

NESSIM SIBONY

## **Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de $C^n$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 26, n° 2 (1976), p. 71-99

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1976\\_\\_26\\_2\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_71_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE DANS UN DOMAINE D'HOLOMORPHIE DE $\mathbb{C}^n$

par Nessim SIBONY

---

## 1. Introduction.

Soit  $\Omega$  un domaine d'holomorphie dans  $\mathbb{C}^n$  et soit  $\omega$  une fonction s.c.i. définie dans  $\Omega$ , à valeurs réelles strictement positives.  $H^p(\Omega, \omega)$  désignera l'espace des fonctions  $f$ , holomorphes dans  $\Omega$ , telles que  $\int |f|^p(z)\omega(z) d\lambda(z) < +\infty$ ,  $\lambda$  étant la mesure de Lebesgue de  $\Omega$  et  $1 \leq p < \infty$ . On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p(z)\omega(z) d\lambda(z) \right)^{1/p}.$$

$H^\infty(\Omega, \omega)$  désignera l'espace des fonctions  $f$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que  $\omega(z)|f(z)|$  tend vers zéro quand  $z$  tend vers le bord de  $\Omega$ , on le munit de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \Omega} \omega(z)|f(z)|.$$

Nous noterons ces espaces  $H^p(\omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , lorsque  $\Omega = \mathbb{C}^n$ . Ce sont des espaces de Banach.

On se pose le problème de l'approximation des fonctions de  $H^p(\Omega, \omega)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , par des fonctions holomorphes dans des ouverts contenant strictement le domaine  $\Omega$  ou bien par des fonctions holomorphes à croissance donnée, par exemple des polynômes.

Un tel problème a été étudié par B. Taylor dans [12] lorsque  $\Omega = \mathbb{C}^n$ . Il a donné une condition suffisante pour approcher les fonctions de  $H^2(\omega)$ , par des fonctions à croissance donnée,

mais pour une topologie plus faible que celle de  $H^2(\varpi)$ ; c'est celle d'un espace  $H^2(\varpi_1)$ ,  $\varpi_1 < \varpi$ .

Le problème d'approximation pour des algèbres bornologiques de fonctions holomorphes a été étudié par J.-P. Ferrier [4], [5], qui utilise pour cela le calcul symbolique de Waelbroeck.

Nous avons besoin de quelques notations pour introduire ce problème.

Étant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{C}^n$ , nous noterons  $d_\Omega(z)$  la distance au complémentaire de  $\Omega$  soit  $d_\Omega(z) = \inf_{z' \notin \Omega} |z - z'|$ . Posons  $\delta_0(z) = (1 + |z|^2)^{-1/2}$  où  $|z|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$  et

$$\delta_\Omega(z) = \min [d_\Omega(z), \delta_0(z)].$$

Soit  $\delta$  une fonction lipschitzienne positive dans  $\mathbf{C}^n$ ; posons  $\Omega = \{z | \delta(z) > 0\}$ . On suppose  $\delta \leq \delta_0$  et  $-\log \delta$  plurisousharmonique (p.s.h.) dans  $\Omega$ .

Notons  $E(k, \delta)$  l'espace des fonctions  $f$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que  $\|f\|_k = \sup |f(z)| \delta^k(z) < \infty$  où  $k$  est

un entier positif et  $\mathcal{O}(\delta) = \bigcup_k E(k, \delta)$ . L'espace  $\mathcal{O}(\delta)$  a une structure naturelle d'algèbre bornologique [5]. Un sous-espace  $F$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$  pour cette structure si pour tout  $k$ , il existe un entier  $k'$  tel qu'on puisse approcher les éléments de  $E(k, \delta)$  par des éléments de  $F$ , pour la topologie de  $E(k', \delta)$ . J.-P. Ferrier [4] a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\mathcal{O}(\delta')$  soit dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$ , au sens précédent lorsque  $\delta' \geq \delta$ , si on identifie  $\mathcal{O}(\delta')$  à un sous-espace de  $\mathcal{O}(\delta)$ .

Nous généralisons la technique de B. Taylor pour étudier l'approximation dans un domaine d'holomorphie de  $\mathbf{C}^n$ , nous essayons de faire l'approximation pour la norme de l'espace de départ. Nous donnons également des conditions nécessaires d'approximation, ce qui nous permet de retrouver, sans avoir à utiliser le calcul symbolique de Waelbroeck, les résultats de [4] sur les algèbres  $\mathcal{O}(\delta)$ . La technique utilisée permet en particulier de préciser un entier  $k'$  tel que l'espace  $\mathcal{O}(\delta') \cap E(k', \delta)$  soit dense dans l'espace  $E(k, \delta)$  muni de la topologie induite par  $E(k', \delta)$ .

L'outil essentiel est la résolution de l'opérateur  $\bar{\delta}$  avec les estimations de Hörmander [7].

Nous aurons besoin des notions suivantes. Étant donnée une fonction  $g$  à valeurs réelles définie dans  $\Omega$ , on notera  $g^*$  la plus petite fonction s.c.s. qui majore  $g$ . On dira que  $\exp(\kappa)$  est un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ , définie dans  $\Omega$ , si  $\kappa$  est une fonction continue dans  $\Omega$  est si pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{C}^n$  la distribution

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k - \exp(\kappa) \sum_{j=1}^n |t_j|^2$$

est une mesure positive. Dans toute la suite on supposera que  $\omega$  est de la forme  $\omega = \exp(-\Phi)$ . On dira que  $\omega$  est un poids si pour tout entier  $k$  on a :

$$\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi(z)) \delta_{\Omega}^{-k}(z) < \infty.$$

Nous obtenons en particulier les résultats suivants.

**THÉORÈME.** — Si  $(\Phi - 2 \log \delta_{\Omega})(z) = \left( \sup_{i \in I} \varphi_i^* \right) (z)$  pour  $z \in \Omega$ , où chaque  $\varphi_i$  est p.s.h. dans un domaine d'holomorphie  $\Omega_i \supset \Omega$ , la famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  restreinte à  $\Omega$  étant supposée filtrante croissante et si de plus il existe une constante  $C > 0$  telle que  $C \delta_{\Omega}^{-2}$  soit un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ , alors  $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$  est dense dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ . Lorsque  $\Omega = \mathbf{C}^n$  il suffit de supposer que  $C \delta_0^2$  est un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ .

**THÉORÈME.** — Soient  $\Omega$  un ensemble convexe de  $\mathbf{C}^n$  et  $\Phi$  une fonction convexe dans  $\Omega$  telle que  $\exp(-\Phi)$  soit un poids. Alors pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , les polynômes sont denses dans  $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$ .

Nous obtenons comme corollaire d'un théorème plus général le résultat suivant.

**COROLLAIRE.** — Si  $\Phi$  est p.s.h. homogène complexe d'ordre  $\rho > 0$  dans  $\mathbf{C}^n$ , i.e.  $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$  pour  $u \in \mathbf{C}^n$  et  $z \in \mathbf{C}^n$ . Alors les polynômes sont denses dans

$$H^p(\exp(-\Phi)), \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Pour étudier des conditions nécessaires d'approximation, nous montrons le résultat suivant sur les fonctions p.s.h., ce résultat admet d'autres applications [11].

PROPOSITION. — Soit  $\Phi$  une fonction p.s.h. continue dans un domaine d'holomorphic  $\Omega$  telle que  $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$  et  $\exp(-\Phi)$  lipschitzienne dans  $\Omega$ ; alors

$$\Phi(z) = \left( \sup_v C_v \log |a_v| \right)^*(z)$$

pour tout  $z \in \Omega$ , où  $C_v > 0$  et où  $a_v$  sont des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ .

On montre alors qu'une condition nécessaire pour que  $H(\Omega')$ , l'espace des fonctions holomorphes dans  $\Omega' \supset \Omega$ , soit dense dans  $H^2(\Omega, \exp(-k\Phi))$  pour tout entier positif  $k$ , est que,  $\exp(-\Phi)$  étant un poids, on ait

$$\Phi(z) = \left( \sup_i c_i \log |f_i| \right)^*(z), \quad z \in \Omega,$$

les  $c_i$  étant des constantes positives et  $f_i$  des fonctions holomorphes dans  $\Omega'$ .

Les cas où cette condition est suffisante sont étudiés dans la suite.

## 2. Approximation dans un domaine d'holomorphic pour les espaces $H^p(\Omega, w)$ .

Nous utiliserons à plusieurs reprises les deux théorèmes suivants dus à L. Hörmander [7].

THÉORÈME 1. — Soient  $\Omega$  un domaine d'holomorphic de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\Phi$  une fonction p.s.h. dans  $\Omega$  et  $\exp(\kappa)$  un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ . Pour toute forme

$$g \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc}), \quad q > 0,$$

telle que  $\bar{\partial}g = 0$  et  $\int_\Omega |g|^2 \exp -(\Phi + \kappa) d\lambda(z) < \infty$ , il existe  $u \in L^2_{(q,q-1)}(\Omega, \text{loc})$  telle que  $\bar{\partial}u = g$  et

$$(1) \quad q \int_\Omega |u|^2 \exp(-\Phi) d\lambda \leq \int_\Omega |g|^2 \exp -(\Phi + \kappa) d\lambda.$$

Les notations sont celles de [7] et [8].

**COROLLAIRE 2.** — Soient  $\Omega$  un domaine d'holomorphic de  $\mathbf{C}^n$ ,  $\varphi$  une fonction p.s.h. dans  $\Omega$ ,  $g \in L^2_{(p, q)}(\Omega, \text{loc})$ ,  $q > 0$ , avec  $\bar{\partial}g = 0$  et  $\int |g|^2 \exp(-\varphi) d\lambda < \infty$ . Alors il existe  $u \in L^2_{(p, q-1)}(\Omega, \text{loc})$  vérifiant  $\bar{\partial}u = g$  et

$$(2) \quad q \int_{\Omega} |u|^2 \exp(-\varphi) \delta_0^4 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |g|^2 \exp(-\varphi) d\lambda.$$

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer le théorème 1 avec  $\Phi = \varphi + 2 \log(1 + |z|^2)$ . On a

$$\sum_{j, k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k \geq 2 \sum_{j, k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1 + |z|^2) t_j \bar{t}_k \geq 2 \frac{|t|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

d'où

$$\exp(-\Phi) = \exp(-\varphi) \delta_0^4$$

et 
$$\exp(-(\Phi + \kappa)) = \frac{1}{2} \exp(-\varphi).$$

Donc (2) se déduit de (1).

**PROPOSITION 3.** — Soit  $\Phi$  une fonction positive dans un domaine d'holomorphic  $\Omega$ . On suppose que

$$\Phi(z) - 2 \log \delta_{\Omega}(z) = \left( \sup_{i \in I} \varphi_i \right)^*(z)$$

pour  $z \in \Omega$  où, pour chaque  $i \in I$ ,  $\varphi_i$  est une fonction p.s.h. positive dans un domaine d'holomorphic  $\Omega_i \supset \Omega$ . La restriction de la famille  $(\varphi_i)_{i \in I}$  à  $\Omega$  est supposée filtrante croissante. Alors pour  $f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$  il existe une suite de fonctions appartenant à  $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i) \delta_0^4)$  qui converge vers  $f$  dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_0^4)$ .

*Démonstration.* — D'après un lemme de G. Choquet [9], il existe une suite  $i(m)$  d'indices tels que la suite  $\varphi_{i(m)}$  soit croissante et  $\left( \sup_m \varphi_{i(m)} \right)^* = \left( \sup_{i \in I} \varphi_i \right)^*$  dans  $\Omega$ . Soit  $(K_p)_{p \in \mathbf{N}}$  une suite exhaustive de compacts de  $\Omega$  et  $(\alpha_p)$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ ,  $0 \leq \alpha_p \leq 1$ ,  $\alpha_p$  valant 1 sur un voisinage de  $K_p$ . En convolant la fonction

caractéristique de  $K_p$  avec  $\varepsilon^{-n} \rho \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$  où  $\rho$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact égale à 1 sur un voisinage de l'origine, on voit qu'en choisissant  $\varepsilon$  en fonction de  $K_p$ , on peut construire une suite  $\alpha_p$  qui vérifie de plus la condition

$$(3) \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial z_i} \right|^2 (z) \leq C(1 + d_\Omega^{-1}(z))^2$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $p$ .

Posons  $g_p = \bar{\partial}(\alpha_p f) = f \bar{\partial} \alpha_p$ ;  $g_p$  est une forme différentielle de type  $(0, 1)$  à coefficients dans  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Soit  $I(p)$  défini par

$$I(p) = \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 d\lambda = \int |f|^2 |\bar{\partial} \alpha_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 d\lambda.$$

D'après (3) on a

$$I(p) \leq C \int_{\Omega \setminus K_p} |f|^2 \exp(-\Phi) (1 + \delta_\Omega^2) d\lambda.$$

Or

$$f \in H^2(\Omega, \exp(-\Phi)) \quad \text{et} \quad \delta_\Omega < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0.$$

Afin d'alléger les notations, désignons  $\varphi_{i(m)}$  par  $\varphi_m$ ,  $\Omega_{i(m)}$  par  $\Omega_m$  et posons :

$$I(p, m) = \int_{\Omega_m} |g_p|^2 \exp(-\varphi_m) d\lambda.$$

Rappelons que  $\sup_m \varphi_m = \left( \sup_m \varphi_m \right)^*$  sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle [9]. Par suite,  $p$  étant fixé, en appliquant le théorème de convergence monotone on a :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I(p, m) &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)) d\lambda \\ &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-(\sup \varphi_m)^*) d\lambda \\ &= \int_\Omega |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_\Omega^2 = I(p), \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse :  $\Phi - 2 \log \delta_\Omega = \left( \sup_i \varphi_i \right)^*$ .

Donc pour tout  $p$ , il existe un entier  $m(p)$  tel que

$$I(p, m(p)) \leq 2I(p).$$

Réolvons l'équation  $\bar{\partial} u = g_p$  dans le domaine d'holo-

morphie  $\Omega_{m(p)}$ . D'après le corollaire 2, il existe une solution  $u_p$  vérifiant

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_0^4 d\lambda \leq \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) d\lambda = I(p, m(p)) < 2I(p).$$

Posons  $v_p = f\alpha_p - u_p$ . Alors  $\bar{\delta}v_p = 0$  dans  $\Omega_{m(p)}$ ; par suite  $v_p$  est une fonction holomorphe dans  $\Omega_{m(p)}$  et on a

$$\int_{\Omega_{m(p)}} |v_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_0^4 d\lambda < \infty$$

car il en est ainsi de  $u_p$  et que  $f\alpha_p$  est à support compact.

De plus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f\alpha_p - v_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_0^4 d\lambda &= \int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_0^4 d\lambda \\ &\leq \int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-\varphi_{m(p)}) \delta_0^4 d\lambda \leq 2I(p), \end{aligned}$$

or  $f\alpha_p$  est arbitrairement proche de  $f$  dans

$$L^2(\Omega, \exp(\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_0^4).$$

Par suite  $v_p$  converge vers  $f$  dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi) \delta_{\Omega}^2 \delta_0^4)$ .

Cette proposition a été démontrée par B. Taylor [12] lorsque  $\Omega = \mathbb{C}^n$  sous des hypothèses plus fortes sur  $\Phi$ . Remarquons qu'on peut remplacer dans l'énoncé la fonction  $\delta_{\Omega}$  par une fonction lipschitzienne strictement positive et tendant vers zéro sur le bord de  $\Omega$ .

**THÉORÈME 4.** — Soit  $\Phi$  une fonction p.s.h. positive dans le domaine d'holomorphie  $\Omega$ . On suppose que  $\exp(-\Phi)$  est un poids vérifiant les conditions suivantes :

a)  $\Phi(z) = \left(\sup_{i \in I} \varphi_i\right)^*(z)$  pour  $z \in \Omega$ , où les  $\varphi_i$  sont p.s.h. dans  $\Omega_i$ , domaine d'holomorphie contenant  $\Omega$  et où la restriction de la famille  $\varphi_i$  à  $\Omega$  est filtrante croissante.

b) Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $C \delta_{\Omega}^{-2}$  soit un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ .

On suppose de plus que

c)  $-\log \delta_{\Omega}(z) = \left(\sup_{i \in I} \psi_i\right)^*(z)$  pour  $z \in \Omega$ , où les  $\psi_i$  sont p.s.h. dans  $\Omega_i$  et la restriction de la famille  $(\psi_i)$  à  $\Omega$  est filtrante croissante.



Alors  $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-\varphi_i))$  est dense dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ .

Si on suppose que  $(\varphi_i), (\psi_i)$  sont définies dans  $\mathbf{C}^n$  et que  $\exp(\varphi_i)$  et  $\exp(\psi_i)$  sont à croissance polynomiale alors les polynômes sont denses dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ .

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration de la proposition 3 posons

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-\Phi) \delta_{\Omega} d\lambda, \\ I(p, r) &= \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-r\Phi) \delta_{\Omega}^2 d\lambda \end{aligned}$$

où  $0 < r < 1$  et  $g_p = \bar{\delta}(\alpha_p f)$ .

On voit facilement que  $\lim_{r \rightarrow 1} I(p, r) = I(p)$ ; donc pour tout  $p$  il existe  $\frac{1}{2} < r(p) < 1$  tel que  $I(p, r(p)) \leq 2I(p)$ . D'après le théorème 1 et l'hypothèse b) faite sur  $\Phi$  il existe une solution  $u_p$  de l'équation  $\bar{\delta}u = g_p$  dans  $\Omega$  vérifiant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_p|^2 \exp(-r(p)\Phi) d\lambda \\ \leq \frac{2}{C} \int_{\Omega} |g_p|^2 \exp(-r(p)\Phi) \delta_{\Omega}^2 d\lambda \leq \frac{4}{C} I(p). \end{aligned}$$

En effet  $C/2 \delta_{\Omega}^2$  est un module de plurisousharmonicité pour  $r(p)\Phi$  puisque  $r(p) > \frac{1}{2}$ . En posant  $v_p = f\alpha_p - u_p$  alors  $\bar{\delta}v_p = 0$  et on voit qu'on peut approcher  $f$  dans

$$H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$$

par des fonctions qui sont dans  $\bigcup_{r < 1} H^2(\Omega, \exp(-r\Phi))$ . Il nous suffit à présent d'approcher les fonctions de

$$H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi)), \quad r_0 < 1.$$

Or  $(r_0\Phi - 2 \log \delta_{\Omega})(z) = (\sup_i (r_0\varphi_i + 2\psi_i))^*(z)$  pour  $z \in \Omega$ , d'après les hypothèses a) et c). La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher une fonction  $h \in H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi))$  par des fonctions de  $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-r_0\varphi_i - 2\psi_i) \delta_0^4)$  et ceci

pour la norme de l'espace  $H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi) \delta_\Omega^2 \delta_0^2)$ . Or, puisque, pour tout  $k > 0$ ,  $\sup_{z \in \Omega} \exp(-\Phi) \delta_\Omega^{-k}(z) < \infty$ , la convergence dans l'espace  $H^2(\Omega, \exp(-r_0\Phi) \delta_\Omega^2 \delta_0^2)$  implique la convergence dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ . Pour terminer la démonstration, il nous suffit de montrer que les fonctions de  $H^2(\exp(-r_0\varphi_i - 2\psi_i) \delta_0^4)$  sont des polynômes si  $\exp(\varphi_i)$  et  $\exp(\psi_i)$  sont à croissance polynomiale. En effet, si  $f$  appartient à cet espace, il existe par hypothèse un entier  $k > 0$  tel que  $\int |f|^2(1 + |z|^2)^{-k} d\lambda < \infty$ . On a alors

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &\leq C_n \int_{|u| \leq 1} |f(z + u)|^2 d\lambda(u) \\ &\leq C_n \int_{|u| \leq 1} |f(z + u)|^2 (1 + |z + u|^2)^{-k} (1 + |z + u|^2)^k d\lambda(u) \\ &\leq \sup_{|u| \leq 1} (1 + |z + u|^2)^k C_n \int |f(\zeta)|^2 (1 + |\zeta|^2)^{-k} d\lambda(\zeta) \\ &\leq M(1 + |z|^2)^k \end{aligned}$$

donc  $f$  est un polynôme d'après le théorème de Liouville.

*Exemple 5.* — Soit  $U$  un ouvert borné de  $\mathbf{C}^n$  et  $\rho$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement plurisousharmonique dans  $U$ . Posons  $\Omega = \{z/z \in U, \rho(z) < 0\}$ , on suppose  $U \supset \bar{\Omega}$ ; alors  $\Omega$  est strictement pseudoconvexe. Posons  $\Phi = -\frac{1}{\rho}$ ;  $\Phi$  vérifie les hypothèses de la proposition 4, car c'est la composée de  $\rho$  avec la fonction  $h(x) = -x^{-1}$  qui est convexe croissante sur  $\mathbf{R}_+$ . Donc  $\Phi = \sup(\alpha_i \rho + \beta_i)$  où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont des constantes,  $\alpha_i > 0$  et  $\alpha_i \rho + \beta_i$  est p.s.h. dans  $U$ . De plus on a

$$\delta\bar{\delta}\Phi \geq \rho^{-2} \delta\bar{\delta}\rho \geq c\rho^{-2} \geq c \delta\bar{\delta}\Omega^{-2}.$$

Donc  $\Phi$  vérifie l'hypothèse *b*) et il est clair que  $\exp(-\Phi)$  est un poids. Par suite les fonctions holomorphes dans  $U$  sont denses dans  $H^2(\Omega, \exp(\rho^{-1}))$ .

**THÉORÈME 6.** — Soient  $\Omega$  un ouvert convexe de  $\mathbf{C}^n$  et  $\Phi$  une fonction convexe dans  $\Omega$  telle que  $\exp(-\Phi)$  soit un poids; alors pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , les polynômes sont denses dans  $H^p(\Omega, \exp(-\Phi))$ .

Lorsque  $\Omega = \mathbf{C}^n$  ce résultat est démontré dans [12] en utilisant des fonctionnelles analytiques; notre démonstration est cependant différente même dans ce cas.

*Démonstration.* — Nous allons faire d'abord la démonstration pour  $p = 2$ . On peut toujours supposer que  $\Phi \geq 0$ ,  $0 \in \Omega$  et  $\Phi(0) = 0$ .

Soit  $t > 1$ . La convexité de  $\Phi$  permet d'écrire

$$\Phi(z) \leq t^{-1}\Phi(z) + (1 - t^{-1})\Phi(0)$$

ou encore

$$(4) \quad \Phi(tz) \geq t\Phi(z).$$

En particulier  $\Phi(z) \geq R^{-1}|z|\Phi\left(\frac{Rz}{|z|}\right)$ ; par suite il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Phi(z) \geq \varepsilon|z|$  pour  $|z|$  assez grand, sinon  $\Phi$  serait nulle dans une direction donnée et  $\exp(-\Phi)$  ne serait pas un poids.

Posons pour  $r < 1$   $f_r(z) = f(rz)$ ; la fonction  $f_r$  est définie dans  $\Omega_r = r^{-1}\Omega \supset \Omega$ . On a

$$\int_{\Omega} |f_r(z)|^2 \exp(-\Phi(z)) d\lambda = r^{-2n} \int_{r\Omega} |f(z)|^2 \exp(-\Phi(r^{-1}z)) d\lambda;$$

or

$$X_{r\Omega}(z) \exp(-\Phi(r^{-1}z)) \leq X_{\Omega} \exp\left(-\frac{1}{r}\Phi(z)\right) \leq X_{\Omega} \exp(-\Phi(z))$$

où  $X_{\Omega}$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega$ .

D'où, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue,  $\|f_r\| \rightarrow \|f\|$  quand  $r \rightarrow 1$ ; par ailleurs  $f_r$  converge vers  $f$  ponctuellement. La boule unité de l'espace  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$  étant faiblement compacte, on voit que  $\|f_r - f\|$  tend vers zéro quand  $r$  tend vers 1; de plus

$$f_r \in H^2(r^{-1}\Omega, \exp(\Phi_r)).$$

Nous avons besoin du lemme suivant.

**LEMME 7.** — Soient  $\Omega$  un ouvert convexe et  $\psi$  une fonction convexe sur  $\Omega$  telle que  $\psi(z) \geq \varepsilon|z|$ . Alors il existe une suite  $\psi_k$  de fonctions p.s.h. dans  $\mathbf{C}^n$  telles que  $\exp(\psi_k)$  soit à croissance polynomiale et  $\psi(z) = \sup_k \psi_k(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ .

Supposons le lemme démontré et achevons la démonstration du théorème. Il est clair que

$$\Phi - 2 \log \delta_{\Omega} = \sup ((\Phi - 2 \log d_{\Omega}), \Phi + 2 \log (1 + |z|^2)).$$

Or,  $\Phi - 2 \log d_\Omega$  est convexe puisque  $\Phi$  l'est et l'hypothèse  $\Omega$  convexe équivaut à  $-\log d_\Omega$  convexe. De plus

$$\Phi - 2 \log d_\Omega \geq \varepsilon'|z|$$

comme on l'a vu, puisque  $-\log d_\Omega(z) \geq -\log |z - a|$ . D'après le lemme 7,  $\Phi - 2 \log d_\Omega$  et  $\Phi$  s'écrivent comme enveloppe supérieure de fonctions p.s.h. dont l'exponentielle est à croissance polynomiale; il en est donc de même de  $\Phi - 2 \log \delta_\Omega$  et de  $\Phi_r - 2 \log \delta_{r^{-1}\Omega}$ , puisque  $r^{-1}\Omega$  est convexe. D'où  $\Phi_r - 2 \log \delta_{r^{-1}\Omega} = \sup_k \varphi_k$  avec  $\exp(\varphi_k)$  à croissance polynomiale. La proposition 3 permet d'affirmer qu'on peut approcher  $f_r$  dans l'espace

$$H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r) \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4)$$

par des fonctions de  $\bigcup_i H^2(\exp(-\varphi_i) \delta_0^4)$  c'est-à-dire par des polynômes, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 4.

Il suffit de remarquer que la convergence dans

$$H^2(r^{-1}\Omega, \exp(-\Phi_r) \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4)$$

implique la convergence dans  $H^2(\Omega, \exp(-\Phi))$ .

Or

$$(5) \quad d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0 \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

En effet, il existe une boule de centre 0 et de rayon  $\beta$  contenue dans  $\Omega$ . Donc si  $z \in \Omega$ , on a pour  $|\zeta| \leq \beta(1 - r)$

$$z + \zeta = r[r^{-1}z] + (1 - r)((1 - r)^{-1}\zeta) \in r^{-1}\Omega$$

d'où l'inégalité (5). On a vu (4) que pour  $r < 1$ ,

$$\Phi(z) \geq r^{-1}\Phi(rz).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \exp(-\Phi(z)) &\leq \exp(-r^{-1}\Phi_r(z)) \\ &= \exp(-\Phi_r(z)) \exp(1 - r^{-1})\Phi_r(z) \leq C \exp(-\Phi_r(z)) \delta_{r^{-1}\Omega}^2 \delta_0^4 \end{aligned}$$

puisque  $d_{r^{-1}\Omega}(z) \geq \alpha > 0$  et  $\Phi(z) \geq \varepsilon|z|$ .

*Démonstration du lemme 7.* —  $\psi$  étant convexe, d'après le théorème de Hahn Banach,  $\psi = \sup_j (\operatorname{Re}\langle z, \omega_j \rangle - \alpha_j)$ ,

$\alpha_j \in \mathbf{C}$ ,  $\omega_j \in \mathbf{C}^n$ . Il nous suffit donc de montrer que dans  $\mathbf{C}$  la fonction  $\varphi = \sup(\varepsilon|z|, x)$ , où  $x = \operatorname{Re} z$ , s'écrit comme  $(\sup_k \tilde{\varphi}_k)$  avec  $\tilde{\varphi}_k$  sous-harmonique dans  $\mathbf{C}$  et  $\exp(\tilde{\varphi}_k)$  à croissance polynomiale.

En effet,  $\psi = \sup_j [\sup(\operatorname{Re}\langle z, \omega_j \rangle) - \alpha_j, \varepsilon|z|]$  et en utilisant une rotation on se ramène au cas où  $\omega_j = (\omega_j^0, 0, \dots, 0)$ . Remarquons que

$$\varepsilon|z| = \sup_N \left( \log \sum_0^N \frac{\varepsilon^n |z|^n}{n!} \right) = \sup_N \varphi_N.$$

La fonction  $\varphi_N$  est sous-harmonique et  $\exp(\varphi_N)$  est à croissance polynomiale.

Soit  $\theta$  une représentation conforme de l'angle  $\varepsilon|z| < x$  sur le demi plan supérieur

$$(6) \quad \theta(z) = e^{i\gamma} z^\beta.$$

Si  $\operatorname{Im} z > 0$ , posons

$$\widetilde{(\varphi_N \circ \theta^{-1})}(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t) dt}{(t-x)^2 + y^2} \quad \text{où } z = x + iy.$$

On voit que  $(\varphi_N \circ \theta^{-1})(t) \leq p \log^+ |t| + C$  donc que l'intégrale est convergente. On voit facilement que  $\log^+ |t| = \inf_{s < 1} ((es)^{-1} t^s)$ , par suite

$$\begin{aligned} |\widetilde{(\varphi_N \circ \theta^{-1})}(z)| &\leq A + \frac{py}{\pi} \int \frac{\log^+ |t|}{(t-x)^2 + y^2} dt \\ &\leq A + \frac{py}{\pi} \int \frac{(es)^{-1} t^s}{(t-x)^2 + y^2} = A + p \operatorname{Re}(z^s)(es)^{-1}. \end{aligned}$$

D'où il résulte que

$$(7) \quad |\widetilde{(\varphi_N \circ \theta^{-1})}(z)| \leq A + p \log^+ |z|.$$

Posons  $\tilde{\varphi}_N(z) = \varphi_N(z)$  si  $\varepsilon|z| > x$  et  $\tilde{\varphi}_N(z) = \widetilde{(\tilde{\varphi}_N \circ \theta^{-1})} \circ \theta$  si  $\varepsilon|z| \leq x$ . On a  $|\tilde{\varphi}_N(z)| \leq A_1 + A_2 \log^+ |z|$  d'après (6) et (7) et  $|\varphi_N(z)| \leq \varphi(z)$ .

Remarquons que

$$(8) \quad \widetilde{\varphi_N \circ \theta^{-1}}(z) \geq \varphi_N \circ \theta^{-1}(z),$$

par suite  $\tilde{\varphi}_N(z) \geq \varphi_N(z)$  voir lemme 8. Donc  $\tilde{\varphi}_N$  est sous-

harmonique dans  $\mathbf{C}$  et à l'intérieur de l'angle  $x > \varepsilon|z|$ , elle est égale à la solution du problème de Dirichlet avec donnée au bord  $\varphi_N$ . De plus  $\varphi(z) = \sup_N \tilde{\varphi}_N(z)$ , car en faisant tendre  $N$  vers l'infini on voit que la solution du problème de Dirichlet, dans la construction choisie, avec pour donnée au bord  $\varphi_N$  converge vers la solution du problème avec pour donnée au bord  $x$  et que cette solution est égale à  $x$ .

L'inégalité (7) et la relation (6) permettent de voir que  $\exp(\varphi_N)$  est à croissance polynomiale.

Remarquons que la conclusion du lemme 7 reste vraie pour la fonction  $\psi^\alpha$ ,  $\alpha$  étant un nombre strictement positif et  $\psi$  une fonction convexe vérifiant  $\psi(z) \geq \varepsilon|z|$  pour un  $\varepsilon > 0$  donné.

Pour écrire l'inégalité (8) nous avons utilisé le résultat suivant: soit  $h$  une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur, continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$0 \leq h(z) \leq k \log(1 + |z|^2).$$

Notons  $Ph$  l'intégrale de Poisson de la fonction  $h$ , i.e.

$$Ph(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{h(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

On a alors  $h \leq Ph$ .

Nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

LEMME 8. — Soit  $u$  une fonction sous-harmonique dans le demi-plan supérieur continue dans le demi-plan supérieur fermé. On suppose que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|u(t)|}{1+t^2} dt < \infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi u^+(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Alors  $u \leq Pu$  où  $Pu$  désigne l'intégrale de Poisson de  $u$ .

*Démonstration.* — Soit  $z \in \mathbf{C}$  avec  $\text{Im } z > 0$ . Désignons par  $\mu_z^{\mathbf{R}}$  la mesure harmonique, relative au point  $z$ , du demi-disque centré en 0 et de rayon  $R$  contenu dans le demi-plan supérieur.

On peut calculer explicitement  $\mu_z^R$ . Pour  $R$  assez grand, on a alors :

$$u(z) \leq \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{(R^2 - |z|^2)(R^2 - t^2)}{|t - z|^2 r^2 - tz|^2} u(t) dt \\ + \frac{2y}{\pi} \int_0^\pi \frac{(R^2 - |z|^2)R \sin \varphi}{|Re^{i\varphi} - z|^2 |Re^{i\varphi} - \bar{z}|^2} u(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Majorons la dernière intégrale en remplaçant  $u$  par  $u^+$ . Les hypothèses faites sur  $u$  permettent de passer à la limite en faisant tendre  $R$  vers l'infini; d'où il résulte que  $u \leq Pu$ .

Ceci achève la démonstration du théorème pour  $p = 2$ .

Faisons la démonstration pour  $p = +\infty$ . Si  $r < 1$  on a

$$|f_r(z)| \exp(-\Phi) \leq |f(rz)| \exp(-r^{-1}\Phi(rz))$$

puisque  $\Phi(rz) \leq r\Phi(z)$ . Donc  $f_r \in H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$  et  $f_r$  converge vers  $f$  quand  $r$  tend vers 1.

Pour  $r' > r$ ,  $f_r \in H^2(r'^{-1}\Omega, 2\Phi_{r'})$ . En effet

$$\Phi(r'z) \geq \frac{r'}{r} \Phi(rz),$$

d'où

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq |f(rz)|^2 \exp\left(-2\frac{r'}{r}\Phi(rz)\right)$$

qui est intégrable puisque  $\Phi(z) \geq \varepsilon|z|$  et  $r'/r > 1$ .

Par suite, il existe une suite de polynômes  $p_j$  qui converge vers  $f_r$  dans  $H^2(r'^{-1}\Omega, 2\Phi_{r'})$ , c'est l'application du théorème pour  $p = 2$ . Or si  $z \in \Omega$  on a vu que  $z + \zeta \in r'^{-1}\Omega$  pour  $|\zeta| \leq \beta(1 - r') = r_1$ . Il en résulte que

$$|f_r(z) - p_j(z)|^2 \leq Cr_1^{-2n} \int_{|\zeta| < r_1} |f_r(z + \zeta) - p_j(z + \zeta)|^2 d\lambda(\zeta) \\ \leq Cr_1^{-2n} \sup_{|\zeta| \leq r_1} \exp(2\Phi_{r'}(z + \zeta)) \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(\zeta)) d\lambda(\zeta) \\ \leq Cr_1^{-2n} \exp(2\Phi(z)) \varepsilon_j,$$

où

$$\varepsilon_j = \int_{r'^{-1}\Omega} |f_r(\zeta) - p_j(\zeta)|^2 \exp(-2\Phi_{r'}(\zeta)) d\lambda(\zeta).$$

En effet,  $\Phi_{r'}(z + \zeta) \leq \Phi(z) + A(r')$  car

$$\Phi(r'z + r'\zeta) \leq r'\Phi(z) + (1 - r')\Phi(r'(1 - r')^{-1}\zeta) \\ \leq r'\Phi(z) + A(r').$$

D'où il résulte que  $p_j$  converge vers  $f_r$  dans

$$H^\infty(\Omega, \exp(-\Phi))$$

puisque  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ .

Pour démontrer le résultat, lorsque  $1 \leq p < \infty$ , on se ramène selon la même technique au cas  $p = 2$ .

### 3. Approximation pour les algèbres $\mathcal{O}(\delta)$ .

Nous avons défini l'algèbre  $\mathcal{O}(\delta)$  au paragraphe 1,  $\delta$  étant une fonction lipschitzienne positive telle que  $\delta \leq \delta_0$ .

**THÉORÈME 9.** — Si  $-\log \delta(z) = (\sup_{i \in I} \varphi_i)^*(z)$  pour  $z \in \Omega$  avec  $\varphi_i$  p.s.h. dans un domaine d'holomorphie  $\Omega_i \supset \Omega$  et si la restriction de la famille  $\varphi_i$  à  $\Omega$  est filtrante croissante, alors on peut approcher les fonctions de  $E(k, \delta)$  pour la norme de  $E(k + 2n + 4, \delta)$  par des fonctions de

$$\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i) \delta_0^4),$$

avec  $c = 2k + 2n + 3$ .

*Démonstration.* — Soit  $\Omega = \{z/z \in \mathbf{C}^n; \delta(z) > 0\}$ . On a  $\delta(z) \leq \delta_\Omega(z)$  pour tout  $z$ . Dans la démonstration de la proposition 3, on peut supposer

$$\sum_t \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial z_t} \right|^2 \leq c(1 + \delta^{-1})^2.$$

Par suite étant donné  $f \in E(k, \delta)$  qui est inclus dans  $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1})$ , on peut l'approcher dans  $H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$  par des fonctions appartenant à  $\bigcup_{i \in I} H^2(\Omega_i, \exp(-c\varphi_i) \delta_0^4)$ .

Il suffit pour terminer la démonstration de voir que

$$H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+7})$$

s'injecte continûment dans  $E(k + 2n + 4, \delta)$ .

En effet on a :

$$(9) \quad |f(z)|^2 \delta^{2k+2n+7}(z) \leq (\text{vol } B_z)^{-1} \int_{B_z} |f(z + \zeta)|^2 \delta^{2k+2n+7}(z) d\lambda(\zeta)$$



où  $B_z$  désigne la boule de centre  $z$  et de rayon  $\frac{1}{2} \delta(z)$ . Mais  $B_z$  est contenue dans  $\Omega$ , car

$$|\delta(z) - \delta(z + \zeta)| \leq \frac{1}{2} \delta(z)$$

si  $|\zeta| \leq \frac{1}{2} \delta(z)$ ; donc  $\delta(z + \zeta) > 0$  si  $z + \zeta \in B_z$ .

De (9) on déduit

$$|f(z)|^2 \delta(z)^{2k+2n+7} \leq c_n \delta(z)^{-2n} \int_{\Omega} |f(z')| \delta(z')^{2k+2n+7} d\lambda(z')$$

c'est-à-dire

$$\|f\|_{k+2n+4} \leq c \left( \int |f(z')|^2 \delta^{2n+2k+7} d\lambda(z') \right).$$

Introduisons une définition de la densité dans  $\mathcal{O}(\delta)$  qui soit plus fine que la notion de densité pour la structure bornologique.

**DEFINITION 11.** — *Un sous-espace  $F$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$  s'il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que pour tout  $k$ , on peut approcher les fonctions de  $E(k, \delta)$  par des éléments de  $F$  et cela pour la norme de l'espace  $E(k + \gamma, \delta)$ .*

**COROLLAIRE 12.** — *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbf{C}^n$ . On suppose que  $\Omega = \widehat{\bigcap_{i \in I} \Omega_i}$  où chaque  $\Omega_i$  est un domaine d'holomorphic.*

*Alors  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$ .*

En particulier, si  $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$  et  $\bar{\Omega}$  est un compact polynomialement convexe, les polynômes sont denses dans  $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$ .

*Démonstration.* — Puisque  $\Omega = \widehat{\bigcap_{i \in I} \Omega_i}$ , on a

$$\delta_{\Omega}(z) = \inf_i \delta_{\Omega_i}(z)$$

pour  $z \in \Omega$ . D'où  $-\log \delta_{\Omega}(z) = \sup_{i \in I} (-\log \delta_{\Omega_i}(z))$ ,  $z \in \Omega$ ; or  $-\log \delta_{\Omega_i}$  est p.s.h. dans  $\Omega_i$  puisque  $\Omega_i$  est un domaine d'holomorphic. Donc  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}(\delta_{\Omega_i})$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta_{\Omega})$  au sens de la définition 10, ceci d'après le théorème 9.

Si  $\bar{\Omega}$  est un compact polynomialement convexe, on a  $\bar{\Omega} = \bigcap_p \Omega_p$  où chaque  $\Omega_p$  est un polyèdre analytique et  $\Omega = \overset{\circ}{\bar{\Omega}} = \bigcap_p \overset{\circ}{\Omega}_p$ . Le théorème d'approximation d'Oka permet d'approcher les fonctions de  $\mathcal{O}(\delta_{\Omega_p})$  par des polynômes uniformément sur  $\bar{\Omega}$ .

*Exemple 13.* — Dans  $\mathbf{C}^2$  considérons le domaine d'holomorphic

$$\omega = \{(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; |z_1| < |z_2| < 1\}.$$

On montre que  $\delta_\omega(z) = d_\omega(z) = \inf [(1 - |z_2|), |z_2| - |z_1|]$ .

Or

$$(1 - |z_2|)^{-1} = \sup_N \left[ \sum_{0 \leq p \leq N} |z_2|^p \right]$$

et

$$(|z_2| - |z_1|)^{-1} = \sup_{N, \lambda_1, \lambda_2} |P_{N, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2)|; |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

où

$$P_{N, \lambda_1, \lambda_2}(z_1, z_2) = \sum_{0 \leq p \leq N} (\lambda_1 z_1)^p (\lambda_2 z_2)^{-(p+1)}.$$

D'où il résulte que pour  $z \in \omega$ , on a

$$-\log \delta_\omega(z) = \left( \sup_j \log |f_j| \right)(z)$$

avec  $f_j$  holomorphe dans  $\mathbf{C}^2 \setminus \mathbf{C} \times \{0\} = \Omega$ , donc  $H(\Omega)$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ . On voit facilement que les polynômes ne sont pas denses dans  $\mathcal{O}(\delta_\omega)$ .

#### 4. Approximation de fonctions entières.

Dans ce paragraphe on suppose que  $\Phi$  est une fonction positive p.s.h. dans  $\mathbf{C}^n$ , telle que  $\exp(-\Phi)$  soit un poids, i.e. pour tout  $k$ ,  $\sup_{z \in \mathbf{C}^n} \delta_0^{-k}(z) \exp(-\Phi(z)) < \infty$ .

**PROPOSITION 14.** — *Supposons que  $\Phi$  vérifie les conditions suivantes :*

a) *Il existe une constante  $C > 0$  telle que  $C \delta_0^2$  soit un module de plurisousharmonicité pour  $\Phi$ .*

b)  $\Phi = \left(\sup_{j \in J} \Phi_j\right)^*$ ,  $\Phi_j$  étant une famille de fonctions p.s.h. dans  $\mathbf{C}^n$  avec  $\exp(\Phi_j)$  à croissance polynomiale.

Alors les polynômes sont denses dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ .

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $\mathbf{C}^n$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  égale à 1 pour  $|z| \leq 1$  et nulle pour  $|z| \geq 2$ . Posons  $\alpha_p(z) = \alpha(p^{-1}z)$ . On a

$$(10) \quad \sum_j \left| \frac{\partial \alpha_p}{\partial z_j} \right|^2 \leq C(1 + |z|^2)^{-1}.$$

En posant  $g_p = \bar{\delta}(\alpha_p f)$  où  $f \in H^2(\exp(-\Phi))$ , et

$$I(p) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi)(1 + |z|^2) d\lambda(z),$$

on voit comme dans la proposition 3 que  $\lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0$ . Soit

$$I(p, j) = \int |g_p|^2 \exp(-\Phi_j/2 - \Phi/2)(1 + |z|^2) d\lambda.$$

On peut supposer comme on l'a vu que  $\Phi_j$  est une suite, et qu'elle est filtrante croissante, puisque cela ne modifie pas la croissance polynomiale de  $\exp(\Phi_j)$  lorsqu'on prend la borne supérieure d'un nombre fini de fonctions de ce type.

Pour  $p$  fixé on a  $\lim_{j \rightarrow \infty} I(p, j) = I(p)$ . Donc pour tout  $p$ , il existe  $j(p)$  avec  $I(p, j(p)) \leq 2I(p)$ . Résolvons dans  $\mathbf{C}^n$  l'équation

$$(11) \quad \bar{\delta}u = g_p$$

pour la fonction  $\varphi_p = \frac{\Phi_{j(p)}}{2} + \frac{\Phi}{2}$ ;  $\varphi_p$  admet comme module de plurisousharmonicité  $\exp(\kappa) = \frac{c}{2}(1 + |z|^2)^{-1}$  d'après l'hypothèse a). D'après le théorème 1 il existe une solution de (11) vérifiant

$$\begin{aligned} \int |u_p|^2 \exp(-\varphi_p) d\lambda \\ \leq \frac{2}{c} \int |g_p|^2 \exp(-\varphi_p)(1 + |z|^2) d\lambda \leq \frac{4}{c} I(p). \end{aligned}$$

Si  $\varphi_p = \alpha_p f - u_p$ , on a  $\bar{\delta}\varphi_p = 0$ . On voit comme dans la proposition 3 que  $\varphi_p$  converge vers  $f$  dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ .

Les fonctions  $\nu_p$  appartiennent à  $\bigcup_j H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_j}{2} \right) \right)$ .  
 Il nous suffit donc d'approcher les fonctions

$$\nu \in H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \right)$$

par des polynômes. Or l'hypothèse *b*) montre que

$$\frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi_{j_0}}{2} = \left( \sup_j \frac{\Phi_j}{2} + \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right)^*.$$

En reprenant le raisonnement de la proposition 3, mais avec  $\alpha_p = \alpha(p^{-1}z)$ , on voit que  $\bigcup_{j \in J} H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \delta_0^2 \right)$  est dense dans  $H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \right)$  pour la norme de  $H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \delta_0 \right)$ . Or la convergence dans cet espace implique la convergence dans  $H^2 (\exp (-\Phi))$ ; en effet  $\exp (-\Phi) \leq c_{j_0} \exp \left( -\frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \delta_0^2$  puisque

$$(1 + |z|^2) \exp (\Phi_{j_0})$$

étant à croissance polynomiale est majoré par  $c_{j_0} \exp \left( -\frac{\Phi}{2} \right)$ .

Enfin les fonctions de  $H^2 \left( \exp \left( -\frac{\Phi_j}{2} - \frac{\Phi_{j_0}}{2} \right) \delta_0^2 \right)$  sont des polynômes.

*Remarque 15.* — Si on ne conserve que l'hypothèse

$$\Phi = (\sup \Phi_j)^*$$

où  $\Phi_j$  est p.s.h. dans  $\mathbf{C}^n$  la famille  $\Phi_j$  étant filtrante croissante, on peut approcher les fonctions de  $H^2 (\exp -\Phi)$  pour la norme de  $H^2 (\exp (-\Phi) \delta_0^2)$  par des fonctions de  $\bigcup_{j \in J} H^2 (\exp (-\Phi_j) \delta_0^2)$ .

*Exemple 16.* — Si  $\Phi(z) = |z|^{2\alpha} + \varphi(z)$  où  $\alpha > 0$  et  $\varphi$  une fonction convexe avec  $\varphi(z) \geq \varepsilon|z|$ , les polynômes sont

denses dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ . En effet  $\partial\bar{\partial}\Phi \geq \partial\bar{\partial}|z|^{2\alpha}$  et

$$\sum_{k,j} \frac{\partial^2 |z|^{2\alpha}}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} \bar{t}_k t_j = \alpha |z|^{2(\alpha-1)} + \alpha(\alpha-1) |z|^{2(\alpha-2)} \left| \sum_{j=1}^n z_j \bar{t}_j \right|^2 \geq c(1+|z|^2)^{-1} |t|^2.$$

Or  $|z|^{2\alpha} = \sup_N \log \left( \sum_0^N \frac{|z|^{2\alpha p}}{p!} \right)$ , donc  $\Phi = \sup_j \Phi_j$ ,  $\Phi_j$  vérifiant les conditions de la proposition 14; pour  $\varphi$  il faut utiliser le lemme 7.

**COROLLAIRE 16.** — Soit  $\Phi$  une fonction p.s.h. dans  $C^n$ , telle que  $\exp(-\Phi)$  soit un poids. On suppose de plus les conditions suivantes.

a)  $\Phi = \left( \sup_{i \in I} \Phi_i \right)^*$  où chaque  $\Phi_i$  est p.s.h. dans  $C^n$ ,  $\exp(\Phi_i)$  étant à croissance polynomiale.

b) Il existe une constante B telle que pour tout  $\lambda$ ,

$$1 \leq \lambda \leq 2,$$

on ait  $\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) - B$ .

c) Pour tout  $\lambda$ ,  $1 \leq \lambda \leq 2$ , il existe une constante  $A(\lambda)$  telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + \log(1+|z|^2) - A(\lambda).$$

Alors les polynômes sont denses dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ .

*Démonstration.* — Posons  $f_r(z) = f(rz)$ . On voit grâce à l'hypothèse b) que  $f_r$  converge vers  $f$  dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ . (Même démonstration que pour le théorème 6). Il nous suffit d'approcher  $f_r$  par des polynômes. On peut supposer la famille  $\Phi_i$  filtrante croissante; d'après la remarque 15 on peut approcher  $f_r$  par des polynômes pour la norme de  $H^2(\exp(-\Phi_r) \delta_0^2)$ . Or l'hypothèse c) montre que

$$\exp(-\Phi) \leq C_r \exp(-\Phi_r) \delta_0^2$$

donc les polynômes sont denses dans  $H^2(\exp(-\Phi))$ .

**PROPOSITION 17.** — On suppose que  $\Phi$  vérifie les conditions a) et b) du corollaire 16 ainsi que les deux conditions suivantes.

c') Pour tout  $1 \leq \lambda \leq 2$  il existe une constante  $C(\lambda)$  telle que

$$\Phi(\lambda z) \geq \Phi(z) + n \log(1 + |z|^2) - C(\lambda).$$

d) Pour tout  $r < 1$ , il existe une constante  $B(r)$  telle que

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leq B(r)$$

où

$$\tilde{\Phi}(\zeta) = \sup_{|\omega| \leq 1} \Phi(\zeta + \omega).$$

Alors pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , les polynômes sont denses dans  $H^p(\exp(-\Phi))$ .

*Démonstration.* — L'hypothèse b) montre que  $\|f_r\|_p \rightarrow \|f\|_p$  lorsque  $r$  tend vers 1. Il est clair que  $f_r$  converge ponctuellement vers  $f$ , par suite d'après [6] p. 208  $f_r$  converge vers  $f$  dans  $H^p(\exp(-\Phi))$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Lorsque  $p = +\infty$  on a

$$|f(rz)| \exp(-\Phi(z)) \leq \exp(B) |f(rz)| \exp(-\Phi(rz)).$$

Donc  $f_r \in H^\infty(\exp(-\Phi))$  et  $f_r$  converge vers  $f$  dans cet espace.

Poursuivons la démonstration lorsque  $p = +\infty$ .

Nous allons approximer  $f_r$ ,  $r < 1$ . Soit  $r_0 < r' < 1$

$$|f_r(z)| \leq \exp(B) \|f\|_\infty \exp(\Phi(rz))$$

$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq \exp(B) \|f\|_\infty \exp(-2\Phi(r'z) - 2\Phi(rz))$   
or d'après c')

$$\Phi(r'z) \geq \Phi(rz) + n \log(1 + |rz|^2) - A \left( \frac{r'}{r} \right)$$

Donc

$$|f_r(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z)) \leq C_r \|f\|_\infty (1 + |rz|^2)^{-2n},$$

d'où on a  $f_r \in H^2(\exp(-\Phi_{r'}))$

$\Phi_{r'}$  vérifiant les hypothèses du corollaire 16. Par suite il existe une suite  $p_j$  de polynômes tels que  $\varepsilon_j$  tende vers zéro lorsque  $j$  tend vers l'infini, où

$$\varepsilon_j = \int |f(rz) - p_j(z)|^2 \exp(-2\Phi(r'z))$$

Mais  $|f_r - p_j|^2$  étant plurisousharmonique, on a

$$\begin{aligned} |f_r(z) - p_j(z)|^2 &\leq V_n^{-1} \int_{|u| \leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 d\lambda(u) \\ &\leq V_n^{-1} \int_{|u| \leq 1} |f_r(z+u) - p_j(z+u)|^2 \\ &\quad \exp(-2\Phi_r(z+u)) \exp(2\Phi_r(r+u)) d\lambda(u) \\ &\leq V_n^{-1} \exp(2\tilde{\Phi}_r(z)) \varepsilon_j, \end{aligned}$$

$V_n$  désigne le volume de la boule unité dans  $\mathbf{C}^n$ .

D'où

$$\exp(-\Phi(z)) |f_r(z) - p_j(z)| \leq V_n^{-\frac{1}{2}} \exp[\tilde{\Phi}_r(z) - \Phi(z)] \varepsilon_j$$

l'hypothèse *d*) montre que  $p_j$  converge vers  $f_r$  lorsque  $j$  tend vers l'infini puisque  $\tilde{\Phi}_r(z) - \Phi(z)$  est borné.

La démonstration pour  $1 \leq p < \infty$  suit les mêmes étapes.

*Exemple 18.* — Si  $\Phi$  est positivement homogène d'ordre  $\rho > 0$ , c'est-à-dire vérifie  $\Phi(tz) = t^\rho \Phi(z)$  pour tout  $t > 0$ , les conditions *b*), *c'*) et *d*) sont vérifiées. C'est clair pour les conditions *b*) et *c'*). Pour *d*) soit  $r < 1$  et  $|u| \leq 1$ , on a

$$\Phi(rz + u) = |rz + u|^\rho \Phi\left(\frac{rz + u}{|rz + u|}\right) = |rz + u|^\rho \Phi(\alpha)$$

où  $|\alpha| = 1$  et  $\Phi(z) = |z|^\rho \Phi(\beta)$  avec  $\beta = z|z|^{-1}$ . D'où il résulte que

$$\Phi(rz + u) - \Phi(z) = |rz + u|^\rho \Phi(\alpha) - |z|^\rho \Phi(\beta).$$

Or on a

$$|\alpha - \beta| = \frac{|(r|z| - (rz + u))|}{|rz + u|} \leq \frac{|u|}{|rz + u|},$$

$r$  étant fixé; on voit que  $|\alpha - \beta|$  est arbitrairement petit pour  $|z|$  assez grand, indépendamment de  $u$ . Donc si  $\varepsilon > 0$ ,  $\Phi(\alpha) \leq (1 + \varepsilon)\Phi(\beta)$  pour  $|z|$  assez grand, par suite

$$\tilde{\Phi}(rz) - \Phi(z) \leq \Phi(\beta)[(1 + \varepsilon)(|rz| + 1)^\rho - |z|^\rho] \leq B(r)$$

si  $r^\rho(1 + \varepsilon) \leq 1$ .

**COROLLAIRE 19.** — Si  $\Phi$  est p.s.h. homogène complexe, d'ordre  $\rho > 0$  i.e. si  $\Phi(uz) = |u|^\rho \Phi(z)$  pour tout  $u \in \mathbf{C}$  et  $z \in \mathbf{C}^n$ . Alors les polynômes sont denses dans  $H^p(\exp(-\Phi))$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$ .

*Démonstration.* — Comme on vient de le voir, il suffit de vérifier la condition a) de la proposition 17. Il est clair que  $\Phi$  est positive et d'après [9], th. 2.5.1  $\log \Phi$  est p.s.h.. Or  $\Phi = \sup_N \log \left( \sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!} \right)$ , la fonction  $\Phi_N = \log \left( \sum_0^N \frac{\Phi^p}{p!} \right)$  est p.s.h. car il en est ainsi de  $\log \left( \frac{\Phi^p}{p!} \right)$  pour tout  $p$ , de plus  $\exp(\Phi_N)$  est à croissance polynomiale. La proposition 17 permet de conclure.

*Remarque 20.* — Signalons une extension du théorème 6.

Soit  $\Phi$  une fonction convexe dans  $\mathbf{C}^n$  telle que  $\exp(-\Phi)$  soit un poids. Si  $\alpha > 0$ , alors pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , les polynômes sont denses dans  $H^p(\exp(-\Phi^\alpha))$ .

En effet, comme on l'a remarqué à la fin du lemme 7, la fonction  $\Phi^\alpha$  vérifie l'hypothèse a). De plus, si on suppose  $\Phi(0) = 0$ , on a  $\Phi^\alpha(tz) \geq t^\alpha \Phi^\alpha(z)$  pour  $t > 1$  car  $\Phi$  est convexe. Cette inégalité permet de vérifier que les conditions b) et c') sont satisfaites.

On peut supposer  $\alpha < 1$ , car si  $\alpha \geq 1$  la fonction  $\Phi^\alpha$  est convexe et le résultat est alors un cas particulier du théorème 6.

On a vu que  $\tilde{\Phi}(rz) \leq \Phi(z) + A(r)$ , puisque  $\Phi$  est convexe. D'où l'on déduit lorsque  $\alpha < 1$

$$\tilde{\Phi}^\alpha(rz) \leq \Phi^\alpha(z) + A^\alpha(r).$$

Donc la condition d) de la proposition 17 est satisfaite.

## 5. Conditions nécessaires d'approximation.

Nous allons montrer que si  $\Phi$  est une fonction p.s.h. continue, dans un domaine d'holomorphic  $\Omega$ , qui croît assez vite vers le bord de  $\Omega$ , elle s'écrit  $\Phi(z) = \left( \sup_v c_v \log |a_v| \right)^*(z)$  pour  $z \in \Omega$  où  $c_v > 0$  et  $a_v$  sont des fonctions holomorphes dans  $\Omega$ . Les conditions nécessaires pour l'approximation en découleront. Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires.

Dans [2], I. Cnop a démontré le théorème suivant.

**THÉORÈME 21.** — Soit  $\Omega$  un domaine d'holomorphic dans  $\mathbf{C}^n$ , il existe des fonctions  $u_0, u_1, \dots, u_n$  définies dans  $\mathbf{C}^n \times \Omega$



telles que, pour tout  $s \in \mathbf{C}^n$ ,  $u_i(s)$  soient des fonctions holomorphes dans  $\Omega$  et vérifient

$$(11) \quad (\zeta_1 - s_1)u_1(s, \zeta) + \cdots + (\zeta_n - s_n)u_n(s, \zeta) + \delta_\Omega(s)u_0(s, \zeta) = 1$$

pour tout  $(s, \zeta) \in \mathbf{C}^n \times \Omega$ . De plus, il existe un entier  $N$  et une constante  $M > 0$ , tels que

$$\delta_\Omega^N(\zeta)|u_i(s, \zeta)| \leq M \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Nous en déduisons le corollaire.

**COROLLAIRE 22.** — Pour tout  $\zeta^0 \in \partial\Omega$ , il existe une fonction  $f \in E(N, \Omega)$ , i.e. vérifiant  $\delta_\Omega^N|f| \leq 1$  telle que  $f$  soit non bornée au voisinage de  $\zeta^0$ .

*Démonstration.* — En effet, si chaque  $u_i(\zeta^0, \cdot)$  était borné au voisinage de  $\zeta^0$  on aurait, puisque  $\delta_\Omega(\zeta^0) = 0$ ,

$$1 \leq \sum |u_i(\zeta^0, \zeta)| |\zeta_i - \zeta_i^0| \leq K \sum |\zeta_i - \zeta_i^0|$$

ce qui est impossible dans un voisinage de  $\zeta^0$ .

**PROPOSITION 23.** — Soit  $\Omega$  un domaine d'holomorphie dans  $\mathbf{C}^n$ . Il existe une fonction  $f$  holomorphe dans  $\Omega$  et un entier  $N$ , tels que  $\sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^N(z)|f(z)| < \infty$  et que  $f$  ne soit bornée au voisinage d'aucun point du bord de  $\Omega$ .

*Démonstration.* — Soit une suite de points dense sur la frontière de  $\Omega$  et soit  $(B_j)$  la famille dénombrable de polydisques de rayons rationnels centrés en ces points. Désignons par  $E_j$  l'espace des fonctions  $f$ , holomorphes dans  $\Omega$ , telles que

$$\|f\|_N = \sup_{z \in \Omega} \delta_\Omega^N(z)|f(z)| \quad \text{et} \quad \|f\|_j = \sup_{z \in \Omega \cap B_j} |f(z)|$$

soient bornées. L'entier  $N$  étant le même que dans le théorème 21.

On norme l'espace  $E_j$  en posant  $\|f\| = \sup(\|f\|_N, \|f\|_j)$ ; c'est un espace de Banach.

Considérons l'application de restriction  $R_j: E_j \rightarrow E(N, \Omega)$ . Cette application est continue et le corollaire précédent montre qu'elle n'est pas surjective, il en résulte d'après le théorème des homomorphismes que  $R_j(E_j)$  est maigre dans

$E(N, \Omega)$ . Il en est de même de la réunion  $\bigcup_j R_j(E_j)$ . Soit  $f$  appartenant à  $E(N, \Omega)$  et n'appartenant à aucun des  $R_j(E_j)$ , il est clair qu'une telle fonction n'est bornée sur aucun des  $B_j \cap \Omega$ , c'est-à-dire au voisinage d'aucun point du bord. En particulier  $\Omega$  est son domaine d'holomorphic.

Remarquons que le théorème de I. Cnop permet d'associer à chaque domaine d'holomorphic  $\Omega$  un entier  $N \geq 1$  tel que  $\Omega$  soit le domaine d'existence d'une fonction  $f \in E(N, \Omega)$ . Dans [11], nous étudions les domaines pour lesquels  $N = 0$ , c'est-à-dire ceux qui sont domaine d'holomorphic d'une fonction bornée.

**PROPOSITION 24.** — Soit  $\Phi$  une fonction p.s.h. dans  $\Omega$ , continue, telle qu'on ait  $\Phi(z) \geq -\log \delta_\Omega(z)$  et que  $\exp(-\Phi)$  soit lipschitzienne de rapport 1. Alors il existe une suite  $a_\nu$  de fonctions holomorphes dans  $\Omega$  telle que

$$\Phi(z) = \left( \sup_\nu c_\nu \log |a_\nu| \right)^*(z) \quad \text{pour tout } z \in \Omega \quad \text{avec } c_\nu > 0.$$

*Démonstration.* — Considérons l'ouvert où

$$\tilde{\Omega} = \{(z, \varpi) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid z \in \Omega, \varpi \in \mathbf{C}, |\varpi| < \exp(-\Phi(z))\}.$$

Il est clair que  $d_{\tilde{\Omega}}(z, \varpi) \leq \exp(-\Phi(z)) - |\varpi|$  et que

$$d_{\tilde{\Omega}}(z, \varpi) \geq d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) - |\varpi|.$$

Or  $d_{\tilde{\Omega}}(z, 0) \leq \exp(-\Phi(z))$  et si  $(z', \varpi') \notin \tilde{\Omega}$  on a

$$|z - z'| + |\varpi'| \geq \exp(-\Phi(z))$$

car la fonction  $\exp(-\Phi)$  est lipschitzienne et vaut 0 au bord de  $\Omega$ .

Remarquons que l'hypothèse implique que  $|z| \exp(-\Phi(z))$  est bornée sur  $\Omega$ ; donc on peut supposer

$$\exp(-\Phi(z)) - |\varpi| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z, \varpi).$$

En appliquant la proposition 23, il existe  $f \in E(k, \tilde{\Omega})$  dont  $\tilde{\Omega}$  soit le domaine d'holomorphic. Considérons le développement de Hartogs de  $f$  [1],

$$f(z, \varpi) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu(z) \varpi^\nu \quad \text{où} \quad a_\nu(z) = \frac{1}{\nu!} D^\nu f(z, 0).$$

Posons  $-\log R(z) = \left( \overline{\lim}_v \frac{1}{v} \log |a_v| \right)^* (z)$ . D'après un théorème de Hartogs, la série  $\sum_v a_v(z) \varpi^v$  est définie et holomorphe dans le domaine  $\Omega_R = \{(z, \varpi) | z \in \Omega, |\varpi| < R(z)\}$ . On a

$$\tilde{\Omega} \subset \Omega_R,$$

et  $\tilde{\Omega}$  étant le domaine d'existence de  $f$ , on a  $\tilde{\Omega} = \Omega_R$ , d'où  $\exp(-\Phi(z)) = R(z)$ . Il en résulte que, pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$(12) \quad \Phi(z) = -\log R(z) = \left( \overline{\lim}_v \frac{1}{v} \log |a_v| \right)^* (z)$$

Puisque  $f \in E(k, \delta_{\tilde{\Omega}})$  on peut supposer

$$\sup_{(z, w) \in \tilde{\Omega}} \delta_{\tilde{\Omega}}^k(z, w) |f(z, w)| \leq 1.$$

Or

$$a_v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z, r \exp(-\Phi(z)) e^{i\theta}) r^{-v} \exp(v\Phi(z)) e^{-iv\theta} d\theta$$

avec  $r < 1$ ; d'où

$$|a_v(z)| < (2\pi)^{-1} r^{-v} \exp(v\Phi(z)) \int_0^{2\pi} \delta_{\tilde{\Omega}}^{-k}(z, r \exp(-\Phi(z)) e^{i\theta}) d\theta.$$

On a vu qu'on peut supposer  $\exp(-\Phi(z)) - |\varpi| \leq \delta_{\tilde{\Omega}}(z, \varpi)$ ; par suite

$$|a_v(z)| \leq r^{-v} \exp(v\Phi(z)) \cdot (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} (1-r)^{-k} \exp(+k\Phi(z)) d\theta$$

d'où

$$|a_v(z)| \leq r^{-v} (1-r)^{-k} \exp((v+k)\Phi(z)).$$

Pour  $v$  fixé, posons  $r = v(v+k)^{-1}$  on trouve alors

$$|a_v(z)| \leq (v+k)^{(v+k)} v^{-v} k^{-k} \exp[(v+k)\Phi(z)].$$

Donc

$$(13) \quad \frac{1}{v+k} \log K_v |a_v(z)| \leq \Phi(z)$$

où

$$K_v = v^v k^v (v+k)^{-(v+k)}.$$

Nous allons montrer que  $\Phi(z) = \left( \sup_v \frac{1}{v+k} \log K_v |a_v| \right)^* (z)$ .

Or

$$\frac{1}{\nu + k} \log K_\nu |a_\nu(z)| = \frac{1}{\nu + k} \log K_\nu + \frac{1}{\nu + k} \log |a_\nu(z)|;$$

et on voit facilement que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu + k} \log K_\nu = 0$ ; donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu + k} \log K_\nu |a_\nu(z)| &= \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu + k} \log |a_\nu(z)| \\ &= \overline{\lim}_\nu \frac{1}{\nu} \log |a_\nu(z)| \end{aligned}$$

d'où le résultat, d'après les relations (12) et (13).

**THÉORÈME 25.** — Soit  $\delta$  une fonction positive définie dans  $\mathbb{C}^n$ , lipschitzienne avec  $\delta \leq \delta_0$  et  $-\log \delta$  p.s.h. dans

$$\Omega = \{z/\delta(z) > 0\}.$$

L'espace  $H(\Omega')$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$ , au sens de la définition 11, si et seulement si

$$-\log \delta = \left( \sup_{i \in J} c_j \log |f_j| \right)^*$$

avec  $c_i > 0$  et  $f_i \in H(\Omega)$ .

*Démonstration.* — Le fait que la condition soit suffisante résulte du théorème 9, puisque  $c_j \log |f_j|$  est p.s.h. dans  $\Omega'$  et qu'on prend tous les  $\Omega_i$  égaux à  $\Omega'$ . Montrons que la condition est nécessaire.

La fonction  $-\log \delta$  vérifie les hypothèses de la proposition 24, par suite

$$(14) \quad -\log \delta(z) = \left( \sup_\nu \frac{1}{\nu} \log |a_\nu| \right)^*(z) \quad \text{pour } z \in \Omega.$$

On peut supposer aussi que

$$\overline{\lim}_\nu (\nu^{-1} \log |a_\nu|) = \sup_\nu (\nu^{-1} \log |a_\nu|).$$

D'après (14), on a  $\delta^\nu(z) |a_\nu(z)| \leq 1$  pour  $z \in \Omega$ , i.e.

$$a_\nu \in E(\nu, \delta);$$

puisque  $H(\Omega')$  est dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$  il existe un entier

$\gamma > 0$  et une suite de fonctions  $a_{\nu, p} \in H(\Omega')$  tels que, pour tout  $z \in \Omega$

$$\delta^{\nu+\gamma}(z) |a_{\nu}(z) - a_{\nu, p}(z)| \leq p^{-1}$$

donc

$$\delta^{\nu+\gamma}(z) |a_{\nu, p}(z)| \leq (1 + p^{-1}).$$

Par suite

$$\frac{1}{\nu + \gamma} \log (1 + p^{-1}) |a_{\nu, p}| \leq -\log \delta.$$

Or

$$\frac{1}{\nu + \gamma} \log |a_{\nu}(z)| \leq \sup_p \log (1 + p^{-1}) |a_{\nu, p}(z)|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\nu} \frac{1}{\nu} \log |a_{\nu}| &= \overline{\lim}_{\nu} \frac{1}{\nu + \gamma} \log |a_{\nu}| \\ &\leq \sup_{p, \nu} \frac{1}{\nu + \gamma} \log (1 + p^{-1}) |a_{\nu, p}(z)|, \end{aligned}$$

et

$$-\log \delta(z) = \left( \sup_{\nu, p} \frac{1}{\nu + \gamma} \log (1 + p^{-1}) |a_{\nu, p}| \right)^*(z)$$

pour tout  $z \in \Omega$ .

La démonstration montre que les polynômes sont denses dans  $\mathcal{O}(\delta)$  si et seulement si  $-\log \delta(z) = (\sup c_i \log |p_j|)^*(z)$ , les  $p_j$  étant des polynômes.

**COROLLAIRE 26.** — Soit  $\delta$  vérifiant les hypothèses du théorème 25. Si  $c\delta_{\Omega}^{-2}$  est un module de plurisousharmonicité pour  $-\log \delta$  alors les conditions suivantes sont équivalentes.

i)  $H(\Omega') \cap H^2(\Omega, \delta^k)$  est dense dans  $H^2(\Omega, \delta^k)$  pour tout entier  $k > 0$ .

ii)  $-\log \delta(z) = (\sup_i c_i \log |f_i|)^*(z)$  pour

$$z \in \Omega \quad f_i \in H(\Omega') \quad c_i > 0.$$

*Démonstration.* — Si i) est vérifiée,  $H(\Omega')$  est alors dense dans  $\mathcal{O}(\delta)$ . En effet

$$E(k, \delta) \hookrightarrow H^2(\Omega, \delta^{2k+2n+1}) \hookrightarrow E(k + 2n + 4, \delta)$$

les injections étant continues, il suffit d'appliquer le théorème précédent.

Lorsque la condition ii) est vérifiée on peut appliquer la proposition 4 pour en déduire i).

Je voudrais terminer, en remerciant J.-P. Ferrier avec qui j'ai eu de nombreuses discussions, qui m'ont beaucoup aidé.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BREMERMAN, Die Charakterisierung Rungescher Gebiete..., *Math. Annalen*, 136 (1958), 173-186.
- [2] I. CNOP, Spectral study of holomorphic functions with bounded growth, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 293-310.
- [3] DE BRANGES, Hilbert spaces of entire functions, Prentice Hall, 1968.
- [4] J.-P. FERRIER, Approximation des fonctions holomorphes de plusieurs variables avec croissance, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 67-87.
- [5] J.-P. FERRIER, Spectral theory and complex analysis, North Holland Publishing Cny, 1973.
- [6] E. HEWITT and K. STROMBERG, Real and abstract analysis, Springer Verlag, 1965.
- [7] L. HÖRMANDER,  $L^2$ -estimates and existence theorems for the  $\bar{\partial}$ -operator, *Acta Math.*, 13 (1965), 89-152.
- [8] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand Cny, 1966.
- [9] P. LELONG, Fonctionnelles analytiques et fonctions entières ( $n$  variables), Montréal, Presses de l'Université, 1968.
- [10] N. SIBONY, Approximation polynomiale pondérée sur un domaine d'holomorphic de  $C^n$ , *C.R.A.S.*, Paris, t. 276 (1973), 249-252.
- [11] N. SIBONY, Prolongement analytique des fonctions holomorphes bornées. *C.R.A.S.*, Paris, t. 275 (1973), 973-976.
- [12] B. A. TAYLOR, On weighted polynomial approximation of entire functions, *Pacific J. Math.*, 36 (1971), 523-539.

Manuscrit reçu le 23 avril 1975

Proposé par J. P. Kahane.

Nessim SIBONY,  
Université Paris Sud  
Centre d'Orsay  
Mathématiques, Bât. 425  
91405 Orsay.