

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES BROS

D. IAGOLNITZER

Tuboïdes dans C^n et généralisation d'un théorème de Cartan et Grauert

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 3 (1976), p. 49-72

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_49_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TUBOÏDES DANS C^n ET GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE CARTAN ET GRAUERT

par J. BROS et D. IAGOLNITZER

SOMMAIRE

On introduit des domaines de $C_{(z)}^n \equiv \mathbb{R}_{(y)}^n \times \mathbb{R}_{(x)}^n$ appelés "tuboïdes". Un tuboïde au-dessus d'un domaine Ω de $\mathbb{R}_{(x)}^n$ est un domaine $D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x)$ de $C_{(z)}^n$ dont toutes les fibres $D_x \subset \mathbb{R}_{(y)}^n$ possèdent la propriété suivante : ou bien D_x contient l'origine, ou bien D_x admet l'origine comme point conique de sa frontière. On appelle "profil" du tuboïde D le fibré en cônes $\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x)$, où Λ_x est le cône de sommet l'origine dans $\mathbb{R}_{(y)}^n$ formé des demi-droites qui rencontrent D_x au voisinage de l'origine.

On montre dans la première partie que l'enveloppe d'holomorphie d'un tuboïde D de profil Λ contient nécessairement un tuboïde \hat{D} dont le profil $\hat{\Lambda}$ est l'enveloppe convexe par fibres de Λ (c'est-à-dire $\hat{\Lambda} = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \hat{\Lambda}_x)$, où $\hat{\Lambda}_x$ est l'enveloppe convexe de Λ_x).

Dans la seconde partie, indépendante de la première, on montre que pour tout domaine fibré en cônes *convexes* $\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x)$,

et pour tout tuboïde D de profil Λ , il existe un tuboïde D' contenu dans D , de même profil Λ , qui est un domaine d'holomorphie. Un cas particulier de ce résultat (obtenu pour $\Lambda = \Omega \times \mathbb{R}_{(y)}^n$) est le théorème de Cartan et Grauert [1] selon lequel tout domaine Ω de $\mathbb{R}_{(x)}^n$ admet une base de voisinages complexes qui sont des domaines d'holomorphie

PARTIE I

Précisons d'abord notre terminologie concernant les domaines de $C_{(z)}^n \equiv R_{(x)}^n \times R_{(y)}^n$ que nous utiliserons (*).

Soit Ω un domaine arbitraire de $R_{(x)}^n$. Dans la suite Λ désignera un domaine de $C_{(z)}^n$ à fibres (**) coniques au-dessus de Ω , soit :

$$\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x)$$

où, quel que soit x , Λ_x est un cône ouvert connexe non vide de sommet l'origine dans $R_{(y)}^n \setminus \{0\}$; à Λ est associé le domaine

$$\dot{\Lambda} = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \dot{\Lambda}_x)$$

de $R_{(x)}^n \times S_{(y)}^{n-1}$, où $\dot{\Lambda}_x$ désigne la trace de Λ_x sur la sphère unité $S_{(y)}^{n-1}$ de $R_{(y)}^n$.

DEFINITION 1. — On appelle *tuboïde de profil Λ au-dessus de Ω* tout domaine $D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x)$ de $C_{(z)}^n$ possédant les propriétés suivantes :

a) $D \setminus \Omega \subset \Lambda$

b) $\forall (x_0, \dot{y}_0) \in \dot{\Lambda}, \exists \mathcal{V}$, voisinage ouvert de (x_0, \dot{y}_0) dans

$$R_{(x)}^n \times S_{(y)}^{n-1} \quad \text{et} \quad \exists r > 0$$

tels que l'ouvert

$$E_{(x_0, \dot{y}_0)} = \{(x, y) ; y = \rho \dot{y} ; (x, \dot{y}) \in \mathcal{V} ; 0 < \rho < r\},$$

soit contenu dans D .

c) Lorsque $\Lambda_x = R_{(y)}^n \setminus \{0\}$, D_x contient l'origine.

(*) L'indice entre parenthèses dans $R_{(x)}^n, R_{(y)}^n, C_{(z)}^n$ etc. désigne les variables courantes de l'espace correspondant $R^{(n)}, C^{(n)}$, etc.

(**) Le mot "fibre" est utilisé ici au sens large : deux fibres $\Lambda_{x_1}, \Lambda_{x_2}$ ne sont pas nécessairement homéomorphes.

Remarques.

i) Il résulte de la propriété b) que pour tout point x de Ω , la fibre D_x est non vide et telle que son adhérence contienne l'origine. Par commodité, on appellera aussi Λ_x le profil de D_x ; Λ_x est le cône des demi-droites issues de l'origine qui rencontrent D_x au voisinage de l'origine.

ii) On peut remplacer b) par la propriété équivalente :

$b')$ pour tout domaine à fibres coniques Λ' tel que (*)

$$\dot{\Lambda}' \subset\subset \dot{\Lambda}, \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad \Lambda' \cap \{(x, y) ; |y| \leq r\} \subset D.$$

En effet $b)$ résulte trivialement de $b')$, et $b')$ se déduit de $b)$ en recouvrant le compact $\overline{\dot{\Lambda}'}$ par un nombre fini de voisinages \mathcal{V} du type introduit dans $b)$.

iii) Si D est un ouvert de C^n , non nécessairement connexe, satisfaisant aux conditions a), b), c) de la définition 1, il existe une composante connexe D_c de D qui est un tuboïde de profil Λ . Soit en effet D_c la réunion des ensembles $E_{(x,y)}$ introduits dans b), pour tous les points (x, y) de Λ . D_c est contenu dans D et satisfait aussi aux conditions a), b), c). De plus D_c est un domaine : pour s'en convaincre, considérons deux points $(x, y), (x', y') \in D_c$; si $y \neq 0$ et $y' \neq 0$, il existe un chemin γ dans $\dot{\Lambda}$ d'extrémités $(x, y), (x', y')$, donc un nombre fini de points (x_j, y_j) ($1 \leq j \leq \ell$) et d'ouverts correspondants :

$$E_j \equiv E_{(x_j, y_j)} = \{(x, y) ; y = \rho y_j ; (x, y_j) \in \mathcal{V}_j ; 0 < \rho < r_j\}$$

$$(E_j \subset D_c) \text{ tels que } \bigcup_{1 \leq j \leq \ell} \text{ recouvre } \gamma, (x, y) \in E_1, (x', y') \in E_\ell,$$

et $\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1} \neq \emptyset (\forall j : 1 \leq j \leq \ell)$. Il en résulte clairement que $\forall j : E_j \cap E_{j+1} \neq \emptyset$, et que par suite les points $(x, y), (x', y')$ sont connectés dans D_c . (Si $y = 0$ (resp. $y' = 0$), $(x, 0)$ est par hypothèse connecté à des points (x, ϵ) tels que $\epsilon \neq 0$). Cette remarque sera utilisée dans la fin de la démonstration du théorème 3.

(*) La notation $A \subset\subset B$ signifie que l'adhérence \overline{A} de A est compacte et contenue dans l'ouvert B .

DEFINITION 2. — On dira qu'un tuboïde D est semi-étoilé, si pour tout x dans Ω , la fibre D_x est semi-étoilée, c'est-à-dire :

$$y \in D_x \Rightarrow \lambda y \in D_x, \forall \lambda; 0 < \lambda \leq 1.$$

Il est aisé de vérifier à l'aide de la propriété b) ou b') que tout tuboïde de profil Λ contient un tuboïde semi-étoilé de même profil.

La proposition suivante sera utile :

PROPOSITION 1. — Soit $D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x)$ un domaine tel que,

i) toute fibre D_x est un domaine semi-étoilé de $\mathbb{R}^n(y)$

ii) Si $D_x \cup \{0\}$ est un voisinage de l'origine, D_x contient l'origine (c'est-à-dire est "étoilé").

Alors D est un tuboïde semi-étoilé.

Démonstration. — Pour tout $x \in \Omega$, soit Λ_x le cône des demi-droites issues de l'origine qui rencontrent D_x , et soit $\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x)$.

Pour tout point $(x_0, \dot{y}_0) \in \dot{\Lambda}$, il existe un point $(x_0, y_0 = r \dot{y}_0)$ de D (avec $r > 0$) et un voisinage \mathfrak{V} de ce point contenu dans D ; or \mathfrak{V} contient toujours un ensemble de la forme

$$\mathfrak{V}' = \{(x, y); y = r \dot{y}; (x, \dot{y}) \in \mathfrak{V}(x_0, \dot{y}_0)\},$$

où $\mathfrak{V}(x_0, \dot{y}_0)$ est un voisinage convenable de x_0, \dot{y}_0 dans $\mathbb{R}_{(x)}^n \times \mathbb{S}_{(y)}^{n-1}$. Ceci montre que $\mathfrak{V}(x_0, \dot{y}_0) \in \dot{\Lambda}$, donc que Λ est un ouvert; de plus comme toute fibre D_x est semi-étoilée, l'ensemble suivant

$$\mathfrak{V}'' = \{(x, y); y = \rho \dot{y}; (x, \dot{y}) \in \mathfrak{V}(x_0, \dot{y}_0); \forall \rho: 0 < \rho \leq r\},$$

est contenu dans D , ce qui établit la condition b) de la définition 1. Les conditions a) et c) sont trivialement satisfaites, de même que la connexité de Λ .

Si D est un tuboïde de profil Λ constant, c'est-à-dire de la forme $\Lambda = \Omega \times \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est un cône de sommet l'origine dans $\mathbb{R}_{(y)}^n$, on dira que D est un *tube local* au-dessus de Ω . Il est commode de considérer des tubes locaux de la forme $T = \Omega \times \Delta$, où Δ est un domaine semi-étoilé (non vide) de $\mathbb{R}_{(y)}^n$, de profil \mathcal{C} .

Le résultat suivant peut alors être énoncé :

THEOREME 1. — Soit $T = \Omega \times \Delta$ un tube local du type précédent, x_0 un point quelconque de Ω , et Ω' une boule ouverte de centre x_0 telle que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

L'enveloppe d'holomorphie de T contient nécessairement un tube local $T' = \Omega' \times \Delta'$, où Δ' est un domaine semi-étoilé de $R^n_{(y)}$, dont le profil est l'enveloppe convexe du profil de Δ .

Comme nous le montrons en Appendice, ce théorème est une conséquence d'un résultat démontré dans [2] (dernier théorème de la section 6). Il a d'autre part été démontré de façon purement géométrique dans [3] et [4] (dans ce dernier travail, comme corollaire d'un théorème de coïncidence des "valeurs au bord (*) de fonctions holomorphes se recollant loin du réel").

Nous nous proposons maintenant de déduire du théorème 1 une propriété générale de convexité de l'enveloppe d'holomorphie d'un tuboïde. Nous utiliserons pour cela les propositions auxiliaires suivantes :

PROPOSITION 2. — Soit D un tuboïde de profil Λ , au-dessus de Ω , x un point quelconque de Ω , et \mathcal{C} un cône ouvert connexe de sommet l'origine dans $R^n_{(y)}$, tel que :

$$\dot{\mathcal{C}} \subset\subset \dot{\Lambda}_x$$

(\mathcal{C} étant la trace de \mathcal{C} sur la sphère $S^n_{(y)}$).

Alors il existe un ouvert ω contenant le point x , et $\epsilon > 0$ tel que le tube local :

$$T = \omega \times \{y \in \mathcal{C}; |y| < \epsilon\}$$

soit contenu dans D .

Ceci résulte immédiatement de la propriété *b*) ou *b'*) des tuboïdes.

PROPOSITION 3. — Soit D un tuboïde de profil Λ au-dessus de Ω . Il existe un sous-ensemble F de $R^n_{(x)} \times S^{n-1}_{(y)}$ (fermé dans $\dot{\Lambda}$), tel que

(*) Valeur au bord étant pris ici au sens le plus général, c'est-à-dire ne présupposant pas de conditions de croissance au bord.

pour tout compact K contenu dans Ω , on ait :

a) $F|_K$ compact dans $\dot{\Lambda}$

b) $F|_K \neq \Phi$,

$F|_K$ désignant $F \cap \{(x, \dot{y}) ; x \in K, \dot{y} \in S^{n-1}\}$.

Démonstration. — $\forall x \in \Omega$, $\exists \omega_x$, voisinage ouvert de x et un cône ouvert \mathcal{C}_x tel que : $\omega_x \times \{\dot{y} \in \mathcal{C}_x\} \subset \dot{\Lambda}$. Soit $\{\omega_\lambda\}$ un sous recouvrement localement fini du recouvrement de Ω par la famille $\{\omega_x ; x \in \Omega\}$, $\{\mathcal{C}_\lambda\}$ la famille de cônes correspondante extraite de $\{\mathcal{C}_x ; x \in \Omega\}$. Alors l'ensemble $F = \bigcup_\lambda \omega_\lambda \times \{\dot{y} \in \mathcal{C}_\lambda\}$ satisfait aux propriétés a) et b).

PROPOSITION 4. — Soit D un tuboïde de profil Λ au-dessus de Ω . Pour tout point x dans Ω , il existe une suite croissante de cônes $\mathcal{C}_{m,x}$ tel que $\dot{\mathcal{C}}_{m,x} \subset \dot{\Lambda}_x$, $\bigcup_\lambda \mathcal{C}_{m,x} = \Lambda_x$, une suite correspondante de boules ouvertes $\omega_{m,x}$ de centre x telles que $\bigcap_m \omega_{m,x} = \{x\}$ et une suite (décroissante) de nombres $\epsilon_{m,x} > 0$ tels que les tubes locaux :

$$T_{m,x} = \omega_{m,x} \times \{y \in \mathcal{C}_{m,x} ; |y| < \epsilon_{m,x}\}$$

satisfassent les propriétés suivantes :

a) $\forall m, \forall x \in \Omega, T_{m,x} \subset D$.

b) $\forall m, m', \forall x, x' \in \Omega :$

$\omega_{mm',xx'} = \omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'} \neq \emptyset \Rightarrow T_{m,x} \cap T_{m',x'}$ a toutes ses fibres non vides au-dessus de $\omega_{mm',xx'}$.

Démonstration. — Le point x étant fixé, on peut toujours construire une suite de cônes ouverts $\mathcal{C}_{m,x}$ ($\dot{\mathcal{C}}_{m,x} \subset \dot{\Lambda}_x$) croissante par inclusion telle que $\bigcup_m \mathcal{C}_{m,x} = \Lambda_x$. D'après la proposition 2, il existe alors des suites correspondantes de boules ouvertes $\omega_{m,x}$, et de nombres $\epsilon_{m,x}$, telles que la condition a) soit satisfaite. Soit alors $F \subset D$ le fermé construit dans la proposition 3 ; montrons par un argument de compacité qu'à partir d'un certain rang $m \geq M(x)$, on a :

$$F|_{\omega_{m,x}} \subset \omega_{m,x} \times \dot{\mathcal{C}}_{m,x}. \quad (1)$$

Il suffit d'avoir choisi la suite $\{\omega_{m,x}\}$ décroissante (par inclusion) pour définir une suite décroissante de fermés : $G_m = \bar{\omega}_{m,x} \times \{S_{(y)}^{n-1} \setminus \mathcal{C}_{m,x}\}$, dont l'intersection est $G = \{x\} \times \{S_{(y)}^{n-1} - \hat{\Lambda}_x\}$. Comme G a une intersection vide avec tout compact $F \mid \bar{\omega}_{m,x}$ ($m \geq 1$), $\exists M(x)$ tel que $F \mid \bar{\omega}_{m,x} \cap G_m = \Phi$, $\forall m \geq M(x)$; l'inclusion (1) en découle. Pour tout point $x \in \Omega$, on restreint les suites $\{\omega_{m,x}\}$, $\{\mathcal{C}_{m,x}\}$, $\{\epsilon_{m,x}\}$ à la famille d'indices $\{m \geq M(x)\}$. On voit alors que si :

$$\omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'} \neq \phi$$

on a :

$$(\omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'}) \times (\mathcal{C}_{m,x} \cap \mathcal{C}_{m',x'}) \supset F \mid \omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'} \neq \phi$$

(cf. proposition 3) et par suite $T_{m,x} \cap T_{m',x'}$ a toutes ses fibres non vides au-dessus de $\omega_{m,m',x,x'}$. Ceci démontre la propriété b).

Remarque. — Le raisonnement précédent s'applique aussi dans le cas où $\hat{\Lambda}_x = S_{(y)}^{n-1}$; en effet dans ce cas la suite $\{\mathcal{C}_{m,x}\}$ est telle que $\mathcal{C}_{m,x} = \mathbf{R}_{(y)}^n$ dès que m est supérieur à une certaine valeur $M(x)$.

Nous sommes alors en mesure d'établir :

THEOREME 2. — *L'enveloppe d'holomorphie d'un tuboïde*

$$D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x),$$

de profil $\Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x)$ contient un tuboïde \hat{D} , de profil

$$\hat{\Lambda} = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \hat{\Lambda}_x),$$

dont toute fibre $\hat{\Lambda}_x$ est l'enveloppe convexe de Λ_x .

Démonstration. — Soit $\{T_{m,x}; x \in \Omega, m \in \mathbf{N}\}$ la famille de tubes locaux associés à D par le procédé de la proposition 4. Comme

$$\bigcup_{m \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{m,x} = \Lambda_x, \text{ le domaine } T = \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ m \in \mathbf{N}}} T_{m,x} \text{ est un tuboïde de profil}$$

Λ , contenu dans D .

Or d'après le théorème 1, pour tout tube local $T_{m,x}$ on peut en construire un autre $\hat{T}_{m,x} = \omega'_{m,x} \times \hat{\Delta}_{m,x}$ tel que toute fonction f holomorphe dans D , — donc dans $T_{m,x}$ — admette un prolongement analytique $\hat{f}_{m,x}$ dans $\hat{T}_{m,x}$; ici $\omega'_{m,x}$ ($\subset \omega_{m,x}$) est une boule de centre x , et $\hat{\Delta}_{m,x}$ admet pour profil l'enveloppe convexe (*) $\hat{C}_{m,x}$ de $C_{m,x}$; il résulte alors d'une propriété classique des enveloppes convexes que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{m,x} = \hat{\Lambda}_x$ (l'enveloppe convexe de $\hat{\Lambda}_x$), et que par suite le domaine :

$$\hat{D} = \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ m \in \mathbb{N}}} \hat{T}_{m,x}$$

est un tuboïde de profil $\hat{\Lambda}$.

Il nous reste à vérifier la propriété de monodromie suivante : tous les prolongements analytiques $\hat{f}_{m,x}$ de f définissent un prolongement analytique univalent \hat{f} de f dans le domaine \hat{D} .

a) Si $\hat{T}_{m,x} \cap \hat{T}_{m',x'} \neq \emptyset$, on a $\omega'_{m,x} \cap \omega'_{m',x'} \neq \emptyset$ donc

$$\omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'} \neq \emptyset,$$

et d'après la proposition 4 $T_{m,x} \cap T_{m',x'}$ a toutes ses fibres non vides (au-dessus de $\omega_{m,x} \cap \omega_{m',x'}$). Par suite

$$\Theta = T_{m,x} \cap T_{m',x'} \cap \hat{T}_{m,x} \cap \hat{T}_{m',x'}$$

est non vide, et dans cet ouvert, on a par construction :

$$\hat{f}_{m,x}|_{\Theta} = \hat{f}_{m',x'}|_{\Theta} = f|_{\Theta}.$$

b) D'autre part $\hat{T}_{m,x} \cap \hat{T}_{m',x'}$ est connexe, puisque $\omega'_{m,x} \cap \omega'_{m',x'}$ l'est, ainsi que $\hat{\Delta}_{m,x} \cap \hat{\Delta}_{m',x'}$ (comme intersection de deux ouverts semi-étoilés, de profils convexes) ; donc $\hat{f}_{m,x}$ et $\hat{f}_{m',x'}$ coïncident dans $\hat{T}_{m,x} \cap \hat{T}_{m',x'}$.

Par suite la famille $\{\hat{f}_{m,x}\}$ définit une fonction analytique (univalente) \hat{f} dans \hat{D} qui est un prolongement analytique de f ; ceci achève la démonstration du théorème.

(*) Lorsque $C_{m,x}$ est convexe, $\hat{T}_{m,x}$ peut être choisi identique à $T_{m,x}$.

PARTIE II

Le but de cette deuxième partie est de montrer que tout tuboïde D dont le profil Λ a toutes ses fibres convexes contient un tuboïde D' de même profil qui est un domaine d'holomorphie. La démonstration comportera deux étapes. On montrera d'abord dans la section 1 que D contient toujours un tuboïde D'' de même profil et dont toutes les fibres D''_x sont convexes ; ceci fera l'objet du lemme 1 ; on construira ensuite un domaine d'holomorphie $D' \subset D''$ qui est un tuboïde de même profil.

En vue de clarifier la présentation des faits géométriques, on introduira d'abord dans la section 2 la notion de "bipolaire sphérique" $\hat{\Delta}$ d'un domaine convexe semi-étoilé Δ de \mathbb{R}^n .

Alors que le bipolaire (au sens usuel) coïncide avec Δ (comme intersection de demi-espaces limités par les hyperplans d'appui à Δ), le bipolaire sphérique $\hat{\Delta}$ est toujours contenu dans Δ , comme intersection d'une famille de boules contenues dans les demi-espaces précédents ; cette famille est choisie de plus de façon telle que $\hat{\Delta}$ ait toujours même profil que Δ .

Dans la section 3, on construira explicitement le domaine d'holomorphie D' , comme une intersection de complémentaires de *sphères complexes*. Chacune de ces sphères possède la propriété de rencontrer l'espace $\mathbb{R}^n_{(x)}$ au plus en un point ; de plus l'ensemble des sphères de la famille utilisée qui passent par un point réel x donné, admet pour enveloppe dans la fibre $(x, \mathbb{R}^n_{(y)})$ le bipolaire sphérique \hat{D}''_x de D''_x . Il sera alors montré que D'_x est toujours contenu dans \hat{D}''_x et a même profil que \hat{D}''_x , donc que D'_x .

1. Remarquons tout d'abord qu'un tuboïde $D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x)$ ayant toutes ses fibres D_x convexes est semi-étoilé. En effet, d'après la définition 1 (a) et b)) $(x, y) \in D \Rightarrow (x, y) \in \Lambda$, profil de D ; donc $\exists r > 0$ tel que $\forall \rho ; 0 < \rho \leq r : (x, \rho y) \in D$; si D_x est convexe, il en résulte que $(x, \rho y) \in D$ pour tout $\rho \leq 1$ ($\rho > 0$) c'est-à-dire que D_x est semi-étoilé.

En vue de la démonstration du lemme 1, nous établirons la proposition suivante :

PROPOSITION 5. — Soit deux tuboïdes D, D' au-dessus des domaines respectifs Ω, Ω' , tel que :

$$\text{i) } \Omega' \subset\subset \Omega, \overline{D' \setminus \Omega'} \subset D$$

ii) le profil Λ (resp. Λ') de D (resp. D') a toutes ses fibres convexes, et l'on a : $\Lambda' \subset\subset \Lambda$

iii) D' est un domaine borné, éventuellement vide, dont toutes les fibres D'_x sont convexes ($\forall x \in \Omega'$).

— Alors pour tout domaine Λ'' à fibres coniques convexes, au-dessus d'un ouvert Ω'' tel que

$$\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega \quad \text{et} \quad \Lambda' \subset\subset \Lambda'' \subset\subset \Lambda,$$

il existe un tuboïde D'' de profil Λ'' tel que :

$$\text{a) } \forall x \in \Omega'', D''_x \text{ est convexe}$$

$$\text{b) } D' \subset D''$$

$$\text{c) } \overline{D'' \setminus \Omega''} \subset D.$$

Démonstration. — Etant donné $\rho > 0$, on désigne par T_ρ le tuboïde de profil Λ'' défini par :

$$T_\rho = \{z = x + iy; x \in \Omega'', y \in \Lambda''; |y| < \rho\}$$

et par D_ρ l'enveloppe convexe par fibres de $T_\rho \cup D'$: soit :

$$D_\rho = \bigcup_{x \in \Omega''} (x, \widehat{(T_\rho)_x \cup D'_x})$$

où par convention, on a posé $D'_x = \phi$, pour tout x dans $\Omega'' \setminus \Omega'$.

Pour tout point $(x, y) \in D_\rho$, il existe des ouverts

$$\mathfrak{V}_1 \subset\subset (T_\rho)_x, \quad \mathfrak{V}_2 \subset\subset D'_x$$

tels que $y \in \widehat{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2}$; il existe alors un voisinage ω de x tel que: $\omega \times \mathfrak{V}_1 \subset T_\rho, \omega \times \mathfrak{V}_2 \subset D'$; par suite $\mathfrak{W} = \omega \times (\widehat{\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2})$ est un voisinage de (x, y) contenu dans D_ρ , ce qui montre que D_ρ est un domaine. Comme $(T_\rho)_x$ et D'_x sont semi-étoilés (quel que soit x), il en est de même de $(D_\rho)_x$, et il découle alors de la Proposition 1 que D_ρ est un tuboïde semi-étoilé de profil Λ'' . Si on identifie le tuboïde D_ρ au domaine D'' de l'énoncé, on voit que les conditions a) et b) sont satisfaites. Montrons maintenant que si l'on choisit $\rho > 0$ suffisamment petit, la condition c) est également satisfaite.

D'après la condition $b')$ de la définition des tuboïdes, il existe $r > 0$ tel que l'ensemble :

$$E = \{(x, y) \in \bar{\Lambda}'' ; 0 < |y| < r\}$$

soit contenu dans D . D'autre part, d'après les hypothèses i) et iii) de l'énoncé, l'ensemble suivant $E' = \{(x, y) \in \bar{D}' ; |y| \geq r\}$ est un compact contenu dans D ; soit $\mathcal{V}(E')$ un voisinage ouvert E' tel que $\mathcal{V}(E') \subset\subset D$.

On considère alors la famille de compacts (les domaines D_ρ étant bornés) :

$$\{F_\rho = (\bar{D}_\rho \cap \{(x, y) \in \bar{\Lambda}'' ; |y| \geq r\}) \setminus \mathcal{V}(E') ; 0 < \rho \leq \rho_0\}$$

Cette famille est ordonnée par inclusion et du fait que

$$\bigcap_{0 < \rho \leq \rho_0} \bar{D}_\rho = \bar{D}',$$

on a :

$$\bigcap_{0 < \rho < \rho_0} F_\rho = E' \setminus \mathcal{V}(E') = \phi ;$$

par suite, il existe $\rho_1 > 0$ tel que : $F_{\rho_1} = \phi$, c'est-à-dire tel que :

$$\bar{D}_{\rho_1} \subset \{(x, y) \in \bar{\Lambda}'' ; |y| < r\} \cup \mathcal{V}(E'),$$

soit $\bar{D}_{\rho_1} \setminus \bar{\Omega}'' \subset E \cup \mathcal{V}(E') \subset D$, ce qui est la condition c) cherchée.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

LEMME 1. — *Etant donné un tuboïde D dont le profil Λ a toutes ses fibres convexes, il existe toujours un tuboïde D' à fibres convexes, qui soit contenu dans D et de même profil Λ .*

Démonstration. — Soit $\{\Lambda_p\}$ une suite croissante de profils au-dessus d'ouverts Ω_p ayant toutes leurs fibres convexes, et tels que :

$$\forall p ; \dot{\Lambda}_p \subset\subset \dot{\Lambda}_{p+1}$$

$$\bigcup_p \Lambda_p = \Lambda = \bigcup_{x \in \Omega} (x, \Lambda_x).$$

On va construire une suite croissante de tuboïdes D_p , de profils respectifs Λ_p tels que :

- i) D_p ait toutes ses fibres $(D_p)_x$ convexes ($\forall x \in \Omega_p$)
- ii) $\overline{D_p} \setminus \overline{\Omega_p} \subset D$.

Cette construction se fait par récurrence sur p , en appliquant la proposition 5, avec $D_0 = \phi$:

Supposons que l'on ait construit D_p satisfaisant aux conditions i) et ii) ; alors il existe un domaine $D_{p+1} \supset D_p$, qui est un tuboïde de profil Λ_{p+1} , satisfaisant aux mêmes conditions.

Soit alors $D' = \bigcup_p D_p$; la famille $\{D_p\}$ étant ordonnée par inclusion, le domaine D' a toutes ses fibres convexes semi-étoilées ; c'est donc un tuboïde semi-étoilé à fibres convexes et son profil est $\bigcup_p \Lambda_p$, c'est-à-dire Λ . De plus, grâce à la condition ii), on a :

$$D' \setminus \Omega \subset D.$$

Mais tous les points x de Ω qui appartiennent à D' sont tels que $\Lambda_x = \mathbf{R}_{(y)}^n$ et appartiennent donc à D d'après la définition 1 (c)) ; on a donc $D' \subset D$, ce qui achève la démonstration.

Nous terminons ce paragraphe par la proposition auxiliaire suivante, utile pour la suite :

PROPOSITION 6. — Soit dans $\mathbf{R}_{(x)}^N$ une famille de surfaces S_t de codimension $q < N$ dépendant continuellement de paramètres t qui varient dans un compact K d'un espace $\mathbf{R}_{(t)}^m$; supposons de plus que cette famille soit représentée globalement dans l'espace $\mathbf{R}_{(x)}^N \times \mathbf{R}_{(t)}^m$ par un ensemble :

$$E = \{(X, t) ; S_j(X, t) = 0 ; 1 \leq j \leq q ; t \in K\} ;$$

les S_j étant des fonctions continues.

Alors dans $\mathbf{R}_{(x)}^N$ le sous-ensemble $S = \bigcap_{t \in K} \mathbf{C} S_t$ est ouvert (*).

Démonstration. — Le complémentaire de S dans $\mathbf{R}_{(x)}^N$ est la projection $E_{(x)}$ de E sur $\mathbf{R}_{(x)}^N$. Soit alors une suite de points $X_p \in E_{(x)}$ qui converge vers un point \underline{X} ; il existe une suite correspondante $\{t_p \in K\}$ telle que $\forall p, X_p$ soit la projection d'un point $(X_p, t_p) \in E$; K étant compact, t_p admet un point d'accumulation \underline{t} , limite d'une

(*) Ici et dans toute la suite, la notation \mathbf{C} désigne le sous-ensemble complémentaire.

sous-suite convergente $\{t_q\}$; soit $\{\underline{X}_q\}$ la sous-suite correspondante de $\{X_p\}$ qui converge vers \underline{X} ; le point $(\underline{X}, \underline{t})$ est la limite de la suite $\{\underline{X}_q, \underline{t}_q\}$ dans $\mathbb{R}_{(X)}^N \times \mathbb{R}_{(t)}^M$, et comme E est fermé, on a $(\underline{X}, \underline{t}) \in E$, d'où $\underline{X} \in E_{(X)}$, ce qui montre que $E_{(X)}$ est fermé.

2. *Bipolaire sphérique**

Soit B la boule ouverte $\{y ; |y| < \frac{1}{2}\}$ de $\mathbb{R}_{(y)}^n$. A tout ouvert convexe semi-étoilé Δ de $\mathbb{R}_{(y)}^n$, tel que $\Delta \subset B$, on associe l'ensemble suivant $\tilde{\Delta}$ dans $S_{(\xi)}^{n-1} \times \bar{\mathbb{R}}_{(r)}^+$:

$$\tilde{\Delta} = \{(\xi, r) ; \xi \in S^{n-1} ; 0 \leq r \leq \frac{1}{2} ; \langle \xi, y \rangle + r > 0 ; \forall y \in \Delta\} ;$$

$\tilde{\Delta}$ est fermé dans $S^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$, puisque pour tout $y \in S^{n-1}$, l'intersection de demi-espace ouverts :

$$\bigcap_{\substack{y \in \Delta \\ \rho > 0}} \{(\xi, r) ; \langle \xi, y \rangle + r > 0 ; y = \rho \dot{y}\}$$

est fermée dans $\mathbb{R}_{(\xi, r)}^{n+1}$

Remarque. — Si $\Delta = \phi$, $\tilde{\Delta} = S^{n-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On définit dans $\mathbb{R}_{(y)}^n$ le *bipolaire sphérique* $\hat{\Delta}$ de Δ par :

$$\hat{\Delta} = \{y \in \mathbb{R}^n ; |y| < \frac{1}{2} ; \langle \xi, y \rangle + r - |y + r\xi|^2 \neq 0 ; \forall (\xi, r) \in \tilde{\Delta}\} \quad (1)$$

PROPOSITION 7. — *Pour tout ouvert convexe semi-étoilé $\Delta \subset B$, $\hat{\Delta}$ est un ouvert convexe semi-étoilé, contenu dans Δ , et de même profil que Δ ; en particulier si $\Delta = \phi$, $\hat{\Delta} = \phi$. (cf. fig. 1).*

(*) Dans toute la suite l'expression $\langle \xi, y \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n , soit $\langle \xi, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i y_i$, et on écrit aussi

$$|y|^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Démonstration.

a) $\hat{\Delta}$ est un ouvert : la famille de sphères $\sigma_{\xi r}$ d'équations : $\langle \xi, y \rangle + r - |y + r \xi|^2 = 0$ dépend continuellement des paramètres (ξ, r) variant dans le compact $\tilde{\Delta}$; d'après la proposition auxiliaire 6, l'intersection de la famille d'ouverts $\mathbf{C} \sigma_{\xi r}$ est un ouvert ; il en est alors de même de $\hat{\Delta}$, puisque d'après (1), on a :

$$\hat{\Delta} = \mathbf{B} \cap \left\{ \bigcap_{(\xi, r) \in \tilde{\Delta}} \mathbf{C} \sigma_{\xi r} \right\}.$$

b) $\hat{\Delta}$ est convexe, semi-étoilé et contenu dans Δ : d'après les propriétés classiques des polaires, on peut décrire l'ensemble $\tilde{\Delta}$ par :

$$\tilde{\Delta} = \{(\xi, r) ; \xi \in S^{n-1} ; h(\xi) \leq r \leq \frac{1}{2}\}, \quad (2)$$

où $h(\xi)$ est une fonction continue de ξ , définie par la propriété suivante : l'hyperplan $\Pi_{\xi, h(\xi)} = \{y ; \langle \xi, y \rangle + h(\xi) = 0\}$ est un hyperplan d'appui de Δ ; Δ est l'intersection des demi-espaces

$$\Pi_{\xi, h(\xi)}^+ = \{y ; \langle \xi, y \rangle + h(\xi) > 0\},$$

pour ξ variant dans S^{n-1} .

D'autre part, on vérifie aisément que :

$$\forall \xi \in S^{n-1} : \left(\bigcap_{h(\xi) \leq r \leq \frac{1}{2}} \mathbf{C} \sigma_{\xi r} \right) \cap \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\xi, h(\xi)} \cap \mathbf{B},$$

où $\mathbf{B}_{\xi, h(\xi)}$ est la boule ouverte de frontière $\sigma_{\xi, h(\xi)}$, et que l'on a :

$$\forall \xi \in S^{n-1} \quad \mathbf{B}_{\xi, h(\xi)} \subset \Pi_{\xi, h(\xi)}^+.$$

Il en résulte que :

$$\hat{\Delta} = \mathbf{B} \cap \left(\bigcap_{\xi \in S^{n-1}} \mathbf{B}_{\xi, h(\xi)} \right) \subset \bigcap_{\xi \in S^{n-1}} \Pi_{\xi, h(\xi)}^+ = \Delta.$$

(Si $\Delta = \phi$, $h = 0$, et $\hat{\Delta} = \phi$).

Cette expression montre également que $\hat{\Delta}$ est convexe semi-étoilé, comme intersection d'ensembles convexes semi-étoilés.

c) $\hat{\Delta}$ a même profil que Δ : Soit \mathcal{C} le profil de Δ et $\tilde{\mathcal{C}}$ le polaire de \mathcal{C} ; $\forall \xi \in \tilde{\mathcal{C}}$ (trace de $\tilde{\mathcal{C}}$ sur S^{n-1}) on a $h(\xi) = 0$, et la boule

$B_{\xi,0}$ correspondante est tangente à $\Pi_{\xi,0}$ à l'origine ; par suite l'ouvert convexe semi-étoilé $\bigcap_{\xi \in \tilde{e}} B_{\xi,0}$ a même profil que $\bigcap_{\xi \in \tilde{e}} \Pi_{\xi,0}^+$ c'est-à-dire \tilde{e} .

Pour tout point $\dot{y} \in \tilde{e}$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \quad 0 < \lambda \leq \alpha : \lambda \dot{y} \in \bigcap_{\xi \in \mathfrak{V}(\tilde{e})} B_{\xi,0}, \tag{3}$$

où $\mathfrak{V}(\tilde{e})$ est un voisinage suffisamment petit de \tilde{e} dans $S_{(\xi)}^{n-1}$. Comme de plus on a toujours $B_{\xi,0} \subset B_{\xi,h(\xi)}$ (puisque $h(\xi) > 0$), on peut remplacer (3) par

$$\lambda \dot{y} \in \bigcap_{\xi \in \mathfrak{V}(\tilde{e})} B_{\xi,h(\xi)}. \tag{4}$$

D'autre part, pour $\xi \notin \mathfrak{V}(\tilde{e})$, $h(\xi)$ reste supérieur à un nombre fixe $r_0 > 0$ (puisque h est continue et ne s'annule que sur \tilde{e}) ; par suite l'ensemble $\bigcap_{\xi \in S^{n-1} \setminus \mathfrak{V}(\tilde{e})} B_{\xi,h(\xi)}$ contient la boule de rayon r_0 centrée à l'origine, et on en déduit (compte tenu de (4)) que pour $\lambda > 0$ suffisamment petit, le point $\lambda \dot{y}$ appartient à

$$\bigcap_{\xi \in S^{n-1}} B_{\xi,h(\xi)},$$

c'est-à-dire à $\hat{\Delta}$; ceci démontre que $\hat{\Delta}$ a même profil que Δ , et la proposition 7 est établie.

3. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer.

THEOREME 3. — *Etant donné un tuboïde D dont le profil Λ a toutes ses fibres convexes, il existe toujours un tuboïde D' contenu dans D et de même profil Λ qui est un domaine d'holomorphie.*

Démonstration. — D'après le lemme 1, on peut toujours supposer que D a toutes ses fibres convexes, ce que nous ferons ; nous nous ramenons aussi au cas où D est contenu dans le tube

$$\Theta = \left\{ (x, y) ; |y| < \frac{1}{2} \right\}$$

Introduisons la famille de sphères complexes :

$$S_{a,\eta,\rho} = \{z \in C^n ; \langle \eta \cdot (z - a + i\rho\eta) \rangle + i(z - a + i\rho\eta)^2 = 0\}$$

où $a \in \mathbf{R}^n, \eta \in S^{n-1}, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2},$

et $(z - a + i\rho\eta)^2 \equiv \sum_{j=1}^n (z_j - a_j + i\rho\eta_j)^2.$

Ces sphères possèdent les propriétés suivantes (cf. aussi fig. 2) :

i) La trace de $S_{a\rho}$ dans $\{a + i\mathbf{R}_{(y)}^n\}$ est la sphère réelle $\sigma_{\eta\rho}$ d'équation :

$$\langle \eta, y \rangle + \rho - |y + \rho\eta|^2 = 0.$$

ii) $\forall x \neq a,$ la trace de $S_{a\rho}$ dans $\{x + i\mathbf{R}_{(y)}^n\}$ appartient à la sphère d'équation :

$$\langle \eta, y \rangle + \rho + |x - a|^2 - |y + \rho\eta|^2 = 0.$$

et par suite on a :

$$S_{a\rho} \cap \{x + i\mathbf{R}_{(y)}^n\} \subset \left\{ (x, y) ; |y| > \sqrt{|x - a|^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \right\}. \quad (5)$$

Considérons maintenant dans $\mathbf{C}_{(z)}^n$ l'ensemble suivant Γ associé au tuboïde $D = \bigcup_{x \in \Omega} (x, D_x)$:

$$\Gamma = \bigcap_{\substack{a \in \mathbf{R}^n \\ (\eta, \rho) \in \tilde{D}_a}} (\mathbf{C} S_{a\rho}) \cap \Theta \quad (6)$$

Nous allons démontrer que Γ possède les propriétés suivantes :

a) Γ est un ouvert d'holomorphic dans \mathbf{C}^n

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Gamma$; d'après (6), on a en particulier :

$$z_0 \in \bigcap_{\substack{a \in \mathbf{R}^n \\ |a - x_0| \leq 2 \\ (\eta, \rho) \in \tilde{D}_a}} (\mathbf{C} S_{a\rho}) \cap \Theta. \quad (7)$$

Or dans $\mathbf{R}_{(x,y)}^{2n}$, la famille de surfaces

$$\{S_{a\rho} ; |a - x_0| \leq 2 ; (\eta, \rho) \in \tilde{D}_a\}$$

(dont les paramètres varient dans un ensemble compact) satisfait aux hypothèses de la proposition 6, et par suite le second membre

de (7) est un ouvert. Soit alors

$$\mathcal{V} = \{z = x + iy ; |x - x_0| < \epsilon ; y \in \mathcal{V}(y_0)\}$$

un voisinage de z_0 contenu dans cet ouvert, $\mathcal{V}(y_0)$ étant un voisinage approprié de y_0 dans $\mathbf{R}_{(y)}^n$; choisissant de plus $\epsilon < 1$, on vérifie aisément que :

$$\forall z = x + iy \in \mathcal{V} \quad , z \in \bigcap_{\substack{a \in \mathbf{R}^n \\ |a-x| \leq 1 \\ (\eta, \rho) \in \tilde{D}_a}} (\mathbf{C} S_{a\eta\rho}) \cap \Theta. \quad (8)$$

D'autre part, la condition $z \in \Theta$ (c'est-à-dire $|y| < \frac{1}{2}$) implique en raison de l'inclusion (5) :

$$z \in \bigcap_{\substack{a \in \mathbf{R}^n \\ |a-x| \geq 1 \\ (\eta, \rho) \in \tilde{D}_a}} (\mathbf{C} S_{a\eta\rho}) \quad (9)$$

De (8) et (9) il résulte que $\mathcal{V} \subset \Gamma$, ce qui montre que Γ est ouvert.

Le fait que Γ soit un ouvert d'holomorphic résulte de sa définition (6) comme intersection d'ouverts d'holomorphic [5].

b) Γ est contenu dans D

D'après la proposition 7, l'ensemble suivant :

$$\hat{D} = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} (x, \hat{D}_x)$$

est contenu dans D ; en effet $\forall x \in \Omega$, on a

$$\hat{D}_x \subset D_x, \quad \text{et} \quad \forall x \notin \Omega, \hat{D}_x = \phi.$$

Montrons maintenant que $\Gamma \subset \hat{D}$:

posant : $\Gamma = \bigcup_{x \in \mathbf{R}^n} (x, \Gamma_x)$, on peut écrire d'après (6) :

$$\forall x_0 : \Gamma_{x_0} \subset \bigcap_{(\eta, \rho) \in \tilde{D}_{x_0}} (\mathbf{C} S_{x_0\eta\rho}) \Big|_{x=x_0} \cap \left\{ y ; |y| < \frac{1}{2} \right\}$$

soit, d'après la propriété i) des sphères $S_{a\eta\rho}$:

$$\forall (\eta, \rho) \in \tilde{D}_{x_0}, \Gamma_{x_0} \subset \left\{ y ; \langle \eta, y \rangle + \rho - |y + \rho \eta|^2 \neq 0, \right\}$$

soit encore, d'après la définition (1) du bipolaire sphérique \hat{D}_{x_0} de D_{x_0} : $\Gamma_{x_0} \subset \hat{D}_{x_0}$; en particulier si $x_0 \notin \Omega$, $\Gamma_{x_0} = \phi$.

c) *Il existe une composante connexe de Γ qui est un tuboïde de même profil Λ que D*

Nous allons vérifier que Γ satisfait aux trois conditions de la définition 1 :

– Tout d'abord il résulte du paragraphe b) précédent que $\Gamma \setminus \Omega \subset D \setminus \Omega \subset \Lambda$.

– Soit maintenant $(x_0, \dot{y}_0) \in \dot{\Lambda}$; comme D est un tuboïde de profil Λ , il existe $\mathcal{U}(x_0)$ voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^n , $\mathcal{V}(\dot{y}_0)$ voisinage de \dot{y}_0 dans S^{n-1} , et $r >$ tels que :

$$\{(x, y) ; x \in \mathcal{U}(x_0) ; y \in \Delta\} \subset D,$$

où l'on a posé :

$$\Delta = \{y \in \mathbb{R}^n ; y = \rho \dot{y} ; \dot{y} \in \mathcal{V}(\dot{y}_0) ; 0 < \rho < r\}.$$

Considérons alors l'ensemble :

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Theta \\ \text{où} \quad \Gamma_1 &= \bigcap_{\substack{a \in \mathcal{U}(x_0) \\ (\eta, \rho) \in \tilde{\Delta}}} \mathbf{C} S_{a\eta\rho} \\ \Gamma_2 &= \bigcap_{\substack{a \notin \mathcal{U}(x_0) \\ (\eta, \rho) \in \tilde{\Delta}_a}} \mathbf{C} S_{a\eta\rho}. \end{aligned}$$

Γ' est contenu dans Γ , puisque $\forall a \in \mathcal{U}(x_0)$, on a : $\Delta \subset D_a$ et par suite $\tilde{\Delta} \supset \tilde{\Delta}_a$.

Il résulte des propriétés i) et ii) des sphères $S_{a\eta\rho}$ et de la définition (1) du bipolaire sphérique $\hat{\Delta}$ de Δ que :

$$\text{i) } \mathcal{U}(x_0) \times \hat{\Delta} \subset \Gamma_1$$

$$\text{ii) } \Gamma_2 \text{ contient un voisinage complexe de } \mathcal{U}(x_0).$$

Comme $\hat{\Delta}$ a même profil que Δ , il existe donc un voisinage $\mathcal{V}'(\dot{y}_0)$ de \dot{y}_0 (contenu dans $\mathcal{V}(\dot{y}_0)$), un voisinage $\mathcal{U}'(x_0)$ de x_0 (contenu dans $\mathcal{U}(x_0)$), et un nombre $r' > 0$ tels que l'ensemble :

$$\{(x, y); x \in \mathcal{U}'(x_0); y = \rho \dot{y}; \dot{y} \in \mathcal{R}'(\dot{y}_0); 0 < \rho < r'\}$$

soit contenu dans Γ' , donc dans Γ .

Ceci démontre que Γ satisfait à la deuxième condition de la définition 1. La troisième condition est également satisfaite ; en effet si $\Lambda_{x_0} = \mathbf{R}_{(y)}^n$, l'ensemble Δ construit ci-dessus peut être choisi de façon à contenir l'origine ; il en est alors de même de $\hat{\Delta}$, et par suite le point $(x_0, 0)$ appartient à Γ' , donc à Γ .

Pour achever la démonstration (si éventuellement Γ n'était pas connexe) nous nous appuyons sur la remarque iii), donnée à la suite de la définition des tuboïdes : comme Γ est un ouvert satisfaisant aux trois conditions a), b), c) de la définition 1, Γ contient une composante connexe Γ_c qui est un tuboïde de profil Λ . Comme de plus Γ est un ouvert d'holomorphic, Γ_c est un *domaine* d'holomorphic satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé, et le théorème est établi.

APPENDICE

Considérons un tube local $T = \Omega \times \Delta$, où Δ est un domaine semi-étoilé (non vide) de $\mathbf{R}_{(y)}^n$, de profil \mathcal{C} ; soit x_0 un point quelconque de Ω , et Ω' une boule ouverte quelconque de centre x_0 telle que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

PROPOSITION A-1. — *Toute fonction f holomorphe dans T , à valeurs au bord C^∞ sur Ω , admet un prolongement analytique (univalent) dans un tube local T' de la forme :*

$$T' = \Omega' \times \Delta'$$

où Δ' est un domaine semi-étoilé de $\mathbf{R}_{(y)}^n$, dont le profil $\hat{\mathcal{C}}$ est l'enveloppe convexe de \mathcal{C} .

Ce résultat est une conséquence immédiate du dernier théorème de la section 6 de [2], comme nous l'expliquons maintenant.

Soit Ω_α une boule ouverte de la forme :

$$\{x ; \Phi(x) \equiv (x - x_0)^2 < \alpha\},$$

telle que : $\Omega' \subset\subset \Omega_\alpha \subset\subset \Omega$. Pour tout point b dans \mathbb{R}^n tel que

$$|b| < 1/2 \sqrt{\alpha},$$

on appelle Γ_b la partie connexe (bornée) de la variété :

$$y + b (\operatorname{Re} \Phi(x + iy) - \alpha) = 0$$

$$\operatorname{Re} \Phi(x + iy) - \alpha < 0$$

dont la frontière est la sphère $\partial \Omega_\alpha$.

On vérifie sans difficulté qu'il existe un domaine B semi-étoilé de \mathbb{R}^n de profil \mathcal{C} tel que Γ_b appartienne à T , pour tout b dans B (par exemple $B = \left\{ b \in \mathbb{R}^n ; |b| < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} ; 2\alpha b \in \Delta \right\}$). Soit alors $T_{B\Phi\alpha} = \bigcup_{b \in B} \Gamma_b$. Il résulte du théorème de [2] cité précédemment (*) que la fonction f se prolonge analytiquement dans $T_{\hat{B}\Phi\alpha}$, où \hat{B} est l'enveloppe convexe de B dans \mathbb{R}^n ; \hat{B} admet comme profil l'enveloppe convexe $\hat{\mathcal{C}}$ de \mathcal{C} .

La proposition A-1 résulte alors du fait qu'on peut toujours inclure dans $T_{\hat{B}\Phi\alpha}$ un tube local $T' = \Omega' \times \Delta'$, où Δ' admet pour profil $\hat{\mathcal{C}}$ (de plus le prolongement de f est univalent puisque $T' \cap T$ est connexe).

Remarque. — Le théorème de [2] utilisé ici ayant été démontré pour une classe de fonction Φ plus générales que $\Phi(x) \equiv (x - x_0)^2$, la proposition A-1 s'étend de façon analogue au cas où Ω' est un domaine quelconque, tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$. Le cas sphérique auquel nous nous sommes limités ici par souci de simplicité est cependant suffisant pour les besoins de cet article.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il nous reste maintenant à étendre la proposition A-1 à la classe de *toutes* les

(*) Pour la démonstration de ce théorème, on a utilisé dans [2] une représentation de Fourier généralisée de f dont les propriétés de décroissance exponentielle sont caractéristiques du domaine d'analyticité de f , le polaire de B fournissant l'indicatrice de décroissance. Le résultat provient alors du fait que B et \hat{B} ont même polaire.

fonctions f holomorphes dans T (sans restriction sur leur comportement près de Ω). Nous démontrons d'abord :

PROPOSITION A-2. — *Etant donné Ω, Ω' comme précédemment, soit Δ un domaine semi-étoilé dont le profil \mathcal{C} est étoilé par rapport à un de ses points $\hat{u} \in S^{n-1}$; alors l'enveloppe d'holomorphic de $T = \Omega \times \Delta$ contient un tube local $T' = \Omega' \times \Delta'$, où Δ' a pour profil $\hat{\mathcal{C}}$.*

Démonstration — Soit une suite \mathcal{C}_m de cônes ouverts de sommet l'origine, étoilés par rapport à \hat{u} , tels que

$$\forall m, \hat{u} \in \dot{\mathcal{C}}_m \subset \subset \dot{\mathcal{C}}_{m+1} \subset \subset \dot{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad \bigcup_m \mathcal{C}_m = \mathcal{C} ;$$

par définition du profil, il existe pour tout m un nombre $r_m > 0$ tel que le domaine :

$$\Delta_m = \{y \in \mathbb{R}^n ; y \in \mathcal{C}_m ; |y| < r_m\}$$

appartienne à Δ ; par commodité, r_m est choisi de façon telle que $\bar{\Delta}_m \setminus \{0\} \subset \Delta$.

Pour chaque valeur de m , nous introduisons aussi une famille de domaines $\{\Delta_{m,\lambda} ; 0 < \lambda \leq 1\}$; chaque domaine $\Delta_{m,\lambda}$ est le transformé de Δ_m par l'homothétie de centre $r_m \hat{u} (\in \partial \Delta_m)$ et de rapport λ ; comme \mathcal{C}_m est étoilé par rapport à \hat{u} , Δ_m est semi-étoilé par rapport au point $r_m \hat{u}$, et l'on a donc

$$\forall \lambda \leq 1 : \Delta_{m,\lambda} \subset \Delta_m \quad (\Delta_{m,1} \equiv \Delta_m)$$

$$\forall \lambda < 1 : \Delta_{m,\lambda} \cap \partial \Delta_m = \{r_m \hat{u}\} \in \Delta,$$

d'où il résulte que : $\Delta_{m,\lambda} \subset \subset \Delta$.

Etant donné une fonction f holomorphe dans T , considérons sa restriction $f_{m,\lambda}$ au "tube local translaté"

$$T_{m,\lambda} = \Omega \times \Delta_{m,\lambda}$$

$f_{m,\lambda}$ admet une valeur au bord analytique (donc C^∞) sur l'"arête" $\Omega + i r_m (1 - \lambda) \hat{u}$ de $T_{m,\lambda}$, et par suite de la proposition A-1, $f_{m,\lambda}$ admet un prolongement analytique $\hat{f}_{m,\lambda}$ dans un tube local $T'_{m,\lambda} = \Omega' \times \Delta'_{m,\lambda}$, où $\Delta'_{m,\lambda}$ est un domaine semi-étoilé par rapport

au point $r_m(1-\lambda)\dot{u}$, et dont le profil (en ce point) est le cône

$$\hat{\mathcal{C}}_m + r_m(1-\lambda)\dot{u}$$

($\hat{\mathcal{C}}_m$ étant l'enveloppe convexe de \mathcal{C}_m).

Les domaines $T'_{m,\lambda}$ sont tels que :

$$\forall \lambda_1 < \lambda_2 < 1 ; T'_{m,\lambda_1} \subset T'_{m,\lambda_2}$$

et
$$\bigcup_{0 < \lambda < 1} T'_{m,\lambda} \equiv T'_m = \Omega' \times \Delta'_m,$$

où Δ'_m est un domaine semi-étoilé (par rapport à l'origine) et de profil $\hat{\mathcal{C}}_m$. Il en résulte que les $\hat{f}_{m,\lambda}$ admettent un prolongement analytique commun \hat{f}_m dans T'_m .

Comme $\bigcup_m \hat{\mathcal{C}}_m = \hat{\mathcal{C}}$, et que $\forall m_1, m_2, \hat{f}_{m_1} = \hat{f}_{m_2}$ dans $T'_{m_1} \cap T'_{m_2}$ (connexe non vide), il en résulte que les \hat{f}_m admettent un prolongement commun \hat{f} dans un tube local :

$$T' = \Omega' \times \Delta'$$

où Δ' est semi-étoilé, et de profil $\hat{\mathcal{C}}$; \hat{f} est bien un prolongement de f (puisque $\hat{f} = f$ dans $T \cap T'$, connexe non vide) et la proposition A-2 est donc établie.

PROPOSITION A-3. — *Le résultat de la proposition A-2 s'étend au cas où Δ est la réunion d'un nombre fini p de domaines Δ_i semi-étoilés, de profils convexes \mathcal{C}_i .*

Démonstration. — Par récurrence sur p (le résultat étant trivialement vrai pour $p = 1$).

Si la propriété est vraie pour la réunion de $(p-1)$ domaines, f se prolonge analytiquement dans $T^{(p-1)} = \Omega'' \times \Delta^{(p-1)}$, où Ω'' est une boule ouverte arbitraire de centre x_0 telle que $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$, et $\Delta^{(p-1)}$ est un domaine semi-étoilé dont le profil est le cône convexe :

$$\mathcal{C}^{(p-1)} = \widehat{\bigcup_{1 \leq i \leq p-1} \mathcal{C}_i}.$$

Considérons alors le tube local :

$$T'' = \Omega'' \times (\Delta^{(p-1)} \cup \Delta_p) ;$$

le profil de $\Delta^{(p-1)} \cup \Delta_p$ (étant l'union des cônes *convexes* $\mathcal{C}^{(p-1)}$ et \mathcal{C}_p) est étoilé par rapport à tout point de $\mathcal{C}^{(p-1)} \cap \mathcal{C}_p$, et la proposition A-2 fournit un prolongement analytique de f dans un tube local $T' = \Omega' \times \Delta'$, où Δ' admet pour profil $\mathcal{C}^{(p)} = \widehat{\bigcup_{1 \leq i < p} \mathcal{C}_i}$, ce qui établit la proposition A-3.

Soit maintenant $T = \Omega \times \Delta$, où Δ est un domaine semi-étoilé quelconque, de profil \mathcal{C} ; on introduit alors une suite de cônes ouverts \mathcal{C}_m de sommet l'origine tels que :

$$\forall m \quad \dot{\mathcal{C}}_m \subset \subset \dot{\mathcal{C}}_{m+1}, \quad \bigcup_m \mathcal{C}_m = \mathcal{C},$$

et pour chaque valeur de m un recouvrement de \mathcal{C}_m par un nombre fini de cônes convexes \mathcal{C}_{mi} tels que

$$\dot{\mathcal{C}}_m \subset \dot{\mathcal{C}}'_m = \bigcup_i \dot{\mathcal{C}}_{mi} \subset \dot{\mathcal{C}}_{m+1}$$

Posant alors

$$\Delta_m = \Delta \cap \mathcal{C}'_m,$$

$$T_m = \Omega \times \Delta_m,$$

la proposition A-3 montre que $f_m = f|_{T_m}$ admet un prolongement analytique \hat{f}_m dans un tube local $T'_m = \Omega' \times \Delta'_m$, où Δ'_m admet pour profil l'enveloppe convexe $\hat{\mathcal{C}}'_m$ de \mathcal{C}'_m .

Comme $\bigcup_m \hat{\mathcal{C}}'_m = \hat{\mathcal{C}}$ (avec $\hat{\mathcal{C}}'_{m_1} \subset \hat{\mathcal{C}}'_{m_2} \forall m_1, m_2$) un raisonnement analogue à celui utilisé à la fin de la démonstration de la proposition A-2 montre que f admet un prolongement analytique dans un tube local $T' = \Omega' \times \Delta'$, où Δ' est un domaine semi-étoilé de profil \mathcal{C} ; ceci achève la démonstration du théorème 1.

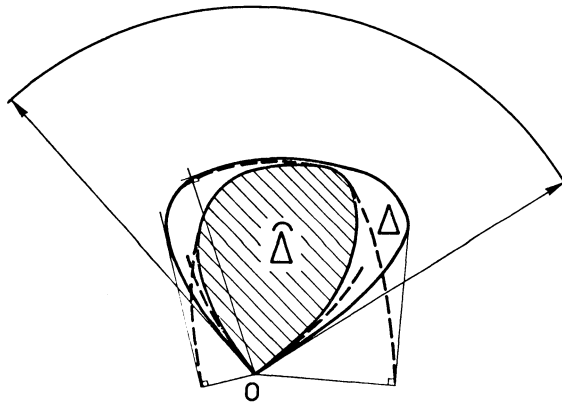


Fig. 1 – Bipolaire sphérique $\hat{\Delta}$ de Δ

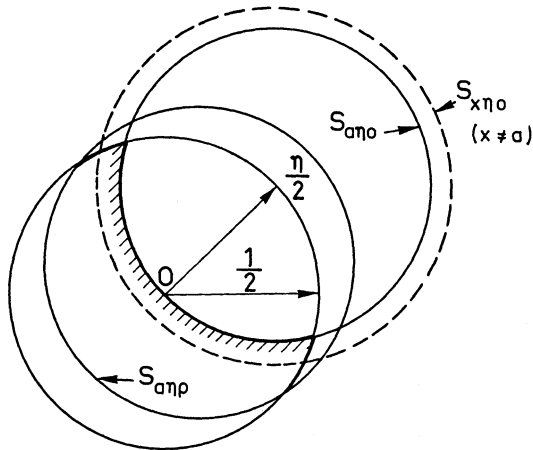


Fig. 2 – Situation dans la fibre $(a, \mathbb{R}^n_{(y)})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. GRAUERT, *Ann. Math.*, série 2, 68, (1958), 460-472 ; cette propriété a d'abord été démontrée pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ par H. Cartan, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957) 77-100.
- [2] J. BROS et D. IAGOLNITZER, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, Vol. XVIII n° 2 (1973) 147-184. et Proc. Marseille Meeting on Renormalization theory (june 1971).
- [3] H. KOMATSU, A local version of Bochner's tube theorem, *Journal Fac. of Science*, Tokyo, I-A 19 (1972), 201-214.
- [4] E. ANDRONIKOF, "Valeurs au bord de fonctions holomorphes se recollant "loin du réel". Thèse (1974), Université Paris-Nord-St-Denis (Départ. de Mathématiques)
- [5] cf. par exemple : P. LELONG, *Cours sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes* (Saclay, 1960).

Manuscrit reçu le 4 février 1975

Proposé par B. Malgrange.

J. BROS et D. IAGOLNITZER,
 Service de Physique Théorique
 Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
 B.P.2
 91190 – Gif-sur-Yvette.