ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LAMOUREUX

Quelques remarques sur les bouts de feuilles

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 2 (1977), p. 191-196
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_2_191_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 2 (1977), 191-196.

QUELQUES REMARQUES SUR LES BOUTS DE FEUILLES

par Claude LAMOUREUX

Le but de ce travail est de démontrer quelques propriétés de l'ensemble-limite, au sens de Reeb [10], des bouts de feuilles des feuilletages de codimension 1.

Les feuilletages $\mathcal{F}$ considérés sont des feuilletages topologiques, transversalement orientables, de codimension 1 d'une variété connexe X. Nous notons $\mathcal{N}$ l'un des feuilletages de [11] transverses à $\mathcal{F}$.

1. Notations.

L'ensemble-limite, au sens de [10], d'une feuille F est noté L(F). C'est un ensemble fermé saturé de $\mathcal{F}$.

L'enveloppe [5] $\overline{F} - F$ de la feuille F est notée E(F), où $\overline{F}$ désigne l'adhérence de F dans X. C'est un ensemble saturé en général non fermé de $\mathcal{F}$. On a $E(F) = L(F)$ si, et seulement si, F est une feuille propre, au sens de [1, 8, 9].

Un bout, au sens de [2, 4, 8], d'une feuille non fermée F est noté ε; il n'est pas nécessairement isolé dans l'espace des bouts de F [2, 4, 8].

L'ensemble-limite du bout ε d'une feuille est noté $L(\varepsilon)$; par définition [8, 10], on a $L(\varepsilon) = \bigcap_{\mathcal{U}\varepsilon E} \overline{\mathcal{U}}$ où $\{\mathcal{U}\{_{\mathcal{U}\varepsilon E}$ est une famille maximale d'ouverts de F définissant le bout ε. Cet ensemble fermé $L(\varepsilon)$ est saturé; mais ce n'est pas un ensemble connexe en général, même si ε est un bout isolé.

L'enveloppe du bout ε est notée $E(\varepsilon)$ et est définie par la relation $E(\varepsilon) = L(\varepsilon) \cap E(F) = L(\varepsilon) - F$.

Un bout ε de F sera dit propre si, et seulement si,

$$L(\varepsilon) = E(\varepsilon).$$

Un bout ε dont l'ensemble-limite $L(\varepsilon)$ est compact sera dit *relativement compact.*

L'orientabilité transverse de $\mathcal{F}$ permet enfin de donner un sens [8] à la condition suivante, introduite dans [8] : le *bout* ε *tend vers* $L(\varepsilon)$ *d'un seul côté.*

2. L'enveloppe de certains bouts.

Théorème 1. — *Soit* ε *un bout d'une feuille* F, *tel que* $L(\varepsilon)$ *est contenu dans la réunion des saturés d'une collection finie de transversales fermées.*

Si ε *tend vers* $L(\varepsilon)$ *d'un seul côté, alors* $L(\varepsilon)$ *contient au moins une feuille fermée.*

Le théorème 1 admet le

Corollaire 1. — *Soit* ε *un bout relativement compact, si* ε *tend vers* $L(\varepsilon)$ *d'un seul côté, alors* $E(\varepsilon)$ *contient une feuille compacte.*

Démonstration. — Puisque l'ensemble $L(\varepsilon)$ saturé non vide du corollaire 1 est compact, il contient un ensemble minimal compact K; soit τ un segment d'une feuille de $\mathcal{N}$ qui rencontre K. Si K ne se réduit pas à une feuille compacte, K est soit la variété X, soit un ensemble exceptionnel [1, 10]. Dans le premier cas, $\varepsilon \cap \tau$ est dense dans

$$(\varepsilon \cup K) \cap \tau = X \cap \tau = \tau,$$

donc il est impossible que ε tende vers $L(\varepsilon)$ d'un seul côté. Dans le second cas, $K \cap \tau$ est un ensemble de Cantor. Les points de $K \cap \tau$ qui sont de deuxième espèce au sens de [1] sont des points approchés de chaque côté par des points de $K \cap \tau$, donc aussi par des points de $\varepsilon \cap \tau$. Puisque ε tend vers $L(\varepsilon)$ d'un seul côté, ceci est à nouveau impossible, et K se réduit à la feuille compacte annoncée : en effet, la feuille K compacte, donc sans bout, est différente de la feuille F contenant le bout ε; elle est donc contenue dans l'enveloppe de ε.

Démonstration du théorème 1. — D'après un lemme de [6], $L(\varepsilon)$ contient un ensemble saturé minimal E, non nécessairement compact. La démonstration du corollaire 1 convenablement modifiée montre que $E \cap \tau$ ne peut être ni τ, ni un ensemble de Cantor. Donc E se réduit à une feuille fermée. Elle n'est pas nécessairement compacte.

Remarque 1. — Le cardinal de l'ensemble B des feuilles fermées $(F_b)_{b \in B}$ de $L(\varepsilon)$ est inférieur ou égal à $1 + b_1(X, Q)$, car la feuille F, non fermée, de bout ε est contenue dans exactement l'une des composantes connexes de $X - \bigcup_{b \in B} F_b$.

3. Le type de certains bouts et des feuilles de leur enveloppe.

THÉORÈME 2. — *Soit* ε *un bout d'une feuille* F; *si* ε *tend vers* $L(\varepsilon)$ *d'un seul côté, alors* ε *est un bout propre.*

Démonstration. — Soit τ un segment d'une feuille de $\mathcal{N}$ rencontrant $L(\varepsilon)$. D'après la démonstration du théorème 1 et de son corollaire, $L(\varepsilon)$ est d'intérieur vide; nous pouvons donc supposer sans restreindre la généralité que les extrémités de τ ne sont pas dans $L(\varepsilon)$.

Choisissons l'orientation de $\tau \simeq [0, 1]$ telle que ε tend vers $L(\varepsilon)$ de façon décroissante; pour tout x_0 non nul de τ, il existe η strictement positif, tel que $]x_0 - \eta, x_0[$ ne contient aucun point de ε.

Soit M la borne supérieure dans τ de l'ensemble fermé non vide $L(\varepsilon) \cap \tau$; d'après le choix de τ, M est strictement inférieur à 1.

La feuille G de $\mathcal{F}$ qui contient M est une feuille isolée de $L(\varepsilon)$, d'après les deux alinéas précédents. Cette feuille G particulière est propre, puisqu'elle est contenue dans $L(\varepsilon)$ et puisque $L(\varepsilon)$ est un ensemble saturé. Puisque G est dans l'ensemble-limite de ε tout en étant isolée dans $L(\varepsilon)$, le bout ε et la feuille F qui contient ε ne peuvent appartenir à $L(\varepsilon)$.

Le bout ε de la feuille F est donc propre : $E(\varepsilon)$ et $L(\varepsilon)$ coïncident.

Remarque 2. — La feuille F contenant le bout ε de l'énoncé du théorème 2 n'est pas nécessairement propre. Toutefois elle est, par exemple, propre si elle n'admet qu'un seul bout. En revanche, on a le

THÉORÈME 3. — *Soit* ε *un bout tel que* ε *tend vers* $L(\varepsilon)$ *d'un seul côté; alors* $E(\varepsilon)$ *est une réunion de feuilles propres.*

Démonstration. — Soit G une feuille quelconque de $E(\varepsilon)$, qui coïncide avec $L(\varepsilon)$ d'après le théorème 2. Soit H une feuille de $L(G)$, où l'on suppose G non fermée (si G est fermée, G est *a fortiori* propre, d'après [1]).

Lorsque ε tend vers $L(\varepsilon)$ d'un seul côté, G tend vers $L(G)$ d'un seul côté. Considérons comme précédemment un segment $\tau = [0, 1]$ d'une feuille de $\mathcal{N}$, rencontrant $L(G)$, d'extrémités ne rencontrant pas $L(G)$, tel que G tende vers $L(G)$ de façon décroissante. Soit N la borne supérieure de $\tau \cap L(G)$ dans τ. La feuille de $\mathcal{F}$ contenant N est isolée dans $L(G)$; puisqu'elle est dans $L(G)$, c'est que G n'est pas contenue dans $L(G)$. Donc la feuille G est propre : $L(G) = E(G)$.

Remarque 3. — Le théorème 3 permet d'étendre la conclusion du théorème 1 au cas beaucoup plus général où l'image de $E(\varepsilon)$ est un ensemble compact dans $X \bmod \mathcal{F}$, l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$. Dans le cas d'un bout relativement compact le théorème 3 implique le corollaire 1, compte tenu du fait [9] qu'une réunion compacte de feuilles propres contient une feuille compacte.

Remarque 4. — Considérons le bout isolé ε d'une spirale σ s'enroulant sur un cycle-limite $L(\varepsilon)$. Son ensemble $L(\varepsilon)$ se compose de deux feuilles fermées dans le feuilletage obtenu en retirant deux points distincts de γ. Donc l'ensemble-limite d'un bout isolé n'est pas connexe en général, même si c'est une réunion de feuilles fermées d'une variété de premier nombre de Betti rationnel fini, cf. le cas étudié en [8].

Il serait utile de caractériser les bouts « relativement connexes », c'est-à-dire les bouts dont l'ensemble-limite est connexe; en effet, si l'ensemble-limite d'un tel bout ε est une réunion de feuilles fermées, il se réduit à une seule feuille F_ε fermée, d'après la remarque 1; en coupant X le long de F_ε, on vérifie même que ε tend alors vers F_ε d'un seul côté.

4. Le cas différentiable.

Soit F une feuille captée par une feuille G. Par définition [5], il existe un feuilletage $\mathcal{G}$ induit par $\mathcal{F}$ sur un cylindre $\varphi : S^1 \times R \to X$, transverse à $\mathcal{F}$, vérifiant la propriété suivante : $\mathcal{G}$ contient un cycle-limite γ provenant de la feuille G, vers lequel s'enroule au moins une spirale σ provenant de la feuille F.

Cette spirale définit alors une famille non vide de bouts de la feuille F, notés $(\varepsilon_i)_{i \in I(\sigma)}$.

Dans une telle situation, nous dirons alors que chacun des bouts ε_i, pour i appartenant à $I(\sigma)$, est *capté* par la feuille G.

En appliquant le théorème 1 de [7] à toute feuille F de $L(\varepsilon)$ dont l'ensemble-limite $L(F)$ contient un compact saturé non vide, il vient par exemple le :

THÉORÈME 4. — *Soit* ε *un bout relativement compact d'une feuille d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ *transversalement de classe* C^2 *d'une variété connexe* X. *Si* $\mathcal{F}$ *n'est pas un feuilletage d'une variété compacte sans bord par des feuilles partout denses, alors* ε *est un bout capté.*

Remarque 5. — La considération des feuilletages construits par exemple en [7] permet de donner une réponse négative aux problèmes posés dans [8] : on connaît des feuilles et des bouts propres qui ne tendent pas vers leurs ensembles-limites d'un seul côté, même si le feuilletage est C^∞, si la variété est compacte et si des conditions supplémentaires, quelconques, sont vérifiées par $\pi_1(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Denjoy, *J. de Math. Pures et Appl.*, 9 (1932), 333.
[2] H. Freudenthal, *Math. Zeitschrift*, 33 (1931), 692.
[3] A. Haefliger, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16 (1962), 367.
[4] H. Hopf, *Comm. Math. Helv.*, 16 (1943), 81.
[5] C. Lamoureux, Sur quelques phénomènes de captage, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 23,4 (1973), 229.
[6] C. Lamoureux, Holonomie et feuilles exceptionnelles, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 26,4 (1976), 273.
[7] C. Lamoureux, Quelques conditions d'existence de feuilles compactes, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 24,4 (1974), 229.
[8] Nishimori, *Quaterly J. Math.*, Oxford, 26 (1975), 159.
[9] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Paris, 1952.
[10] G. Reeb, Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 6 (1955), 89.
[11] L. Siebenmann, *Commentarii Math Helv.*, 47, 2 (1972), 137.

Manuscrit reçu le 24 février 1976
Proposé par G. Reeb.

Claude Lamoureux,
64, boulevard Arago
75013 Paris.