L} = \Gamma/L^\perp$ est dissociée. On a alors les mêmes propriétés pour le produit de Riesz construit sur L , un caractère φ adhérent à la suite (γ_n) dans $\bar{\Gamma}$, et l'idempotent $h = |\varphi|^\circ$ de Δ .

3.2. LEMME 1. — Soit $\chi \in \bar{\Gamma}$; si $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma) \neq 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

a) On suppose $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

On construit par récurrence une suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ dans Γ de façon que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p < n$,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}(\gamma_n) &= 0, \\ \hat{\mu}(\gamma_n \bar{\gamma}_p \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\bar{\gamma}_n \gamma_p \gamma) \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

pour tout γ appartenant à l'ensemble

$$A_p = \left\{ \prod_{1 \leq k < p} \gamma_k^{\epsilon_k} ; |\epsilon_k| \leq 3 \right\}.$$

Soit en effet $\gamma_\alpha \rightarrow \chi$ ($\gamma_\alpha \in \Gamma$) ; on suppose construits pour $n < q$ des termes γ_n satisfaisant les conditions (I) et tels que, pour tout $n < q$ et tout $\gamma \in A_n$,

$$\hat{\mu}(\bar{\gamma}_n \chi \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_n \bar{\chi} \gamma) \neq 0.$$

Pour α assez grand, 0 étant isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, on a pour $n < q$ et $\gamma \in A_n$,

$$\hat{\mu}(\gamma_\alpha) = 0, \quad \hat{\mu}(\bar{\gamma}_n \gamma_\alpha \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_n \bar{\gamma}_\alpha \gamma) \neq 0.$$

De plus $\bar{\gamma}_\alpha \chi$ et $\gamma_\alpha \bar{\chi}$ convergent vers $|\chi^2|$, et, $\hat{\mu}(|\chi^2|\gamma)$ étant non nul pour tout γ , on a aussi pour α assez grand, pour tout $\gamma \in A_q$,

$$\hat{\mu}(\bar{\gamma}_\alpha \chi \gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\gamma_\alpha \bar{\chi} \gamma) \neq 0.$$

On peut donc choisir γ_q parmi les γ_α , satisfaisant les conditions (I) et la condition supplémentaire ci-dessus.

Dans la suite, on extrait des sous-suites de (γ_n) – les conditions (I) restent vérifiées – sans changer la notation.

b) On suppose que γ_n converge faiblement dans $\bar{\Gamma}(\mu)$ vers $f \in \bar{\Gamma}(\mu)$, et que, pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\bar{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f^2|$ dans $\bar{\Gamma}(\mu)$.

C'est possible si le compact $\bar{\Gamma}(\mu)$ est métrisable, quitte à prendre une sous-suite : si γ_n tend vers f , $\bar{\gamma}_n f$ tend vers $|f^2|$ et $\bar{\gamma}_n \gamma_p$ tend vers $\bar{\gamma}_n f$ pour n fixé.

Dans le cas général, soit Γ' le sous-groupe fermé de Γ engendré par les γ_n , G' son dual et μ' la projection de μ dans $M(G')$

$L^1(\mu')$ est un quotient de $L^1(\mu)$; $L^\infty(\mu')$ s'identifie à un sous-espace faiblement fermé de $L^\infty(\mu)$, et $\bar{\Gamma}'(\mu')$ au semi-groupe fermé de $\bar{\Gamma}(\mu)$ engendré par les γ_n . Or Γ' est séparable, Γ' est total dans $L^1(\mu')$ qui est donc séparable, et la boule unité de $L^\infty(\mu')$ est faiblement métrisable. Les γ_n sont donc contenus dans un sous-semi-groupe compact métrisable de $\bar{\Gamma}(\mu)$, et on peut extraire des sous-suites convergentes comme précédemment.

c) On définit un sous-groupe fermé de G , L , par

$$L^\perp = \{\gamma \in \Gamma ; \gamma \hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\mu}^{-1}(0)\}.$$

L^\perp est un sous-groupe ouvert de Γ car 0 est isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}(\Gamma)$, et $\hat{\mu}$ est uniformément continue ; donc L est compact.

Quitte à prendre une nouvelle sous-suite, on pourra supposer,

- 1/ Si γ_n^2 tend vers l'infini modulo L^\perp , $\gamma_n^2 \notin A_n L^\perp$;
- 2/ Sinon, que γ_n^2 est constant modulo L^\perp .

Soit alors, pour $n \geq 1$, $\theta_n = \bar{\gamma}_{2n+1} \gamma_{2n}$.

La suite (θ_n) est dissociée sur L . Soit en effet

$$\theta = \prod_{1 \leq k \leq n} \theta_k^{\epsilon_k}$$

avec $|\epsilon_k| \leq 2$ pour $1 \leq k \leq n$ et $\theta_n^{\epsilon_n} \neq 1$ modulo L^\perp .

– Si $|\epsilon_n| = 2$, $\gamma_{2n}^{\epsilon_n} \prod_{1 \leq k < n} \theta_k^{\epsilon_k}$ est dans A_{2n+1} et l'hypothèse faite dans le cas 1 montre que θ n'est pas dans L^\perp ; dans le cas 2, les θ_n ont tous leurs carrés dans L^\perp et on n'a pas à considérer $|\epsilon_n| = 2$.

– Si $|\epsilon_n| = 1$, et si θ était dans L^\perp , on aurait, d'après la définition de ce groupe $\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}(\gamma\theta)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Or $\hat{\mu}(\gamma_1) = 0$,

$$\gamma_1 \prod_{1 \leq k < n} (\bar{\gamma}_{2k+1} \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \in A_{2n}$$

donc

$$\hat{\mu}(\gamma_1 \theta) = \hat{\mu}((\bar{\gamma}_{2n+1} \gamma_{2n})^{\epsilon_n} \gamma_1 \prod_{1 \leq k < n} (\bar{\gamma}_{2k+1} \gamma_{2k})^{\epsilon_k}) \neq 0.$$

d) On peut donc construire sur L le produit de Riesz

$$\rho_n = \prod_{p \geq 1} (1 + 2^{-n} \theta_p + 2^{-n} \bar{\theta}_p) \cdot m_L.$$

L'ensemble des zéros de $\hat{\mu}$ dans Γ , et celui de $\hat{\rho}_n$, sont des réunions de classes modulo L^\perp . On va montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de ces classes sur lesquelles $\hat{\mu}$ est nulle mais $(\bar{\gamma}_n \rho_n)^\wedge$ non nulle.

En effet, si $(\bar{\gamma}_n \rho_n)^\wedge(\gamma) = \hat{\rho}_n(\bar{\gamma}_n \gamma) \neq 0$, $\bar{\gamma}_n \gamma$ est modulo L^\perp un mot de ρ_n qui s'écrit

$$\prod_{1 \leq k \leq p} (\bar{\gamma}_{2k+1} \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \quad \text{avec } |\epsilon_k| \leq 1, |\epsilon_p| = 1.$$

Si $n < 2p$,

$$\alpha = \gamma_n \prod_{1 \leq k < p} (\bar{\gamma}_{2k+1} \gamma_{2k})^{\epsilon_k} \in A_{2p},$$

et

$$\hat{\mu}(\gamma) \sim \hat{\mu}((\bar{\gamma}_{2p+1} \gamma_{2p})^{\epsilon_p} \alpha) \neq 0.$$

Donc, si $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ et $(\bar{\gamma}_n \rho_n)^\wedge(\gamma) \neq 0$, $\bar{\gamma}_n \gamma$ est dans la classe d'un mot de ρ_n de longueur $\leq n/2$; le nombre de ces classes est au plus $3^{n/2}$, et pour chaque γ , sauf si $\bar{\gamma}_n \gamma \in L^\perp$, $|\bar{\gamma}_n \rho_n)^\wedge(\gamma)| \leq 2^{1-n}$.

On définit donc une mesure $\sigma_n \in L^1(L)$, de norme ≤ 2 , par

$$\sigma_n = \sum (\bar{\gamma}_n \rho_n)^\wedge(\gamma) \bar{\gamma} \cdot m_L,$$

la somme étant prise pour l'ensemble des $\gamma \in \hat{L} = \Gamma/L^\perp$ tels que $\hat{\mu}$ s'annule sur la classe modulo L^\perp définie par γ .

Soit enfin

$$\omega_n = \bar{\gamma}_n \rho_n - \sigma_n.$$

$\hat{\omega}_n(\gamma)$ est nul sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$; donc ω_n est dans $\mu * M$, et il existe pour tout n une mesure λ_n telle que $\omega_n = \mu * \lambda_n$.

De plus, les mesures ω_n ayant toutes leur norme ≤ 3 , on peut, d'après le théorème de l'application ouverte de Banach, choisir les λ_n de norme uniformément bornée par une constante A .

e) Soit φ un caractère adhérent à la suite (θ_n) dans $\bar{\Gamma}$, et $h = |\varphi|^\circ \in \Delta$. On sait (3.1)

$$h\rho_n = \rho_n \quad \text{et} \quad h\sigma_n = 0 ;$$

donc $h\omega_n = \bar{\gamma}_n\rho_n$ et en particulier

$$\hat{\omega}_n(h\gamma_n) = (\bar{\gamma}_n\rho_n)^\wedge(\gamma_n) = 1.$$

D'autre part h est un idempotent $\geq |\varphi|$, et $\varphi_\mu = |f^2|$ d'après b) ; donc $h_\mu f = f$, et

$$\lim \hat{\mu}(h\gamma_n) = \int h_\mu f d\mu = \int f d\mu = 0.$$

Or, pour tout n et pour tout caractère $\psi \in \Delta$,

$$|\hat{\omega}_n(\psi)| = |\hat{\mu}(\psi) \lambda_n(\psi)| \leq A |\hat{\mu}(\psi)|,$$

donc

$$\lim \hat{\omega}_n(h\gamma_n) = 0.$$

On obtient donc un contradiction.

3.3. COROLLAIRE. — Soient H un sous-groupe compact de G , et χ un caractère appartenant à \bar{H}^1 , l'adhérence dans Δ de l'orthogonal H^\perp de H .

— Si, pour tout $\gamma \in H^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \neq 0$, alors $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.

— Si, pour tout $\gamma \in H^\perp$, $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) = 0$, alors $\hat{\mu}(\chi) = 0$.

Soit m_H la mesure de Haar de H . $\chi m_H = m_H$ et si $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in H^\perp$, $m_H * |\chi|^2 \mu = |\chi|^2 (m_H * \mu) = 0$. Alors

$$\chi(m_H * \mu) = 0, \quad \text{et} \quad (m_H * \mu)^\wedge(\chi) = m_H(\chi) \hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}(\chi) = 0.$$

D'autre part, l'algèbre $M(G/H)$, quotient de M , s'identifie à la sous-algèbre $m_H * M$ de M , l'image d'une mesure ν de M étant identifiée à $m_H * \nu$. $m_H * \mu * M$ est fermé, car la convolution par m_H est un projecteur de $\mu * M$; si μ' est l'image de μ dans $M(G/H)$, $\mu' * M(G/H)$ est donc fermé.

La projection de M sur $M(G/H)$ induit une inclusion du spectre de $M(G/H)$ dans Δ , H^\perp étant l'image du groupe $(G/H)^\wedge$ des caractères forts de $\underline{M(G/H)}$; $\chi \in H^\perp$ est l'image par cette inclusion d'un caractère $\chi' \in (G/H)^\wedge$.

Alors, si $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \neq 0$ pour tout $\gamma \in H^1$, μ' et χ' satisfont les hypothèses du lemme 1 sur G/H , et $\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}'(\chi') \neq 0$.

LEMME 2. — Soient $\chi \in \bar{\Gamma}$ et η une mesure idempotente de M tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2 \gamma)$. Alors $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$.

D'après l'étude de $\bar{\Gamma}(\eta)$ en 2.5, la projection de χ dans $\bar{\Gamma}(\eta)$ est de module idempotent, et la projection de χ dans $\bar{\Gamma}(|\chi|^2 \eta)$ est de module 1, donc appartient au groupe discret $\Gamma(|\chi|^2 \eta)$; l'orthogonal H^\perp du groupe-support H de $|\chi|^2 \eta$ est le noyau de la projection $\Gamma \rightarrow \Gamma(|\chi|^2 \eta)$, et il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que

$$\chi \in \gamma_0 H^\perp \quad \text{et} \quad \hat{\eta}(\chi) = (|\chi|^2 \eta)^\wedge(\gamma_0) \sim \hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_0).$$

$\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_0 \gamma)$ est toujours nul ou toujours non nul pour $\gamma \in H^1$, et on peut appliquer le corollaire précédent à $\mu_0 = \gamma_0 \mu$ et $\chi_0 = \overline{\gamma_0} \chi \in \bar{H}^1$:

$$\hat{\mu}(\chi) = \hat{\mu}_0(\chi_0) \sim \hat{\mu}_0(|\chi_0|^2) = \hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma_0) \sim \hat{\eta}(\chi).$$

4. Démonstration du théorème 1.

4.1. Cas particulier $G = \mathbf{T}$.

Soit μ_d la partie discrète de μ , 0 est encore isolé dans $(0) \cup \hat{\mu}_d(\Gamma)$, qui est contenu dans $(0) \cup \hat{\mu}(\bar{\Gamma})$ d'après 2.4.

$\{\gamma \in \Gamma ; \gamma \hat{\mu}_d^{-1}(0) = \hat{\mu}_d^{-1}(0)\}$ est donc la trace sur $\Gamma = \mathbf{Z}$ d'un sous-groupe ouvert du compactifié de Bohr de \mathbf{Z} , et son orthogonal H est un sous-groupe fini de \mathbf{T} . $\hat{\mu}_d^{-1}(0)$ est une réunion finie de classes γH^\perp .

Si $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$ pour une mesure idempotente η , le théorème est démontré (1.1); sinon, $\hat{\mu}^{-1}(0)$ ne coïncide pas avec $\hat{\mu}_d^{-1}(0)$ à un ensemble fini près, et il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \gamma_0 H^\perp ; \hat{\mu}(\gamma) \not\sim \hat{\mu}_d(\gamma_0)\} \quad \text{soit infini.}$$

On peut supposer $\gamma_0 = 1$, quitte à remplacer μ par $\gamma_0 \mu$.

E est de densité nulle, car il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}_d(\gamma)| \geq \epsilon \quad \text{pour } \gamma \in E ;$$

on peut donc construire une suite (γ_n) dans E telle que, pour tout n et pour tout $p > n$, E^c contienne un intervalle de centre $\overline{\gamma_n} \gamma_p$ dont la longueur tend vers l'infini avec n ; on peut supposer de plus

que γ_n converge faiblement dans $L^\infty(\mu)$ vers $f \in L^\infty(\mu)$, et que pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\bar{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f|^2$.

Alors, pour tout caractère χ adhérent à la suite (γ_n) , $\chi \in \bar{H}^1$ et

$$\hat{\mu}(\chi) = \lim \hat{\mu}(\gamma_n) \neq \hat{\mu}_d(1),$$

$$\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) = \lim \hat{\mu}(\bar{\gamma}_n \gamma_{p_n} \gamma) \sim \hat{\mu}_d(1) \quad \text{pour tout } \gamma \in H^1.$$

On obtient donc une contradiction en appliquant le corollaire du lemme 1.

4.2. DEFINITION. — On appelle Λ l'ensemble des caractères $\varphi \in \bar{\Gamma}_+$ pour lesquels il existe une mesure idempotente η telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi\gamma)$$

On note alors η_φ la mesure idempotente $\varphi\eta$, caractérisée par

$$\hat{\eta}_\varphi^{-1}(0) = (\varphi\mu)^{-1}(0).$$

De plus $\varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$, et $\hat{\mu}(\varphi\chi) \sim \hat{\eta}_\varphi(\chi)$ pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$. En particulier, si $\varphi, \psi \in \Lambda$, $\hat{\eta}_\varphi(\psi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\psi\gamma) \sim \hat{\eta}_\psi(\varphi\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc

$$\psi\eta_\varphi = \varphi\eta_\psi.$$

LEMME 3. — Soit h un idempotent critique dans $\bar{\Gamma}$; on suppose que tout caractère $\varphi \in \bar{\Gamma}_+$ strictement inférieur à h appartient à Λ . Alors $h \in \Lambda$.

Soit $\Lambda_h = \{\varphi \in \bar{\Gamma}_+; \varphi < h\}$. On suppose $\Lambda_h \subset \Lambda$.

a) Pour une mesure idempotente η , l'ensemble des $\varphi \in \Lambda_h$ tels que $\eta_\varphi = \eta$ est ouvert dans Λ_h .

En effet, si cette propriété était fautive, il existerait $\varphi \in \Lambda_h$, avec $\eta_\varphi = \eta$, (φ_α) dans Λ_h et (γ_α) dans Γ tels que

$$\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\varphi_\alpha \gamma_\alpha) \neq \hat{\eta}(\gamma_\alpha).$$

Pour α assez grand, $\varphi_\alpha \eta = \varphi \eta = \eta$ (proposition 5), donc $\hat{\eta}(\gamma_\alpha) = \hat{\eta}(\varphi_\alpha \gamma_\alpha)$; on peut supposer $\varphi_\alpha \gamma_\alpha \longrightarrow \chi \in \bar{\Gamma}$, de sorte que

$$\hat{\mu}(\chi) \neq \hat{\eta}(\chi).$$

D'après la proposition 2, on a $|\chi| \leq \lim |\varphi_\alpha \gamma_\alpha| = \varphi$, donc $|\chi|^2 \leq \varphi$. $|\chi|^2$ est dans Λ_h , et la projection de φ dans $\bar{\Gamma}(\eta_{|\chi|^2})$ est égale à 1, car elle est supérieure ou égale à celle de $|\chi|^2$ (et $|\chi|^2 \eta_{|\chi|^2} = \eta_{|\chi|^2}$), donc

$$\eta_{|\chi|^2} = \varphi \eta_{|\chi|^2} = |\chi|^2 \eta ;$$

$$\hat{\mu}(|\chi|^2 \gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2 \gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Alors $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$ d'après le lemme 2, ce qui est contradictoire.

b) Λ_h est compact, puisque h est critique, et il n'existe donc qu'un nombre fini de mesures η_φ distinctes.

Pour $\varphi, \psi \in \Lambda$, on a vu $\psi \eta_\varphi = \varphi \eta_\psi$, c'est-à-dire que η_φ et η_ψ ont la même partie dans $\varphi^M \cap \psi^M$. On va construire une mesure idempotente η telle que, pour tout $\varphi \in \Lambda_h$, $\eta_\varphi = \varphi \eta$.

Soit, pour $\psi \in \Lambda_h$, ϵ_ψ la partie élémentaire

$$\epsilon_\psi = \prod_{\theta \eta_\psi \neq \eta_\psi} (\psi - \theta) \eta_\psi .$$

Avec les notations de 2.5, c'est la partie élémentaire de η_ψ associée à l'élément 1 de $\bar{\Gamma}_+(\eta_\psi)$. Mais si $\varphi \in \Lambda_h$ et $\psi \eta_\varphi = \eta_\psi$, ϵ_ψ est aussi la partie élémentaire de η_φ associée à ψ , avec alors $\varphi \epsilon_\psi = \epsilon_\psi$;

Par contre, si $\eta_\psi \neq \psi \eta_\varphi = \varphi \eta_\psi$, la projection de φ dans $\bar{\Gamma}_+(\eta_\psi)$ est strictement inférieure à 1, et $\varphi \epsilon_\psi = 0$.

Pour $\varphi \in \Lambda_h$, toutes les parties élémentaires de η_φ sont de la forme ϵ_ψ pour un $\psi \in \Lambda_h$; on a en tout un nombre fini de mesures ϵ_ψ distinctes ; soient $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ ces mesures et $\eta' = \sum_{1 \leq j \leq n} \epsilon_j$; pour tout $\varphi \in \Lambda_h$,

$$\eta_\varphi = \sum_{\varphi \epsilon_j = \epsilon_j} \epsilon_j = \sum_{1 \leq j \leq n} \varphi \epsilon_j = \varphi \eta' .$$

η' est une mesure dont la transformée de Fourier-Stieltjes a ses valeurs entières ; on peut la remplacer par la mesure idempotente η telle que $\hat{\eta}^{-1}(0) = \hat{\eta}'^{-1}(0)$, donc $\hat{\eta}(\chi) \sim \hat{\eta}'(\chi)$ pour tout $\chi \in \bar{\Gamma}$, et

$$\hat{\mu}(\varphi \gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma) \sim \hat{\eta}'(\varphi \gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi \gamma)$$

pour tout $\varphi \in \Lambda_h$ et tout $\gamma \in \Gamma$.

c) Soit $\Phi = \{\chi \in h\bar{\Gamma} ; \hat{\mu}(\chi) \not\sim \hat{\eta}(\chi)\}$;

C'est un ensemble compact ouvert dans $h\bar{\Gamma}$.

Si $\chi \in h\bar{\Gamma}$ et $|\chi| < h$, $|\chi|^2$ appartient à Λ_h ; donc

$$\hat{\mu}(|\chi|^2\gamma) \sim \hat{\eta}(|\chi|^2\gamma)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, et d'après le lemme 2 $\hat{\mu}(\chi) \sim \hat{\eta}(\chi)$.

Donc Φ est inclus dans $\Gamma_h = \{\chi \in \Gamma ; |\chi| = h\}$.

D'après le théorème 2, si G_h est le groupe dual de Γ_h , $M(G_h)$ se plonge dans M de façon que la transformée de Fourier-Stieltjes (sur Γ_h) d'une mesure $\nu \in M(G_h)$ coïncide avec la restriction de $\hat{\nu}$ à $\Gamma_h \subset \Delta$.

Soit alors ϵ_h la mesure élémentaire dans $L^1(G_h)$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma_h$

$$\hat{\epsilon}_h(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \notin \Phi , \\ 1 & \text{si } \gamma \in \Phi \text{ et } \hat{\eta}(\gamma) = 0 , \\ -1 & \text{si } \gamma \in \Phi \text{ et } \hat{\eta}(\gamma) = 1 . \end{cases}$$

$\eta_h = \eta + \epsilon_h$ est une mesure idempotente telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\mu}(h\gamma) \sim \hat{\eta}_h(h\gamma) .$$

Donc h appartient à Λ .

4.3. a) Λ est fortement ouvert et fermé dans $\bar{\Gamma}_+$.

Soit (φ_α) une suite généralisée dans $\bar{\Gamma}_+$ convergeant fortement vers $\varphi \in \bar{\Gamma}_+$; pour un réel $\epsilon > 0$, on a pour α assez grand $\|\varphi_\alpha\mu - \varphi\mu\| < \epsilon$, donc pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) - \hat{\mu}(\varphi\gamma)| < \epsilon$. Ceci implique que pour α assez grand

$$\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma .$$

– Si $\varphi \in \Lambda$, on a aussi $\varphi_\alpha\eta_\varphi = \varphi\eta_\varphi = \eta_\varphi$ pour α assez grand, et $\hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\eta}_\varphi(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc $\varphi_\alpha \in \Lambda$.

– Si $\varphi_\alpha \in \Lambda$, $\hat{\eta}_{\varphi_\alpha}^{-1}(0) = (\varphi_\alpha\mu)^{-1}(0)$ est stationnaire, η_{φ_α} est une mesure idempotente fixe η pour α assez grand, avec $\varphi_\alpha\eta = \eta$ donc $\varphi\eta = \eta$, et, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\hat{\mu}(\varphi\gamma) \sim \hat{\mu}(\varphi_\alpha\gamma) \sim \hat{\eta}(\gamma)$; donc $\varphi \in \Lambda$.

b) Si Λ n'est pas $\bar{\Gamma}_+$ tout entier, il existe un élément minimal φ dans l'ensemble fortement fermé $\bar{\Gamma}_+ \setminus \Lambda$. Si φ est un idempotent, il

est critique dans $\bar{\Gamma}$ puisque Λ est aussi fortement fermé : d'après le lemme 3, $\varphi \in \Lambda$, ce qui est absurde.

Si φ n'est pas un idempotent, $\varphi^2 < \varphi$, donc $\varphi^2 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$

$$\hat{\mu}(\varphi^2 \gamma) \sim \hat{\eta}(\varphi^2 \gamma).$$

On peut appliquer le lemme 2, pour $\alpha \in \Gamma$, à $\chi = \varphi \alpha$, $|\chi|^2 = \varphi^2$; on trouve encore $\hat{\mu}(\varphi \alpha) \sim \hat{\eta}(\varphi \alpha)$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, et donc $\varphi \in \Lambda$.

Λ est donc $\bar{\Gamma}_+$ tout entier, en particulier $1 \in \Lambda$, et il existe une mesure idempotente η telle que

$$\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0),$$

ce qui, d'après 1.1, achève la démonstration du théorème 1.

5. Généralisation à une suite finie de mesures.

5.1. On obtient pour les idéaux $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1)$ ou $\sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M)$ fermés une caractérisation analogue à celle des idéaux fermés définis par une mesure.

PROPOSITION 6. — Soient $\mu_1, \dots, \mu_m \in M$, $\mu = \sum_{1 \leq i \leq m} \mu_i * \tilde{\mu}_i$,

$$I = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1) \quad \text{et} \quad J = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M).$$

I est fermé si et seulement si J est fermé ; alors

a) il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) \geq \epsilon$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$;

b) I est l'idéal des fonctions de L^1 dont la transformée de Fourier s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$;

c) J est l'idéal des mesures de M dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

Ces propriétés ne sont pas intégralement énoncées par I. Glicksberg [4], mais la démonstration ne présente aucune difficulté supplémentaire par rapport au cas d'une seule mesure.

$\hat{\mu}^{-1}(0) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} \hat{\mu}_i^{-1}(0)$ est l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\hat{f}(\gamma) = 0$ pour tout $f \in I$. I. Glicksberg [4, § 4, p. 424] remarque que si I est fermé, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\sum |\hat{\mu}_i(\gamma)| \geq \epsilon$ en dehors de cet ensemble.

En particulier, $\hat{\mu}^{-1}(0)$ est ouvert si I est fermé, et I contient alors toutes les fonctions de L^1 dont la transformée de Fourier s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$.

Dans ce cas, si $\nu \in M$ et $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, $\nu * L^1$ est inclus dans I , et, d'après le théorème 1.6 de [4], $\nu \in \Sigma(\mu_i * M)$; J contient toutes les mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes s'annule sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, et il est alors fermé.

Inversement, si J est fermé, il existe (d'après le théorème de Banach) une constante A telle que, pour $\nu \in J$, il existe des mesures ν_1, \dots, ν_m vérifiant

$$\nu = \sum \mu_i * \nu_i \quad \text{et} \quad \text{Sup} \|\nu_i\| \leq A \|\nu\|.$$

Ceci est vrai en particulier si ν est une fonction $f = \sum f_i * \mu_i$ de I .

Soit alors (k_α) une approximation de l'unité de norme 1 dans L^1 . f_1, \dots, f_m appartenant à L^1 ,

$$f = \sum \mu_i * f_i = \sum \mu_i * \nu_i,$$

$$f * k_\alpha = \sum \mu_i * f_i * k_\alpha = \sum \mu_i * \nu_i * k_\alpha;$$

pour α assez grand, on a, pour $1 \leq i \leq m$, $\|f_i - f_i * k_\alpha\| \leq \|f\|$, et

$$g_i = (f_i - f_i * k_\alpha) + \nu_i * k_\alpha \in L^1,$$

$$\|g_i\| \leq (A + 1) \|f\|,$$

$$f = \sum \mu_i * g_i.$$

L'application $(f_1, \dots, f_m) \rightarrow \sum \mu_i * f_i$ est donc ouverte sur son image, ce qui montre que I est fermé.

5.2. THEOREME 3. — Soient $\mu_1, \dots, \mu_m \in M$; si $I = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * L^1)$

est fermé, ou si $J = \sum_{1 \leq i \leq m} (\mu_i * M)$ est fermé, il existe une mesure

idempotente η de M telle que $I = \eta * L^1$ et $J = \eta * M$.

On considère toujours $\mu = \sum \mu_i * \tilde{\mu}_i$. Il est clair, d'après la proposition 6 (b et c), qu'il suffit de trouver une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu}^{-1}(0) = \hat{\eta}^{-1}(0)$.

Il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \epsilon$ si $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$, et toute la démonstration ne dépend que de cette propriété et du lemme 1 : *il suffit de vérifier que le lemme 1 reste vrai pour cette mesure μ .*

On considère la suite (γ_n) , le caractère idempotent h de Δ , et les mesures ω_n construits dans la démonstration du lemme 1.

Soit $\nu = \sum |\mu_i|$; on peut supposer que γ_n converge faiblement dans $\bar{\Gamma}(\nu)$ vers $f \in \bar{\Gamma}(\nu)$, et que, pour toute suite (p_n) telle que $n < p_n$, $\bar{\gamma}_n \gamma_{p_n}$ converge vers $|f|^2$ (de même qu'en b de la démonstration du lemme 1).

Alors $h_\nu \geq |f|^2$ et $h_\nu \gamma_n \rightarrow h_\nu f = f$ dans $\Delta(\nu)$; donc, pour $1 \leq i \leq m$,

$$\lim \hat{\mu}_i(h\gamma_n) = \int f d\mu_i = \lim \hat{\mu}_i(\gamma_n) = 0.$$

$\hat{\omega}_n$ est nul sur $\hat{\mu}^{-1}(0)$, donc $\omega_n \in J$, et les mesures ω_n ayant toutes leur norme ≤ 3 , il doit exister des mesures $\lambda_{i,n}$ ($1 \leq i \leq m$, $n \geq 1$) de norme uniformément bornée par une constante A , telles que pour tout n

$$\omega_n = \sum_{1 \leq i \leq m} \mu_i * \lambda_{i,n}.$$

Alors

$$|\hat{\omega}_n(h\gamma_n)| \leq A \sum_{1 \leq i \leq m} |\hat{\mu}_i(h\gamma_n)| \rightarrow 0.$$

On retrouve la contradiction obtenue à la fin de la démonstration du lemme 1, car les mesures ω_n sont construites pour vérifier $\hat{\omega}_n(h\gamma_n) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BROWN, Riesz products and generalized characters, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 30 (1975), 209.
- [2] C.F. DUNKL et D.E. RAMIREZ, Bounded projections on Fourier-Stieltjes transforms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 31, n° 1 (1972), 122.

- [3] C.F. DUNKL et D.E. RAMIREZ, Locally compact subgroups of the spectrum of the measure algebra,
I, *Semigroup Forum*, 3 (1971), 95,
II, *Semigroup Forum*, 3 (1971), 267.
III, *Semigroup Forum*, 5 (1972), 65.
- [4] I. GLICKSBERG, When is $\mu * L^1$ closed ? *Trans. Amer. Math. Soc.*,
160 (1971), 419.
- [5] I. GLICKSBERG, Fourier-Stieltjes transforms with an isolated value,
Conference on harmonic analysis, Maryland (1971), *Lecture
Notes in Math.*, n° 266, Springer-Verlag.
- [6] W. RUDIN, Fourier analysis on groups, *Interscience tracts in Math.*,
n° 12, Interscience, New-York (1962).
- [7] J.L. TAYLOR, Measure algebras, *Regional conference series in
Math.*, n° 16, Conference Board of the Mathematical Sciences
(1973).

Manuscrit reçu le 28 juillet 1977
Proposé par J.P. Kahane.

B. HOST et F. PARREAU,
Département de Mathématiques
C.S.P., Université Paris-Nord
Avenue J.B. Clément
93 430 Villetaneuse.