

JÉRÔME BRUN

**Le problème de Levi dans les fibrés à base de Stein
et à fibre une courbe compacte**

Annales de l'institut Fourier, tome 27, n° 3 (1977), p. 17-28

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_17_0

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DE LEVI DANS LES FIBRES A BASE DE STEIN ET A FIBRE UNE COURBE COMPACTE

par Jérôme BRUN

0. Introduction.

Soient A et S deux espaces analytiques complexes, S étant de Stein, et $\rho : A \rightarrow S$ un morphisme de Stein, i.e. tel que, pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de s dans S tel que $\rho^{-1}(U)$ soit de Stein, Selon une conjecture classique, A serait alors de Stein ⁽¹⁾.

Intéressons-nous à cette conjecture dans le cas où S est une variété (de Stein), A un ouvert d'un fibré holomorphe localement trivial, $\pi : X \rightarrow S$, à fibre une variété compacte, et $\rho = \pi|_A$. L'hypothèse que ρ est de Stein se traduit alors par :

1) A est localement de Stein, i.e. tout point x de la frontière ∂A admet un voisinage U_x dans X tel que $U_x \cap A$ soit de Stein. On dit qu'une variété est pseudo convexe (cf. Hörmander [6]) s'il existe dans cette variété une fonction plurisousharmonique positive propre ; un ouvert A d'une variété est localement pseudoconvexe si tout point x de ∂A admet un voisinage U_x tel que $U_x \cap A$ soit pseudoconvexe. On sait alors qu'un ouvert est localement pseudoconvexe si et seulement s'il est localement de Stein (cf. par exemple Hörmander théorème 5.2.10).

2) $A \cap \pi^{-1}(s)$ est de Stein pour tout $s \in S$.

Déterminer si A est de Stein est alors un problème de Levi, résolu dans [2] quand la fibre est homogène, et résolu par le théorème suivant quand la fibre est une courbe :

THEOREME. — *Soit (X, π, S) un fibré holomorphe localement trivial à base une variété de Stein S et à fibre une courbe compacte Γ .*

(1) Depuis la rédaction de cet article, cette conjecture a été mise en défaut par H. Skoda (Comptes Rendus, 284, Série A, 1977, p. 1199) et, indépendamment par J.E. Forneaess.

Si A est un ouvert de X localement pseudoconvexe ne contenant aucune fibre, alors A est de Stein.

Le cas où X est le produit d'une variété de Stein par un tore complexe de dimension un, a été traité, antérieurement à [2], par Matsugu [8].

Dans la démonstration du théorème, on traite au paragraphe 2 le cas du fibré trivial $X = S \times \Gamma$. Pour construire des fonctions plurisousharmoniques (*psh*) sur A tendant vers l'infini aux parties de la frontière de A non transverses aux fibres, on introduit une distance "horizontale" au bord de A (Lemme 2.1), qui n'est pas nécessairement continue. D'où le paragraphe 1 où l'on étend aux fonctions *psh* des résultats classiques dans le cas des fonctions *psh* continues. D'autre part, pour construire des fonctions *psh* tendant vers l'infini aux autres points de la frontière de A , on utilise une inégalité due à Elençwajg [3] sur des métriques kälhériennes.

Le passage au cas du fibré est traité au paragraphe 3 : quand le genre de la fibre est ≥ 2 , on utilise le fait que le groupe d'automorphismes de la fibre est fini pour se ramener au cas du fibré trivial ; les cas où le genre est 0 ou 1 sont traités dans [2].

1.

Si φ est une fonction plurisousharmonique (*psh*) sur un ouvert localement pseudoconvexe A , $A_c = \{x \in A \mid \varphi(x) < c\}$ est localement pseudoconvexe pour tout $c \in \mathbb{R}$; si A est de Stein, A_c est de Runge dans A . Ces résultats sont bien connus pour des fonctions φ continues (cf. Narasimham [9]) et s'étendent sans difficulté aux fonctions semi-continues supérieurement, par régularisation. Cependant, en l'absence de références, donnons une démonstration du

LEMME 1. — *Soit φ une fonction *psh* sur une variété de Stein X . Alors $Y = \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ est de Runge dans X .*

1.1. *Démonstration.* — Rappelons que Y est de Runge dans X si Y est de Stein et si, pour tout compact K de Y , pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de K et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction g holomorphe sur X telle que $\|f - g\|_K < \epsilon$.

Si l'on note, pour un compact K de X :

$$\hat{K}(X) = \{x \in X \mid \forall f \in O(X) : |f(x)| \leq \|f\|_K\}$$

on a la caractérisation suivante (cf. Stein [11]), si X est de Stein : Y est de Runge dans X si et seulement si, pour tout compact K de Y , $\hat{K}(X) \subset Y$.

On en déduit le critère suivant, toujours si X est de Stein :

1.2. Y est de Runge dans X si et seulement si, pour tout compact K de Y , il existe Z de Runge dans X tel que : $K \subset Z \subset Y$.

1.3. Supposons pour l'instant X ouvert de Stein de \mathbf{C}^n et notons, si A est une partie de \mathbf{C}^n et ϵ un réel positif : $B(x, \epsilon)$ la boule fermée de centre x et de rayon ϵ et $A_\epsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon)$. Enfin, $A \subset\subset B$ signifie : A est relativement compact dans B .

Soit alors K un compact de Y . Il existe un voisinage ouvert U de K relativement compact dans Y . X est de Stein, donc $X = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} X_p$ avec, pour tout p : $X_p \subset X_{p+1} \subset\subset X$, X_p de Runge dans X (cf. par exemple Narasimhan [9]). Il existe donc un entier q tel que : $K \subset U \subset\subset X_q \subset\subset X$, et il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que : $K_\epsilon \subset U$, $U_\epsilon \subset X_q$ et $(X_q)_\epsilon \subset X$.

Soit ϕ_ϵ la régularisée de φ sur X_q à l'aide d'une fonction ρ_ϵ , C^∞ , positive, à support dans $B(0, \epsilon)$, d'intégrale 1 et ne dépendant que de $|z_1| \dots |z_n|$: $\varphi_\epsilon(x) = \int_{B(0, \epsilon)} \varphi(x - y) \rho_\epsilon(y) dy$: Alors (cf. Hörmander [6], th. 2.6.3.), φ_ϵ est continue, *psh* et supérieure ou égale à φ .

Soit $Z = \{x \in X_q \mid \varphi_\epsilon(x) < 0\}$

- a) Z est de Runge dans X_q (Narasimhan [9]) donc dans X .
- b) $K \subset Z$ car, si $x \in K$: $B(x, \epsilon) \subset U$ et donc $\varphi_\epsilon(x) < 0$.
- c) $Z \subset Y$ car $\varphi_\epsilon \geq \varphi$.

Ce qui établit le résultat d'après 1.2., si X est dans \mathbf{C}^n .

1.4. Dans le cas général, X étant de Stein, il existe un plongement analytique $p : X \rightarrow \mathbf{C}^N$ qui identifie X à une sous-variété fermée de \mathbf{C}^N , notée encore X . Soit Ω un voisinage tubulaire analytique de de Stein de X dans \mathbf{C}^N (cf. Gunning-Rossi [4]) et $\rho : \Omega \rightarrow X$ la ré-

traction associée. La fonction $\varphi \circ \rho$ est *psh* et

$$\rho^{-1}(Y) = \{z \in \Omega \mid \varphi \circ \rho(z) < 0\}$$

est de Runge dans Ω d'après 1.3. Donc $Y = \rho^{-1}(Y) \cap \Omega$ est de Stein. Soit alors f une fonction holomorphe dans un voisinage dans X d'un compact K de Y , $f \circ \rho$ est holomorphe dans un voisinage de K dans $\rho^{-1}(Y)$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe \tilde{g} holomorphe dans Ω telle que $\|f \circ \rho - \tilde{g}\|_K < \epsilon$. Alors $g = \tilde{g}|_X$ est holomorphe dans X et telle que $\|f - g\|_K < \epsilon$. C.Q.F.D. □

La proposition suivante sera utile.

PROPOSITION 1. — *Soit φ une fonction psh sur une variété analytique X . Si, pour tout $c \in \mathbf{R}$, $X_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$ est de Stein, alors X est de Stein.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, X_c est de Runge dans X_{c+1} . X apparaît donc comme une réunion croissante d'ouverts de Stein, de Runge les uns dans les autres : X est de Stein (Stein [11]). □

2.

L'objet de ce paragraphe est de prouver la :

PROPOSITION 2. — *Soient S un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n , Γ une courbe complexe compacte, $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \rightarrow S$ la projection. Si A est un ouvert localement pseudoconvexe de X ne contenant aucun $\pi^{-1}(s)$, alors A est de Stein.*

On utilisera le fait que la base est de Stein à l'aide du lemme suivant :

LEMME 2.1. — *Soient S un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n , Y une variété analytique complexe, $X = S \times Y$, $\pi : X \rightarrow S$ la projection. Si A est un ouvert localement pseudoconvexe de X , alors il existe sur A une fonction f psh telle que, si $A_k = \{x \in A \mid f(x) < k\}$, on ait, pour tout $k \in \mathbf{N}$: $\pi(A_k) \subset \subset \pi(A_{k+1})$.*

Démonstration du lemme 2.1. —

a) Rappelons d'abord le résultat classique (cf. par exemple Gunning-Rossi [4], IX, D) : si U est un ouvert pseudoconvexe de \mathbf{C}^p . la fonction α , définie dans $U \times \{\mathbf{C}^p \setminus 0\}$ par

$$\alpha(x, x') = \sup \{r \in \mathbf{R} \mid x + rx' \in U\},$$

est telle que $-\log \alpha$ est *psh*.

b) Dans le cas présent, on en déduit que la fonction :

$$d : A \times \{\mathbf{C}^n \setminus 0\} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$((s, y), s') \mapsto \sup \{r \in \mathbf{R} \mid (s + rs', y) \in A\}$$

est telle que $-\log d$ est *psh*. Soit alors la fonction distance "horizontale" au bord $\delta : A \rightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\delta(x) = \inf_{\|s'\|=1} d(x, s')$.

c) $-\log \delta$ est *psh*. En effet, montrons d'abord que δ est sci. Soit $x_0 = (s_0, y_0)$ tel que $\delta(x_0) > \alpha$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\delta(x_0) > \alpha + 2\epsilon.$$

Alors $B(s_0, \alpha + 2\epsilon) \times \{y_0\}$ est un compact de A et il existe un voisinage V_{y_0} de y_0 tel que

$$B(s_0, \alpha + 2\epsilon) \times V_{y_0} \subset A. V_{x_0} = B(s_0, \epsilon) \times V_{y_0}$$

est un voisinage de x_0 sur lequel δ est supérieure ou égale à $\alpha + \epsilon$. Donc δ est *sci* ; $-\log \delta$ est *scs* et enveloppe supérieure de fonctions *psh*, donc *psh*.

d) D'autre part, il existe sur S une fonction q positive, continue, *psh* et propre. La fonction f définie sur A par

$$x \mapsto f(x) = \sup \{0, -\log \delta(x)\} + q_0 \pi(x)$$

est *psh* et, si $A_k = \{x \in A \mid f(x) < k\}$, il reste à prouver :

e) $\pi(A_k) \subset \subset \pi(A_{k+1})$. On peut caractériser ainsi A_k :

$$x = (s, y) \in A_k$$

si et seulement si $q(s) < k$ et $B(s, e^{q(s)-k}) \times \{y\} \subset A$. $\pi(A_k)$ est donc relativement compact dans S ; q étant continue, il existe $\alpha_k > 0$

tel que, pour tout $s \in \pi(A_k)$ et tout $s' \in B(s, \alpha_k)$, on ait

$$q(s') < q(s) + \frac{1}{2}.$$

Soit $\beta_k = \min(\alpha_k, e^{-k} - e^{-k-1/2})$: il suffit de montrer que pour tout $s \in \pi(A_k)$, $B(s, \beta_k) \subset \pi(A_{k+1})$. Or, si $s' \in B(s, \beta_k)$:

$$1) \quad q(s') < q(s) + \frac{1}{2} < k + 1$$

$$2) \quad s' \in B(s, e^{-k} - e^{-k-1/2}) \subset B(s, e^{q(s)-k} - e^{q(s)-k-1/2}) \text{ d'où}$$

$$B(s', e^{q(s')-k-1}) \subset B(s', e^{q(s)-k-1/2}) \subset B(s, e^{q(s)-k})$$

Comme $s \in \pi(A_k)$, il existe $y \in Y$ tel que $B(s, e^{q(s)-k}) \times \{y\} \subset A$, donc $B(s', e^{q(s')-k-1}) \times \{y\} \subset A$. Or $q(s') < k + 1$, donc

$$(s', y) \in A_{k+1} \quad \text{d'où} \quad s' \in \pi(A_{k+1}) \text{ C.Q.F.D.}$$

□

On va utiliser à présent le fait que la deuxième composante du produit est de dimension un à l'aide du :

LEMME 2.2. — Soient S un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n , Γ une courbe compacte, $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \rightarrow S$ la projection. Si A est un ouvert de X et V un ouvert de S relativement compact dans $\pi(A)$, alors il existe un compact K de A et une fonction \mathcal{C}^∞ et strictement plurisousharmonique sur $\pi^{-1}(V) \setminus K$.

Démonstration. — Pour tout $s \in \pi(A)$, il existe U_s voisinage ouvert de s dans $\pi(A)$, $\alpha_s \in \Gamma$ et K_s voisinage compact de α_s dans Γ tels que : $U_s \times K_s \subset A$. On peut de plus choisir U_s de Stein.

Comme $V \subset \subset \pi(A)$, il existe un recouvrement fini U de \bar{V} par des ouverts $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ de Stein avec, pour tout i , un élément α_i de Γ et un voisinage compact K_i de α_i tels que : $U_i \times K_i \subset A$. Il existe également un recouvrement U' de \bar{V} formés par des ouverts $(U'_i)_{1 \leq i \leq p}$ tels que $U'_i \subset \subset U_i$.

Pour tout i , $U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\}$ est de Stein, et donc il existe une fonction φ_i , \mathcal{C}^∞ et strictement plurisousharmonique (*sps*) sur

$$U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\}.$$

Si $V_i = U'_i \times \{\Gamma \setminus K_i\}$, on a : $V_i \subset\subset U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\}$ et $\varphi_i|_{V_i}$ est bornée ainsi que toutes ses dérivées. D'autre part, il existe $(h_i)_{1 \leq i \leq p}$, partition de l'unité \mathcal{C}^∞ subordonnée au recouvrement U' , et $q : S \rightarrow \mathbf{R}$ fonction \mathcal{C}^∞ et *spsh*.

Il résulte d'un calcul élémentaire sur des formes quadratiques que la fonction $\varphi : \bigcup_{i=1}^p V_i \rightarrow \mathbf{R}$, défini par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p h_i(\pi(x)) \varphi_i(x) + \lambda q(\pi(x)),$$

est *spsh* pour λ assez grand. Ceci démontre le lemme car

$$\pi^{-1}(V) \setminus \bigcup_{i=1}^p V_i$$

est la trace dans $\pi^{-1}(V)$ d'un compact de A .

On peut maintenant établir un cas particulier de la Proposition 2 :

LEMME 2.3. — Soient S un ouvert de Stein de \mathbf{C}^n , Γ une courbe compacte, $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \rightarrow S$ la projection. Si A est un ouvert localement pseudoconvexe de X tel que son adhérence \bar{A} ne contienne aucun $\pi^{-1}(s)$, alors A est de Stein.

Démonstration. — D'après le lemme 2.1., $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec

$$\pi(A_i) \subset\subset \pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(A).$$

Comme A_i est compact, on a $\pi(\bar{A}_i) = \overline{\pi(A_i)}$.

Soit alors $U = \pi^{-1}(\pi(A)) \setminus \overline{A_{i+1}}$. On a $\pi(U) = \pi(A)$ car

a) $\pi(U) \subset \pi(A)$ (clair)

b) si $s \in \pi(A) -$ ou $s \in \pi(A) \setminus \pi(\overline{A_{i+1}})$ donc $s \in \pi(U)$
 — ou $s \in \pi(\overline{A_{i+1}})$; alors il existe $x \notin \overline{A_{i+1}}$

tel que $\pi(x) = s$ car $\overline{A_{i+1}} \subset \bar{A}$ ne contient aucun $\pi^{-1}(s)$; donc $x \in U$ et $s \in \pi(U)$.

Ainsi $\pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(U)$ et, d'après le lemme 2.2., il existe un compact K de U et une fonction $\varphi : \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \setminus K \rightarrow \mathbf{R}$ qui

est *sps h* et \mathcal{C}^∞ . Or $\pi(\bar{A}_i) \subset \pi(A_{i+1})$ et $\bar{A}_i \cap K = \emptyset$: donc

$$A_i \subset \subset \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \setminus K.$$

A_i , ouvert localement pseudoconvexe et relativement compact dans un ouvert muni d'une fonction *sps h* continue, est de Stein (cf. Elençwajg [3], Th. II). A est donc de Stein d'après la Proposition 1.

□

En utilisant de façon plus précise le résultat d'Elençwajg, on a le :

LEMME 2.4. — Soient X une variété analytique complexe, A un ouvert de X localement pseudoconvexe, U un ouvert de X sur lequel existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ et *sps h*. Alors, pour tout compact J de $\partial A \cap U$, il existe un voisinage ouvert W de J dans X et une fonction $\psi : A \cap W \rightarrow \mathbf{R}$ continue, *sps h* et qui tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap W$.

Démonstration. — Soit d la métrique déduite de la structure kahlérienne donnée localement sur U par $g_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_j}$. Alors (cf. Elençwajg [3]), si V est un ouvert de Stein, relativement compact dans U , il existe une constante μ_v telle que la fonction définie sur V par $x \mapsto -\log d(x, \partial V) + \mu_v \varphi(x)$ soit *sps h*.

Ici, le seul cas intéressant est celui où $\partial A \cap U \neq \emptyset$. Soit alors $x \in \partial A \cap U$. A étant localement pseudoconvexe, il existe un ouvert V_x tel que $A \cap V_x$ soit de Stein, et on peut de plus choisir V_x tel que $A \cap V_x \subset \subset U$. Il existe donc une constante μ_{v_x} telle que la fonction définie sur $A \cap V_x$ par

$$y \mapsto -\log d(y, \partial(A \cap V_x)) + \mu_{v_x} \varphi(y)$$

soit *sps h*. D'autre part, en choisissant un voisinage de x , W_x , suffisamment petit, on a, pour tout $y \in A \cap W_x$:

$$d(y, \partial(A \cap V_x)) = d(y, \partial A)$$

Recouvrons alors J par un nombre fini de tels ouverts $W_x : (W_i)_{1 \leq i \leq k}$. Soient (μ_i) les constantes correspondantes et $\mu = \max_i \mu_i$. Alors

$W = \bigcup_{i=1}^k W_i$ est un voisinage ouvert de J et la fonction ψ définie sur W par $x \mapsto -\log d(x, \partial A) + \mu\varphi(x)$ est *psph* et tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap W$.

□

On peut enfin passer à la

Démonstration de la proposition 2.

a) D'après le lemme 2.1, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec A_i ouvert pseudoconvexe et $\pi(A_i) \subset\subset \pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(A)$. Il existe donc un ouvert V de S tel que $\pi(A_{i+1}) \subset\subset V \subset\subset \pi(A)$.

D'après le lemme 2.2., il existe un compact K de A et une fonction φ *psph* et \mathcal{C}^∞ sur $\pi^{-1}(V) \setminus K$.

D'après le lemme 2.4., $\partial A \cap \overline{\pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))}$, étant un compact de $\partial A \cap \{\pi^{-1}(V) \setminus K\}$, admet un voisinage ouvert W tel qu'il existe sur $A \cap W$ une fonction ψ continue, *psph* et qui tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap W$.

b) On va prolonger ψ dans $A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$ de la façon suivante :

Soit $B_j = \{x \in A \cap W \mid \psi(x) > j\}$. Comme ψ tend vers l'infini en $\partial A \cap W$ et est bornée en dehors de la trace dans $A \cap W$ de tout voisinage de ∂A , il existe j_0 tel que $B_{j_0} \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \subset\subset W$.

Alors, la fonction définie sur $A \cap W$ par $x \mapsto \sup \{\psi(x), j_0\}$ est *psph*, et égale à j_0 dans un voisinage de $A \cap \partial W \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$.

On peut donc la prolonger continûment par j_0 en dehors de $A \cap W \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$ pour obtenir une fonction :

$\tilde{\psi} : A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est *psph*, continue et tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$.

Soit alors $A_i^j = \{x \in A_i \mid \tilde{\psi}(x) < j\}$

A_i^j est localement pseudoconvexe et de plus :

c) $\overline{A_i^j}$ ne contient aucun $\pi^{-1}(s)$. En effet, soit

$$s \in \overline{\pi(A_i^j)} \subset \pi(A_{i+1}).$$

Il existe $x \in \pi^{-1}(s)$ tel que $x \in \partial A$, car A ne contient pas $\pi^{-1}(s)$, et donc $x \notin \bar{A}_i^j$ car $\tilde{\psi}$ tend vers l'infini en x .

d) D'après le lemme 2.3., A_i^j est de Stein et une double application de la proposition 1 montre que A est de Stein. □

COROLLAIRE. — Soient S une variété de Stein, Γ une courbe compacte, $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \longrightarrow S$ la projection. Si A est un ouvert localement pseudoconvexe de X ne contenant aucun $\pi^{-1}(s)$, alors A est de Stein.

Démonstration. — S s'identifie à une sous-variété fermée de \mathbf{C}^N , notée encore S , qui admet (cf. Gunning-Rossi [4]) un voisinage tubulaire de Stein, U . Soit $\rho : U \longrightarrow S$ la rétraction associée et $\pi : U \times \Gamma \longrightarrow S \times \Gamma$ l'application définie par $\pi(u, \gamma) = (\rho(u), \gamma)$.

$\pi^{-1}(A)$ est localement pseudoconvexe et ne contient aucun sous-ensemble de la forme $\{u\} \times \Gamma$: il est de Stein d'après la Proposition 2. Or A s'identifie à une sous-variété de $\pi^{-1}(A)$, donc est de Stein. □

3.

THEOREME. — Soit (X, π, S) un fibré localement trivial à base une variété de Stein S et à fibre une courbe compacte Γ . Si A est un ouvert localement pseudoconvexe de X ne contenant aucune fibre, alors A est de Stein.

Démonstration. — Si le genre de la courbe est 0 ou 1, le résultat est démontré dans Brun [2].

Supposons donc à présent le genre de Γ supérieur ou égal à 2. Alors le groupe G des automorphismes de Γ est fini (cf. par exemple Accola [1]) ; d'autre part, on peut se ramener au cas où S est connexe. On peut donc associer à X , de façon unique (cf. Steenrod [10], 13-7), une classe d'équivalence (sous les automorphismes intérieurs de G) d'homomorphismes de $\pi_1(S)$ dans G : la classe caractéristique de X .

Soit $\alpha : \pi_1(S) \longrightarrow G$ un représentant de la classe de X et $H = \text{Ker } \alpha$.

Il existe (cf. par exemple Hu [6], th. III 17-1) un revêtement connexe $\rho : S' \longrightarrow S$ tel que H soit l'image de l'application induite par ρ

$$\rho_* : \pi_1(S') \rightarrow \pi_1(S).$$

Soient alors $X' = X \times_S S'$ le produit fibré et (π', ρ') les projections naturelles :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\rho'} & X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{\rho} & S \end{array}$$

Par construction de S' , la classe caractéristique de X' est neutre et donc le fibré (X', π', S') est trivial. D'autre part, H étant d'indice fini, les revêtements ρ et ρ' sont finis, et donc S' est de Stein (Stein [11]). $\rho'^{-1}(A)$ est un ouvert localement pseudoconvexe de X' , ne contenant aucun $\pi'^{-1}(s')$; il est de Stein d'après le corollaire précédent. On en déduit que A est de Stein car il admet un revêtement fini de Stein.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ACCOLA, On the number of automorphisms of a closed Riemann surface, *Trans. Am. Math. Soc.*, 131 (1968), 398-408.
- [2] J. BRUN, Sur le problème de Levi dans certains fibrés, *Manuscripta Math.*, 14 (1974), 217-222.
- [3] G. ELENCAWAJG, Pseudoconvexité locale dans les variétés kälhériennes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 15, 2 (1975), 295-314.
- [4] R. GUNNING, H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall (1965).
- [5] A. HIRSCHOWITZ, Pseudoconvexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes, *Inventiones Math.*, (1974), 303-322.

- [6] L. HORMANDER, An Introduction to complex analysis in several variables, Princeton, Van Nostrand (1966).
- [7] S. HU, Homotopy theory, Academic Press (1959).
- [8] Y. MATSUGU, The Levi problem for a product manifold, *Pacific J. Math.*, 46 (1973), 231-233.
- [9] R. NARASIMHAN, The Levi problem for complex spaces II, *Math. Ann.*, 146 (1962), 195-215.
- [10] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton (1951).
- [11] K. STEIN, Überlagerung holomorph – vollständiger komplexer. Räume, *Arch. Math.*, 7 (1956), 356-361.

Manuscrit reçu le 14 avril 1976

Proposé par J. Dieudonné.

Jérôme BRUN,

Département de Mathématiques

I.M.S.P.

Parc Valrose

06034 – Nice Cédex.