ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

M. CAHEN
M. PARKER

Parallélismes absolus des variétés lorentziennes

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 1 (1977), p. 251-266
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_1_251_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27,1 (1977), 251-266

PARALLÉLISMES ABSOLUS DES VARIETÉS LORENTZIENNES

par M. CAHEN et M. PARKER

Une description des variétés riemanniennes admettant un parallélisme absolu a été donnée par Cartan et Schouten en 1926 [2]. En 1972, J. Wolf étend ces résultats aux variétés pseudo-riemanniennes qui sont le produit d'un espace plat et de facteurs irréductibles [3].

Nous montrons que tout parallélisme absolu d'une variété lorentzienne complète et simplement connexe respecte une décomposition de de Rham de cette variété. De plus, un espace symétrique lorentzien faiblement irréductible qui admet un parallélisme absolu est un groupe de Lie. Nous construisons des tores lorentziens non plats admettant un parallélisme absolu.

1. Généralités.

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne connexe, de classe C^∞ et M_x l'espace tangent à M au point x de M.

1.1. DEFINITION. – *Un parallélisme absolu ϕ sur (M, g) compatible avec la métrique g est une famille d'isomorphismes linéaires*

$$\phi_{yx} : M_x \to M_y$$

tels que

1) *pour tous $x, y, z \in M$: $\phi_{zy}\,\phi_{yx} = \phi_{zx}$ et $\phi_{xx} = I$*

2) *Si $\xi_x \in M_x$, le champ de vecteurs $\phi_{yx}\,\xi_x$ est de classe C^∞*

3) *les* ϕ_{yx} *sont des isométries, c'est-à-dire si*

$$x, y \in M \quad \text{et} \quad \xi_x, \eta_x \in M_x : g_y(\phi_{yx}\,\xi_x\,,\,\phi_{yx}\,\eta_x) = g_x(\xi_x\,,\,\eta_x)$$

4) *les* ϕ*-géodésiques sont les* g*-géodésiques (modulo la paramétrisation)*

Précisons 4) :

les vecteurs tangents $\xi_x \in M_x$ et $\xi_y \in M_y$ sont dits ϕ-parallèles si et seulement si $\xi_y = \phi_{yx}\,\xi_x$. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des vecteurs tangents à M, les classes d'équivalence sont des champs de vecteurs différentiables, appelés champs de vecteurs ϕ-parallèles. La connexion ${}^{\phi}\Gamma$ associée à ϕ est univoquement déterminée par la condition que le ϕ-parallélisme soit le ${}^{\phi}\Gamma$-parallélisme. On montre, grâce à 1), 2), 3) et 4) (cf. [3]) que la paramétrisation des g-géodésiques par la longueur d'arc est une paramétrisation affine des ϕ-géodésiques, ce qui permet de supprimer la parenthèse.

La notation $(M\,,g\,,\phi)$ signifiera dorénavant que $(M\,,g)$ est une variété pseudo-riemannienne connexe, admettant un parallélisme absolu ϕ compatible avec la métrique g.

$(M\,,g\,,\phi)$ est dite complète si elle est géodésiquement complète pour la connexion ${}^{\phi}\Gamma$ (ou pour ${}^{g}\Gamma$, en vertu de 4))

1.2. *Courbure et torsion.* – Soient ${}^{\phi}R$, ${}^{\phi}T$ les tenseurs de courbure et de torsion de la connexion ${}^{\phi}\Gamma$, ${}^{g}R$ et ${}^{g}T$ ceux de la connexion de Levi-Civita ${}^{g}\Gamma$. On a ${}^{g}T = 0$.

Soit $\{\xi_i\}$ une base de champs de vecteurs ϕ-parallèles.

$${}^{\phi}\nabla_{\xi_i}\,\xi_j = 0$$

implique ${}^{\phi}R = 0$.

On vérifie que ${}^{\phi}T(\xi_i\,,\xi_j) = -[\xi_i\,,\xi_j]$, ce qui fournit immédiatement une classe de parallélismes absolus :

1.3. PROPOSITION [3]. – *Soit* $(M\,,g\,,\phi)$ *complète.* ${}^{\phi}T$ *est parallèle si et seulement si* $M = G/D = \{Dg \mid g \in G\}$ *où* G *est un groupe de Lie simplement connexe muni d'une métrique bi-invariante non singulière et* D *est un sous-groupe discret de* G. *Le parallélisme* ϕ *est induit par les translations à gauche de* G.

1.4. PROPOSITION [3]. – *Soit* Q *l'espace vectoriel des champs de vecteurs ϕ-parallèles de* (M, g, ϕ). *Si* $\xi, \eta, \psi \in Q$, *alors*

1) $g([\xi, \eta], \psi) + g(\eta, [\xi, \psi]) = 0$

2) $g(\xi, \eta)$ *est constante*

3) Q *est inclus dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{I}$ *des champs de vecteurs de Killing de* (M, g)

4) $[[\xi, \eta], \psi] \in Q$. Q *est donc un système triple de Lie* (*abrégé* STL)

5) ${}^{g}R(\xi, \eta)\,\psi = -1/4\,[[\xi, \eta], \psi]$

6) (M, g) *est localement symétrique*

7) *Si* (M, g, ϕ) *est complète, le revêtement universel* $\widetilde{M}$ *de* M *admet un parallélisme absolu* $\widetilde{\phi}$ *tel que, si* Π *est la projection canonique de* $\widetilde{M}$ *sur* M, $d\Pi$ *soit un isomorphisme de* STL *appliquant l'ensemble* $\widetilde{Q}$ *des champs de vecteurs* $\widetilde{\phi}$*-parallèles de* $\widetilde{M}$ *sur* Q.

2. Parallélismes absolus des variétés simplement connexes.

Soit (M, g, ϕ) complète et simplement connexe. (M, g) est donc un espace globalement symétrique.

2.1. *Notations.* – Soient I (M) le groupe des isométries de M, $\mathfrak{I}$ son algèbre de Lie. Soit x un point de M, la symétrie géodésique s_x induit un automorphisme involutif de $\mathfrak{I}$ noté σ. On a $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^+ + P$, où $\mathfrak{I}^+$ et P sont les espaces propres de σ de valeur propre + 1 et – 1.

Le groupe des transvections $\mathfrak{G}(M)$ est le sous-groupe de I (M) comprenant les produits d'un nombre pair de symétries géodésiques. Son algèbre de Lie G est un idéal de $\mathfrak{I}$ et on a $G = K + P$ où $K = \mathfrak{I}^+ \cap G$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe $\mathfrak{K}$ de $\mathfrak{G}(M)$ fixant le point x.

La projection canonique de $\mathfrak{G}(M)$ sur $M \sim \mathfrak{G}(M)/\mathfrak{K}$ induit un isomorphisme de vectoriels entre P et l'espace tangent M_x. Cet isomorphisme permet de transporter la métrique g sur P. Il existe alors une et une seule forme bilinéaire B sur G, invariante par *ad* G et par σ, qui étend g.

Soit Q l'ensemble des champs de vecteurs ϕ-parallèles de (M, g, ϕ). On sait que $Q \subset \mathfrak{J}$ et que $g(\xi, \eta)$ est constante.

D'où $g(\xi, \eta) = g_x(\xi_x, \eta_x) = B(\xi_P, \eta_p)$ avec

$$\xi = \xi^+ + \xi_P (\xi^+ \in \mathfrak{J}^+ , \xi_P \in P)$$

2.2. Proposition [3]. — *L'application* $Q \to P : \xi \to (1 - \sigma)\xi$ *est un isomorphisme de* STL.

Il suffit d'observer que ${}^gR(\xi, \eta)\psi = -1/4 [[\xi, \eta], \psi]$ pour tous $\xi, \eta, \psi \in Q$ et que ${}^gR(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$, pour tous $X, Y, Z \in P$.

Décomposition de de Rham de (M, g, ϕ)

2.3. Definitions — 1) *Soit* M′ *une sous-variété pseudo-riemannienne de* (M, g, ϕ). *On dit que* ϕ *induit un parallélisme absolu sur* M′ *si et seulement si* $\phi_{yx} M'_x = M'_y$, *pour tous* $x, y \in M'$.

2) *Si* (M, g) *est isométrique au produit* $(M', g') \times (M'', g'')$, *on dit que le parallélisme absolu* ϕ *respecte cette décomposition s'il existe un parallélisme absolu* ϕ' *sur* M′ *compatible avec* g' *et un parallélisme absolu* ϕ'' *sur* M″ *compatible avec* g'' *tels que pour tous* $(x', x''), (y', y'') \in M' \times M''$, *on ait*

$$\phi_{(x',x''),(y',y'')} = \phi'_{x'y'} \oplus \phi''_{x''y''}.$$

On écrit alors $\phi = \phi' \times \phi''$ *et*

$$(M, g, \phi) = (M', g', \phi') \times (M'', g'', \phi'').$$

3) *Un idéal* Q′ *du* STL Q *est un sous-ensemble* Q′ *de* Q *tel que* $[Q'QQ] \subset Q'$.

2.4. Proposition [3]. — *Si* (M, g, ϕ) *est complète et égale à* $(M', g', \phi') \times (M'', g'', \phi'')$ *et si* Q *(resp.* Q′ *et* Q″*) désigne le* STL *des champs de vecteurs* ϕ *(resp.* ϕ' *et* ϕ''*)-parallèles, alors* Q *est isomorphe à la somme directe orthogonale*

$$Q' \overset{\perp}{\oplus} Q'' \quad et \quad [Q', Q']_x \subset Q'_x, [Q'', Q'']_x \subset Q''_x.$$

Réciproquement, si (M, g, ϕ) *est simplement connexe, complète et si* $Q = Q' \overset{\perp}{\oplus} Q''$ *avec* $[Q', Q']_x \subset Q'_x, [Q'', Q'']_x \subset Q''_x$, *pour tout* $x \in M$, *alors* $(M, g, \phi) = (M', g', \phi') \times (M'', g'', \phi'')$.

2.5. COROLLAIRE. – *Soit* (M, g, ϕ) *complète, simplement connexe et telle que* $(M, g) = (M', g') \times (M'', g'')$. *Soit* $x = (x', x'') \in M$ *et notons* $M'(x'') = M' \times \{x''\}$ *et* $M''(x') = \{x'\} \times M''$. *Si* $M'(x'')$ *et* $M''(x')$ *sont stables par la composante connexe du groupe d'isotropie de x, alors il existe des parallélismes absolus* ϕ' *et* Q'' *sur* M' *et* M'' *tels que* $(M, g, \phi) = (M', g', \phi') \times (M'', g'', \phi'')$.

Démonstration. – P, étant isomorphe à l'espace tangent M_x, est une somme directe orthogonale $P = P' \overset{\perp}{\oplus} P''$; l'isomorphisme de STL entre Q et P implique $Q = Q' \oplus Q''$. Si $\xi, \eta \in Q$, $g(\xi, \eta) = B(\xi_P, \eta_P)$, et les idéaux Q' et Q'' sont orthogonaux. Enfin si $\xi, \eta \in Q'$, $\xi = \xi^+ + \xi_P$ où $\xi^+ \in \mathfrak{I}$ et $\xi_P \in P$, et donc $[\xi, \eta]_x = [\xi^+, \eta_P]_x - [\eta^+, \xi_P]_x \in Q'_x$.

Si (M, g, ϕ) est complète et simplement connexe, on sait, par le théorème de de Rham-Wu, que M est isométrique à un produit d'espaces pseudo-riemanniens symétriques $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$ où M_0 est plat et pour tout $i > 0$, M_i est faiblement irréductible sous l'action du groupe d'holonomie linéaire. (Rappelons que M_i est dit faiblement irréductible si aucun sous-espace propre non singulier de M_i n'est stable sous l'action de l'holonomie).

2.6. COROLLAIRE. – *Soient* (M, g, ϕ) *complète et simplement connexe et* $(M, g) = (M_0, g_0) \times (M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$ *une décomposition de de Rham de* (M, g). *Si* M_i *est irréductible, pour tout* $i > 0$, *alors* ϕ *respecte la décomposition de de Rham :* $\phi = \phi_0 \times \phi_1 \times \ldots \phi_r$, *où* ϕ_0 *est le parallélisme euclidien sur* M_0 *et pour tout* $i > 0$, ϕ_i *est un parallélisme absolu sur* M_i.

Démonstration. – Soit G l'algèbre de Lie du groupe des transvections de M. On sait que $G = G_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_r$ où G_0 est abélien et G_i est semi-simple pour tout $i \geqslant 1$. Si $\xi \in \mathfrak{I}^+$, ξ agit comme dérivation de G, donc conserve le centre G_0 et son orthogonal égal à $\oplus_i G_i$. La restriction de la dérivation ξ à l'algèbre semi-simple $\oplus_i G_i$ est intérieure et conserve donc chacun des facteurs G_i.

3. Variétés simplement connexes lorentziennes.

Une variété pseudo-riemannienne (M, g) de dimension n est dite lorentzienne si g est de signature $(n-1, 1)$, c'est-à-dire qu'il existe au voisinage d'un point x quelconque de M des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ dans lesquelles la métrique au point x s'écrit

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 - (dx^n)^2.$$

Si (M, g) est une variété lorentzienne admettant une décomposition de de Rham $(M, g) = (M_0, g_0) \times \ldots \times (M_r, g_r)$ où M_0 est euclidien et les $M_i\,(i > 0)$ sont faiblement irréductibles, deux cas sont à envisager :

1) tous les espaces $M_i\,(i \geqslant 0)$ sont riemanniens. Alors dim $M_0 = 1$.

2) l'un des facteurs admet une métrique lorentzienne. Il est nécessairement unique.

3.1. PROPOSITION. — *Soit* (M, g, ϕ) *complète, simplement connexe, lorentzienne et* $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$ *une décomposition de de Rham de* (M, g). *Si la restriction de g à l'un des facteurs est de signature lorentzienne, ce facteur est soit plat, soit irréductible, soit non irréductible, et les autres facteurs sont riemanniens.*

a) *Si le facteur lorentzien est plat,* ϕ *respecte la décomposition de de Rham et induit sur* M_0 *le parallélisme euclidien.*

b) *Si le facteur lorentzien est irréductible, il est égal au revêtement universel de* SL(2, R) *et* ϕ *induit un parallélisme absolu sur chacun des facteurs.*

c) *Si le facteur lorentzien* M_1 *est non irréductible,* ϕ *induit un parallélisme absolu sur* $M_0 \times M_1$ *et sur chacun des* M_i $(i \geqslant 2)$.

d) *Les facteurs riemanniens non plats sont des groupes compacts simples ou* SO(8)/SO(7).

Si la restriction de g à chacun des facteurs est définie, $M_i\,(i \geqslant 0)$, *est irréductible, donc* ϕ *respecte la décomposition de de Rham.*

Démonstration. — Si le facteur lorentzien est plat ou irréductible, tous les facteurs $M_i\,(i \geqslant 1)$ sont irréductibles, et donc

$$\phi = \phi_0 \times \ldots \times \phi_r$$

en vertu du corollaire 2.6. Il résulte de [3] que l'espace plat M_0, riemannien ou lorentzien, n'admet d'autre parallélisme absolu que le parallélisme euclidien, d'où a).

Si M_1 est lorentzien et irréductible, la classification donnée dans [3] implique que M_1 est un groupe simple, muni d'une métrique bi-invariante de signature lorentzienne. Il s'agit donc du revêtement universel de SL (2 , R), d'où b).

L'algèbre de Lie G du groupe des transvections est une somme d'idéaux $G = Z_0 \oplus G_1 \oplus \ldots \oplus G_r$, où Z_0 est central. Si M_1 est lorentzien non irréductible, G_1 est résoluble [1], et G_i $(i \geqslant 2)$ est semi-simple. L'algèbre $\mathfrak{J}^+$ conserve le radical $Z_0 \oplus G_1$ de G, donc aussi son orthogonal pour B, égal à $G_2 \oplus \ldots \oplus G_r$. Cette dernière algèbre étant semi-simple, $\mathfrak{J}^+$ conserve chacun des idéaux G_i $(i \geqslant 2)$, d'où c). Enfin, d) est démontré dans [3].

3.2. Proposition. – *Soit* $(M_0 \times M_1 , g , \phi)$ *complète, simplement connexe, où* M_0 *est euclidien et* M_1 *est lorentzien, faiblement irréductible, non irréductible. Alors* $\phi = \phi_0 \times \phi_1$, ϕ_0 *est le parallélisme euclidien sur* M_0, M_1 *est un groupe résoluble non nilpotent,* ϕ_1 *est induit par les translations du groupe* M_1.

Démonstration. – Il résulte de [1] que l'algèbre de Lie

$$G = Z_0 \oplus G_1$$

admet une base $\{z_i , z , w_\alpha , \bar{z} , w_\alpha^*\}$ telle que $\alpha = 1, \ldots , n-2$; $i = 1, \ldots , p$; $\{z_i\}$ soit une base de Z_0 ; $\{z , w_\alpha , \bar{z}\}$ soit une base de $P_1 = P \cap G_1$; $\{w_\alpha^*\}$ soit une base de K.

La forme bilinéaire B est définie par $B(w_\alpha , w_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$; $B(z , \bar{z}) = -1$; $B(z_i , z_j) = \delta_{ij}$, les autres produits scalaires étant nuls.

Les seuls crochets non nuls sont $[\bar{z}, w_\alpha] = w_\alpha^*$, $[w_\alpha^*, \bar{z}] = \lambda_\alpha w_\alpha$ et $[w_\alpha^*, w_\beta] = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} z$

Les éléments de $\mathfrak{J}^+$ sont des dérivations de G, qui commutent avec σ et qui laissent B invariante. Par conséquent, $\mathfrak{J}^+$ conserve $[K , P] = W \oplus \mathbf{R}z$ (où W est le sous-espace de base $\{w_\alpha\}$), le centre $Z = Z_0 + \mathbf{R}z$ de G et $Z \cap Z^\perp = \mathbf{R}z$. On vérifie alors par un calcul direct que $\mathfrak{J}^+ = K + \mathcal{H} + \mathcal{C} + \mathcal{D}$ où

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathrm{End}\, Z_0 \mid B(Hz_i, z_j) + B(z_i, Hz_j) = 0\}$$

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathrm{End}\,(W + W^*) \mid Aw_\alpha = A_{\alpha\beta}\, w_\beta\,,\ Aw_\alpha^* = A_{\alpha\beta}\, w_\beta^*\,,$$
$$A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad A_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = 0\}$$

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathrm{End}\,(\mathbf{R}z + \mathbf{R}\bar{z} + Z_0) \mid D\bar{z} = d_i z_i\,, Dz_i = d_i z, Dz = 0\}$$

L'ensemble Q des champs de vecteurs ϕ-parallèles est un sous-ensemble de $\mathcal{J}$ vérifiant les 3 conditions :

A) $[[Q\,,Q]\,,Q] \subset Q$

B) l'application $Q \to P : \xi \to (1-\sigma)\,\xi = 2\,\xi_P$ est un isomorphisme de STL

C) la forme $(\xi\,,\eta) = B(\xi_P\,,\eta_P)$ sur Q est invariante

Par un raisonnement donné en appendice, on déduit de ces conditions que Q est le vectoriel de base

$$\{z_i\,, z\,, w_\alpha - \Lambda^{-1/2} J\, w_\alpha^*\,, \bar{z} + \Lambda^{1/2} J\}$$

où Λ est la matrice diagonale $\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\lambda_\alpha$ et $J \in \mathcal{A}$ est telle que $J^2 = -I$. On vérifie immédiatement que Q est une algèbre de Lie, somme des 2 idéaux orthogonaux Q_0 et Q_1, où $Q_0 = Z_0$ est central et Q_1 est l'idéal résoluble non nilpotent de base

$$\{z\,, w_\alpha - \Lambda^{-1/2} J\, w_\alpha^*\,, \bar{z} + \Lambda^{1/2} J\}$$

M_1 est donc difféomorphe au groupe simplement connexe $\widetilde{Q}_1$ d'algèbre de Lie Q_1.

3.3. *Remarque.* – On sait [1] que la classe d'isométrie de M_1 est déterminée par $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}\}$ où les λ_α sont donnés à un facteur positif commun près. De plus, le groupe des automorphismes de G_1 qui commutent avec σ et laissent B invariante opère transitivement sur les structures complexes J intervenant dans la table de multiplication de Q_1. On en déduit que Q_1, et donc $\widetilde{Q}_1$, est déterminé à isomorphisme près par la classe d'isométrie de M_1.

3.4. COROLLAIRE. – *Soit* $(M\,,g)$ *un espace symétrique lorentzien simplement connexe, faiblement irréductible, à groupe de transvections* $\mathfrak{G}$ *résoluble.* M *admet un parallélisme absolu compatible avec g si et seulement si les constantes de structure* λ_α *de* $\mathfrak{G}$ *sont* *positives et de multiplicité paire. Dans ce cas,* M *admet une structure de groupe de Lie résoluble, non nilpotent, de dimension paire.*

En réunissant les propositions 3.1. et 3.2. on obtient :

3.5. THEOREME. – *Soit* (M, g, ϕ) *complète, simplement connexe, lorentzienne et* $M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_r$ *une décomposition de de Rham de* (M, g). *Alors*

– ϕ *respecte cette décomposition et induit sur* M_0 *le parallélisme euclidien*

– *les facteurs riemanniens non plats sont des groupes compacts simples ou la sphère* S^7

– *le facteur lorentzien est soit plat, soit le revêtement universel de* $SL(2, R)$, *soit le groupe résoluble non nilpotent* $\widetilde{Q}_1$.

4. Parallélismes absolus des variétés lorentziennes non simplement connexes.

Si (M, g, ϕ) est complète, son revêtement universel $\widetilde{M}$ admet un parallélisme absolu $\widetilde{\phi}$. La classification globale des parallélismes absolus du facteur plat et des facteurs irréductibles d'une décomposition de de Rham de M est donnée dans [3]. Il reste à étudier (M, g, ϕ) complet, lorentzien, faiblement irréductible et non irréductible. Le § 3 montre que M admet comme revêtement universel le groupe résoluble $\widetilde{Q}_1$. Parmi les espaces (M, g, ϕ) admettant $\widetilde{Q}_1$ comme revêtement universel, certains sont globalement symétriques. Ils s'obtiennent en faisant agir sur $\widetilde{Q}_1$ un sous-groupe discret du centralisateur du groupe des transvections $\mathfrak{G}(M)$ dans le groupe des isométries $I(M)$, que nous noterons $Z_{I(M)}\,\mathfrak{G}(M)$.

Pour déterminer les groupes de transvections et d'isométries de M, munissons l'espace R^n de coordonnées x^0, x^α $(\alpha = 1, \ldots, n-2)$, $x^{\bar{0}}$ dans lesquelles la métrique s'écrit :

$$ds^2 = 2\,dx^0 \left[dx^{\bar{0}} - \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha (x^\alpha)^2 \right) dx^0 \right] + \sum_\alpha (dx^\alpha)^2$$

où les nombres λ_α sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie G, et sont donc positifs et de multiplicité paire.

4.1. PROPOSITION. – *Le groupe des isométries* I (M) *de l'espace* $\mathbf{R}^n$ *muni de la métrique ci-dessus est formé des transformations :*

$$
\begin{aligned}
x^0 &= \epsilon\, x'^0 + n \\
x^\alpha &= \mathrm{U}_{\alpha\beta}\, x'^\beta + \mathrm{M}_\alpha \cos k_\alpha x'^0 + \mathrm{N}_\alpha \sin k_\alpha x'^0 \\
x^{\bar 0} &= \epsilon\, \mathrm{U}_{\beta\alpha}\, k_\beta\, (\mathrm{M}_\beta \sin k_\beta x'^0 - \mathrm{N}_\beta \cos k_\beta x'^0)\, x'^\alpha + \epsilon\, x'^{\bar 0} \\
&\quad + \frac{\epsilon}{4} k_\beta \quad \{(\mathrm{M}_\beta^2 - \mathrm{N}_\beta^2) \sin 2k_\beta x'^0 - 2\, \mathrm{M}_\beta \mathrm{N}_\beta \cos 2k_\beta x'^0\} \; + t
\end{aligned}
$$

où $\epsilon^2 = 1$; $k_\alpha^2 = 2\,\lambda_\alpha$; $\mathrm{U}_{\alpha\beta}\,\mathrm{U}_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}$ et $\mathrm{U}_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = 0$

Démonstration. – Les seules composantes non nulles du tenseur de courbure de $\mathbf{R}^n$ sont $\mathrm{R}_{0\alpha 0\beta} = -\,2\,\lambda_\alpha\,\delta_{\alpha\beta}$. Le sous-espace engendré par $\dfrac{\partial}{\partial x^{\bar 0}}$ est stable par l'isotropie et la famille des courbes intégrales de ce champ de vecteurs est donc stabilisée par I (M). D'autre part, le groupe d'isotropie conserve le sous-espace

$$\{\mathrm{R}\,(\mathrm{X}\,,\,\mathrm{Y})\,\mathrm{Z} \mid \mathrm{X}\,,\,\mathrm{Y}\,,\,\mathrm{Z} \in \mathrm{P}\}$$

de base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar 0}}, \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} (\alpha = 1, \ldots, n-2) \right\}$ et les variétés intégrales correspondantes sont donc permutées par I (M). La proposition s'établit alors par un calcul direct.

4.2. PROPOSITION. – *Le centralisateur* $\mathrm{Z}_{\mathrm{I(M)}}\, \mathfrak{G}\,(\mathrm{M})$ *comprend les éléments :*

$$
\begin{aligned}
&x^0 = x'^0 + n \text{ où } n = \frac{q_\alpha}{k_\alpha}\pi \text{ avec } q_\alpha \text{ entier, pour tout } \alpha = 1,\ldots,n-2 \\
&x^\alpha = u_\alpha\, x'^\alpha \qquad\qquad \text{et } u_\alpha = (-1)\, q_\alpha \\
&x^{\bar 0} = x'^{\bar 0} + t
\end{aligned}
$$

Démonstration. – Le groupe des isométries I (M) est paramétrisé par les nombres ϵ, n, M_α, N_α, t, $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Le sous-groupe des transvections $\mathfrak{G}$(M) correspond aux paramètres n, M_α, N_α, t. Les éléments de $\mathrm{Z}_{\mathrm{I(M)}}\, \mathfrak{G}\,(\mathrm{M})$ se déterminent par calcul. Notons que n n'est non nul que si les rapports k_α/k_β sont 2 à 2 rationnels.

4.3. THEOREME – *Les espaces symétriques lorentziens faiblement irréductibles, non irréductibles, admettant un parallélisme absolu* *sont les groupes* $\widetilde{Q}_1/\Gamma$ *où* $\widetilde{Q}_1$ *est un groupe de Lie résoluble simplement connexe de dimension paire, non nilpotent, et* Γ *est un sous-groupe central de* $\widetilde{Q}_1$ *isomorphe à* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. – Ces espaces, admettant $\widetilde{Q}_1$ comme revêtement universel, sont des quotients $\widetilde{Q}_1/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret du centralisateur $Z_{I(M)}\ \mathfrak{g}(M)$, qui conserve les champs de vecteurs ϕ-parallèles de $\widetilde{Q}_1$. Or les champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x^{\bar{0}}},\ \cos k_\alpha x^0 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - J_{\alpha\beta} \sin k_\beta x^0 \frac{\partial}{\partial x^\beta} +$$

$$+(x^\alpha k_\alpha \sin k_\alpha x^0 + J_{\alpha\beta} x^\beta k_\beta \cos k_\beta x^0) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{0}}} (\alpha = 1, \dots, n-2),$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\sqrt{\lambda_\alpha}}{4} J_{\alpha\beta}\left(x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$$

constituent une base de la sous-algèbre Q_1 de $\mathfrak{I}$. On vérifie alors simplement qu'un élément de $Z_{I(M)}\ \mathfrak{g}(M)$ conserve ces champs de vecteurs si et seulement si $n = 0$, d'où

$$u_\alpha = 1 \qquad \text{pour tout} \qquad \alpha = 1, \dots, n-2.$$

D'autre part, l'action du groupe $\widetilde{Q}_1$ sur $\mathbf{R}^n$ est définie par :

$$x^0 = x'^0 + n$$

$$x^\alpha = \left(\exp \frac{n}{2} KJ\right)_{\alpha\beta} x'^\beta + A^\alpha \cos k_\alpha x'^0 - (JA)^\alpha \sin k_\alpha x'^0$$

$$x^{\bar{0}} = x'^{\bar{0}} + x'^\alpha \left(\exp \frac{-n}{2} KJ\right)_{\alpha\beta} k_\beta (A^\beta \sin k_\beta x'^0 + (JA)^\beta \cos k_\beta x'^0) + t$$

où K est la matrice diagonale $K_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\ k_\alpha$.

Les isométries

$$x^0 = x'^0$$
$$x^\alpha = x'^\alpha$$
$$x^{\bar{0}} = x'^{\bar{0}} + t$$

étant centrales dans $\widetilde{Q}_1$, le quotient $\widetilde{Q}_1/\Gamma$ est un groupe.

4.4. COROLLAIRE. — *Un espace symétrique lorentzien faiblement irréductible qui admet un parallélisme absolu est un groupe.*

Démonstration. — Un tel espace admet en effet comme revêtement universel $\widetilde{Q}_1$ ou le revêtement universel de SL (2 , R). Il résulte de [3] qu'un espace symétrique qui admet un parallélisme absolu et a $\overline{SL(2, R)}$ comme revêtement universel est le quotient de $\overline{SL(2, R)}$ par un sous-groupe central.

Remarque. — Tous les quotients $\widetilde{Q}_1/\Delta$, où Δ est un sous-groupe discret, admettent un parallélisme absolu. Parmi ceux-ci, certains sont compacts :

4.5. PROPOSITION. — *Il existe un espace* (M, g, ϕ) *complet, lorentzien, non plat, difféomorphe à un tore.*

Démonstration. — Choisissons dans $\mathbf{R}^n$ des coordonnées $x^0, x^\alpha, x^{\overline{0}}$ telles que les x^α soient adaptées à la structure complexe J, c'est-à-dire si $\alpha = 1, \ldots, n-2 = 2m$, $a = 1, \ldots, m$: $J_{2a-1,2a} = -J_{2a,2a-1} = 1$.

Posons $y^a = x^\alpha + i\, x^{\alpha+1}$ avec $\alpha = 2a - 1$

L'action du groupe $\widetilde{Q}_1$ sur $\mathbf{R}^n$ s'écrit dès lors :

$$x^0 = x'^0 + n$$
$$y^a = e^{-ink_a/2}\, y'^a + e^{ik_a x'^0}\, B_a$$
$$x^{\overline{0}} = x'^{\overline{0}} + k_a \, Im\, (\overline{y}'^a\, B_a\, e^{ik_a (x'^0 + \frac{n}{2})}) + t$$

où $B_a = A_\alpha + i\, A_{\alpha+1}$ avec $\alpha = 2a - 1$, $\overline{y}$ désigne le conjugué de y et $Im\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Supposons les rapports k_a/k_b 2 à 2 rationnels. Il existe donc des entiers q_a tels que $n = \dfrac{4\, q_a\, \pi}{3\, k_a}$. pour tout $a = 1, \ldots, m$.

Les éléments du groupe $\widetilde{Q}_1$ sont paramétrés par $(n, B_1, \ldots, B_m, t)$. Les n éléments

$(n, 0, \ldots, 0)$

$(n, 0, \ldots, e^{2\pi i q_a/3}\, B_a, \ldots, 0)$ où $n = \dfrac{4\, q_a\, \pi}{3\, k_a}$

$(2n, 0, \ldots, B_a, \ldots, 0)$

$(0, \ldots\ldots\ldots, 0, t)$

sont linéairement indépendants sur les réels. Ils engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^n$, qui agit librement et proprement discontinument sur $\mathbf{R}^n$. Le quotient $\widetilde{Q}_1/\mathbf{Z}^n$ est difféomorphe à un tore.

Appendice.

$\mathcal{J}^+ = K + \mathcal{H} + \mathcal{A} + \mathcal{D}$ a été définie en 3.2. On a alors

$$[\mathcal{D}, K] = [\mathcal{D}, \mathcal{A}] = [\mathcal{D}, \mathcal{D}] = [\mathcal{H}, K] = [\mathcal{H}, \mathcal{A}] = 0$$

et $\qquad \mathcal{J} = \mathcal{J}^+ + P. \qquad$ Si $\qquad X \in Q, X = X^+ + X_P$

avec $\qquad X^+ \in \mathcal{J}^+, X_P \in P.$

Comme l'application $Q \to P : X \to 2\, X_P$ est un isomorphisme de STL, il existe une base de Q de la forme

$$\pi \bar{z} = \bar{z} + a_\alpha w_\alpha^* + A' + D' + H'$$
$$\pi w_\alpha = w_\alpha + b_{\alpha\beta} w_\beta^* + A^\alpha + D^\alpha + H^\alpha$$
$$\pi z = z + c_\alpha w_\alpha^* + A + D + H$$
$$\pi z_i = z_i + h_{i\alpha} w_\alpha^* + A^i + D^i + H^i$$

où $A, A', A^i, A^\alpha \in \mathcal{A}$, $D, D', D^i, D^\alpha \in \mathcal{D}$, $H, H', H^i, H^\alpha \in \mathcal{H}$

Condition (B) :

L'isomorphisme de STL : $X \to 2\, X_P$ s'écrit, pour tous $X, Y, Z \in Q$,

$$[[X_P, Y^+], Z^+] + [[X^+, Y_P], Z^+] + [[X^+, Y^+], Z_P] = 3\,[[X_P, Y_P], Z_P]$$

Condition (A) :

Compte tenu de la condition (B), la condition $[[X, Y], Z] \in Q$, pour tous $X, Y, Z \in Q$, s'écrit :

$$4\,[[X_P, Y_P], Z_P] + [[X_P, Y_P], Z^+] + [[X_P, Y^+], Z_P] + [[X^+, Y_P], Z_P] + \\ + [[X^+, Y^+], Z^+] \in Q$$

Nous écrirons A (X , Y , Z) et B (X , Y , Z) pour "la condition A appliquée à X, Y, Z" et "la condition B appliquée à X, Y, Z".

$B(\pi z_i, \pi w_\alpha, \pi z_j)$ implique $A^i = 0$

$B(\pi z, \pi w_\alpha, \pi z)$ implique $A = 0$

L'élément z étant central dans P, πz est central dans Q, d'où $[[\pi z\,,\pi w_\alpha], \pi z] = 0$ ce qui implique $[[\mathrm{H}\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}] = 0$. Comme $\mathcal{H}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe orthogonal de Z_0, sa forme de Killing β est définie négative, d'où

$$\beta([\mathrm{H}\,,\mathrm{H}^\alpha], [\mathrm{H}\,,\mathrm{H}^\alpha]) = \beta([[\mathrm{H}\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}], \mathrm{H}^\alpha) = 0$$

et donc $[\mathrm{H}\,,\mathrm{H}^\alpha] = 0$.

$\mathrm{A}(\pi\bar{z}\,, \pi w_\alpha\,, \pi\bar{z})$ implique

$$-2\,\mathrm{A}'_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}\lambda_\beta + a_\mu \mathrm{A}^\alpha_{\mu\gamma}\mathrm{A}'_{\gamma\beta} - b_{\alpha\gamma}\mathrm{A}'_{\gamma\mu}\mathrm{A}'_{\mu\beta} + a_\sigma[\mathrm{A}'\,,\mathrm{A}^\alpha]_{\sigma\beta} = $$
$$= 4\,\lambda_\alpha\, b_{\alpha\beta} \quad (1)$$

$$[[\mathrm{A}'\,,\mathrm{A}^\alpha],\mathrm{A}'] = 4\,\lambda_\alpha\,\mathrm{A}^\alpha \quad (2)$$

$$[[\mathrm{D}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}'] + [[\mathrm{H}'\,,\mathrm{D}^\alpha], \mathrm{H}'] + [[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{D}'] = 4\,\lambda_\alpha\,\mathrm{D}^\alpha \quad (3)$$

$$[[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha],\mathrm{H}'] = 4\,\lambda_\alpha\,\mathrm{H}^\alpha \quad (4)$$

$\mathrm{A}(\pi\bar{z}\,, \pi w_\alpha\,, \pi w_\beta)$ implique

$$[[\mathrm{A}'\,,\mathrm{A}^\alpha], \mathrm{A}^\beta] = 0 \quad (5)$$

$$[[\mathrm{D}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}^\beta] + [[\mathrm{H}'\,,\mathrm{D}^\alpha], \mathrm{H}^\beta] + [[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{D}^\beta] = 4\,\delta_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\,\mathrm{D} \quad (6)$$

$$[[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}^\beta] = 4\,\delta_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\,\mathrm{H} \quad (7)$$

d'ou $\beta([[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha],\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}) = 4\,\lambda_\alpha\,\beta(\mathrm{H}\,,\mathrm{H}) = \beta([\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha],[\mathrm{H}^\alpha\,,\mathrm{H}]) = 0$ et donc $\mathrm{H} = 0$.

D'autre part,

$$\beta([\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha], [\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha]) = -\,\beta([[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}^\alpha], \mathrm{H}') = 0$$

d'où $[\mathrm{H}'\,,\mathrm{H}^\alpha] = 0$ et donc $\mathrm{H}^\alpha = 0$ compte tenu de (4). Dès lors, (6) implique $\mathrm{D} = 0$.

La forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ étant aussi définie négative, (2) et (5) implique $\mathrm{A}^\alpha = 0$.

Les relations obtenues précédemment impliquent alors $c_\alpha = 0$

$[[\pi z_i\,, \pi z_j], \pi z_k] = 0$ implique

$$(\mathrm{H}^j\,\mathrm{H}^k)_{im} - (\mathrm{H}^i\,\mathrm{H}^k)_{jm} + [\mathrm{H}^i\,,\mathrm{H}^j]_{km} = 0 \quad (8)$$

$$[[\mathrm{H}^i\,,\mathrm{H}^j], \mathrm{H}^k] = 0 \quad (9)$$

De (9) on déduit $[\mathrm{H}^i, \mathrm{H}^j] = 0$. Il existe par conséquent une base de Z_0 dans laquelle les produit $\mathrm{H}^i \mathrm{H}^j$ sont des matrices diagonales. Mais (8) implique alors $\mathrm{H}^i = 0$.

$\mathrm{B}(\pi w_\alpha, \pi \bar{z}, \pi \bar{z})$ implique

$$\mathrm{A}'_{\alpha\beta}\ a_\beta \lambda_\beta - b_{\alpha\beta} \lambda^2_\gamma a_\gamma = \mathrm{D}^\alpha_j \mathrm{D}'_j \tag{10}$$

$$\mathrm{A}'_{\alpha\beta} \mathrm{A}'_{\beta\mu} - b_{\alpha\gamma} \lambda_\gamma \mathrm{A}'_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma} \mathrm{A}'_{\gamma\mu} \lambda_\mu = -3\, \delta_{\alpha\mu} \lambda_\alpha \tag{11}$$

$[[\pi z_i, \pi \bar{z}], \pi \bar{z}) = 0$ implique

$$(\mathrm{H}' \mathrm{D}^i)_j - (\mathrm{H}'^2)_{ij} = 0 \tag{12}$$

$$[\mathrm{H}', [\mathrm{H}', \mathrm{D}^i]] = 0 \tag{13}$$

De (13) on déduit $\mathrm{H}'\mathrm{D}^i = 0$, d'où $\mathrm{H}' = 0$ en vertu de (12).

$\mathrm{A}(\pi \bar{z}, \pi w_\alpha, \pi \bar{z})$ implique

$$[[\mathrm{H}', \mathrm{D}^\alpha], \mathrm{H}'] = 4\, \lambda_\alpha \mathrm{D}^\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{D}^\alpha = 0$$

Désignons par B la matrice $(b_{\alpha\beta})$ et par Λ la matrice diagonale $\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \lambda_\alpha$

(1) devient $\qquad -2\,\mathrm{A}' + \mathrm{B}\,\Lambda - \mathrm{B}\,\mathrm{A}'^2 = 4\,\Lambda\,\mathrm{B}$

$\mathrm{B}(\pi w_\alpha, \pi \bar{z}, \pi w_\beta)$ implique

$$\mathrm{A}'\,\Lambda\,{}^\tau\mathrm{B} - \mathrm{B}\,\Lambda^2\,{}^\tau\mathrm{B} - \mathrm{B}\,\mathrm{A}'\,\Lambda = -3\,\Lambda \tag{14}$$

(11) s'écrit $\qquad \mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}\,\Lambda\,\mathrm{A}' - \mathrm{B}\,\mathrm{A}'\Lambda = -3\,\Lambda$

Comme $\mathrm{A}'\,\Lambda = \Lambda\,\mathrm{A}'$, on déduit de (11) que BA' est symétrique et commute avec Λ. On peut donc la diagonaliser et poser $\mathrm{BA}' = \Delta$

(11) devient $\qquad \mathrm{A}'^2 = 2\,\Delta\,\Lambda - 3\,\Lambda \qquad (15)$

En multipliant (1) par A' on obtient $\Delta^2 + 2\,\Delta - 3\,\mathrm{I} = 0$(16). On en déduit que Δ, B et A' sont inversibles. Comme Δ et A' commutent avec Λ, B commute avec Λ, et (1) s'écrit $-2\,\mathrm{A}' - \Delta\,\mathrm{A}' = 3\,\Lambda\,\mathrm{B}$ (17), d'où B et A' commutent. En remplaçant dans (14) la valeur de B tirée de (17) et en comparant avec (16) on trouve $\Delta = \mathrm{I}$.

De (15) on tire $\mathrm{A}'^2 = -\Lambda$, d'où λ_α est positif et de multiplicité paire pour tout α.

En posant $\mathrm{A}' = \Lambda^{1/2}\,\mathrm{J}$, on a $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$, $\mathrm{J}\,\Lambda = \Lambda\,\mathrm{J}$ et $\mathrm{B} = -\Lambda^{-1/2}\mathrm{J}$.