Annales de l'institut Fourier

Alain Escassut

T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier P-adique

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 2 (1975), p. 45-80

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 45-80

T-FILTRES, ENSEMBLES ANALYTIQUES ET TRANSFORMATION FOURIER P-ADIQUE

par Alain ESCASSUT

INTRODUCTION

On sait que tout élément non nul et non quasi-minoré d'une algèbre de Krasner H(D) sans idempotent non trivial est strictement annulé par un filtre monotone percé (théorèmes II.7 et II.8 de [3]), de sorte que l'étude de l'analycité au sens de Motzkin [10] d'un infraconnexe D d'un corps K algébriquement clos, ultramétrique complet se ramène à l'étude des filtres monotones percés de D qui possèdent la propriété d'annuler strictement un élément de H(D). On cherchera donc à caractériser ces filtres par des propriétés géométriques concernant la répartition des trous de D.

Les applications de ce résultat sont nombreuses et nous montrerons ici comment on peut résoudre le problème de la non injectivité de la transformation de Fourier p-adique posé par B. de Mathan, grâce à une transposition très originale du problème, obtenue par Yvette Amice. Dans un article ultérieur, nous utiliserons également ces résultats pour caractériser les algèbres H(D) noethériennes et intègres.

I. CARACTERISATION DES FILTRES STRICTEMENT ANNULATEURS

Par soucis de concision, nous utiliserons sans les redéfinir certaines expressions déjà définies dans [2] et [3] auxquelles nous renverrons le lecteur chaque fois qu'il sera nécessaire, notamment en ce qui concerne la définition et les propriétés des fonctions $v(f, \mu)$ et $w(f, \mu)$. Précisons à ce sujet que l'on note $|\,.\,|$ la valeur absolue de K et que l'on choisit une fonction logarithme notée log, de base $p > 1$, qui définit une valuation v de K par $v(x) = -\log |x|$.

Dans [3], on a pu mettre en évidence l'importance des filtres monotones sur un infraconnexe D, pour l'étude des éléments non quasi-minorés.

La proposition I.6 nécessite l'introduction de l'expression $\gamma(A, q)$ que nous allons définir et étudier.

1. Définition de $\gamma_D(A, q)$.

Soit D un infraconnexe de diamètre R. Soit A un disque non circonférencié de diamètre $r \leqslant R$ tel que $A \cap D \neq A$, et $A \subset \underline{\underline{D}}$.

Soit $\epsilon(A, q)$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré q dont les zéros appartiennent tous à $A - A \cap D$.

si $A \cap D \neq \phi$, soit $\gamma_D(A, q) = r^q \inf\limits_{P \in \epsilon(A, q)} \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D}$

si $A \cap D = \phi$, soit $\gamma_D(A, q) = 1$.

Par définition, tout polynôme unitaire P de degré q dont les zéros appartiennent tous aux trous de D inclus dans A vérifie donc :

$$\left| \frac{1}{P(x)} \right| \geqslant \frac{\gamma_D(A, q)}{r^q} \quad \text{pour tout } x \in A \cap D.$$

Nous allons maintenant calculer $\gamma_D(A, q)$ en fonction des trous de D inclus dans A. Nous établirons d'abord le lemme suivant.

I.1. Lemme. – *Soit* D *un infraconnexe et soit* A *un disque non circonférencié de diamètre* r *tel que* $A \cap D \neq D$, $A \cap D \neq D$ *et* $A \subset \underline{\underline{D}}$. *Soit* $q \in N$ *et soit* $P \in \epsilon(A, q)$. *Soient* $T_1, \ldots, T_n$ *les trous de* D *contenant au moins un zéro de* P, *soit* ρ_i *le diamètre de* T_i, *soit* $a_i \in T_i$ *et soit* p_i *la somme des ordres de multiplicité des zéros de* P *appartenant au trou* T_i. *Alors il existe* $l \leqslant n$ *tel que*

$\alpha)$: $\sup\limits_{x \in A \cap D} (v(P(x))) = v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$ *et l'on a*

$$\beta) : \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \frac{1}{\rho_l^{p_l} \prod_{k \neq l} |a_k - a_l|^{p_k}} .$$

Preuve. – La première assertion est évidente si tous les zéros de P appartiennent à un même trou T_{a_l} car dans ce cas on a $v(P(x)) = v_{a_l}(P, v(x - a_l))$ pour tout $x \in T_{a_l}$ et d'autre part $v_{a_l}(P, \mu) \leqslant v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$ pour tout $\mu \leqslant -\log \rho_l$, de sorte que $v_{a_l}(P, -\log \rho_l) \geqslant v(P(x))$ pour tout $x \in A \cap D$ donc

$$v_{a_l}(P, -\log \rho_l) \geqslant + \log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D}$$

et comme on a trivialement

$$v_{a_l}(P, -\log \rho_l) = \lim_{\substack{|x - a_l| \to \rho_l \\ x \in A \cap D}} v(P(x)) \leqslant \log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} ,$$

on a bien $\log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$. Nous allons en déduire la 1ère assertion dans le cas général grâce au théorème de Mittag-Leffler ([8] et [12]). En effet il est clair que $\frac{1}{P}$ admet une décomposition unique de la forme $\sum_{i=1}^{n} h_i$ telle que $h_i \in K(C T_i)$. Alors d'après le théorème de Mittag-Leffler, on a $\left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| h_i \|_{A \cap D}$ et il existe un entier $l \leqslant n$ tel que $\left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = \| h_l \|_{A \cap D}$ donc d'après ce qui précède $\log \left\| \frac{1}{P} \right\|_{A \cap D} = v_{a_l}(P, -\log \rho_l)$.

Il est maintenant immédiat d'établir la seconde assertion. Pour plus de simplicité, supposons les points a_i indexés de façon telle que $l = 1$ et que $|a_i - a_1| \leqslant |a_j - a_1|$ pour $1 < i < j$. Enfin notons

$$|a_2 - a_1| = \cdots = |a_{m_1} - a_1| = d_1 ,$$

$$|a_{m_1+1} - a_1| = \cdots = |a_{m_2} - a_1| = d_2 ,$$

$$|a_{m_{q-1}+1} - a_1| = \cdots = |a_n - a_1| = d_q \quad \text{et soit} \quad m_q = n .$$

Alors on sait ([9] et lemme I.1 de [3]) que

$$v_{a_1}(\mathrm{P}\,,-\log\rho_1)=-p_1\log\rho_1-\sum_{j=1}^{q-1}\Big(\sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}p_i\log d_j\Big)\,,$$

ce qui nous donne, par exponentiation et en utilisant la relation α) déjà obtenue :

$$\Big\|\frac{1}{\mathrm{P}}\Big\|_{\mathrm{A}\cap\mathrm{D}}=\Big(\frac{1}{\rho_1}\Big)^{p_1}\prod_{j=1}^{q-1}\Big(\prod_{i=m_j+1}^{m_{j+1}}\Big(\frac{1}{d_j}\Big)^{p_i}\Big).$$

Or il est clair que cette dernière relation est équivalente à la relation β) et s'obtient en remplaçant dans β) les expressions $|a_k-a_l|$ par les nombres d_j correspondants, définis ci-dessus. La relation β) est donc établie.

Le calcul de $\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}\,,q)$ se déduit maintenant de façon évidente du lemme I.1.

I.2. THEOREME. – *Soit* D *un infraconnexe et soit* A *un disque non circonférencié tel que* $\mathrm{A}\subset\underline{\underline{\mathrm{D}}}$ *et* $\mathrm{A}\cap\mathrm{D}\neq\phi$. *Soit* $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *la famille des trous de* D *inclus dans* A *et pour tout* $i\in\mathrm{I}$, *soit* $a_i\in\mathrm{T}_i$. *Alors pour tout* $q\in\mathbf{N}$, *on a :*

$$\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)=r^q\sup_{\substack{j=1,\dots,s\\ i_1,\dots,i_s\in\mathrm{I}\\ p_1+\dots+p_s=q\\ s\leqslant q}}\frac{1}{\rho_{i_l}^{p_l}\prod_{k\neq l}|a_{i_k}-a_{i_l}|^{p_k}}\,.$$

Preuve. – En effet, lorsque P parcourt $\epsilon(\mathrm{A}\,,q)$, s parcourt $[1\,,q]\cap\mathbf{N}$, et pour chaque valeur fixée de s, $p_1,\dots,p_s$ prennent toutes les valeurs telles que $\sum_{j=1}^{s}p_j=q$, $(i_1\,,\dots,i_s)$ parcourt I^s et j parcourt $(1\,,s)\cap\mathbf{N}$.

En particulier, si A ne contient qu'un seul trou T de D, de diamètre ρ, on a :

$$\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)=\Big(\frac{\mathrm{R}}{\rho}\Big)^q.$$

De même si l'ensemble des trous de D inclus dans A est une famille de trous contigüs de diamètre ρ,

$$\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)=\left(\frac{\mathrm{R}}{\rho}\right)^{q}.$$

Si D admet par exemple deux trous, T_1 et T_2 de diamètres respectifs ρ_1 et ρ_2, de distance d, alors

$$\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)=r^{d}\inf_{p_1+p_2=q}\left(\min\left(\frac{1}{\rho^{p_1}d^{p_2}}\,,\,\frac{1}{\rho^{p_2}d^{p_1}}\right)\right)$$

2. Propriétés de $\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)$.

I.3. Proposition. — *Soit* D *un infraconnexe et soit* A *un disque non circonférencié tel que* $\mathrm{A}\subset \underline{\underline{\mathrm{D}}}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{D}\neq\phi$, $\mathrm{A}\cap\complement\mathrm{D}\neq\phi$ *et soit* r *le diamètre de* A. *Soit* $h\in \mathrm{K(D)}$, $h=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *où* Q *est unitaire et a tous ses zéros dans* $\mathrm{A}-\mathrm{A}\cap\mathrm{D}$, *et* P *est unitaire et a tous ses zéros dans* A. *Soit* $q=\deg\mathrm{Q}-\deg\mathrm{P}$. *On suppose* $q\geqslant 0$. *Alors :*

$$r^{q}\,\|h\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\geqslant\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)\,. \tag{1}$$

Preuve. — Soit $(a\,,b)$ un couple (zéro, pôle) de h tel que $|a-b|$ soit minimal. h n'a donc aucun zéro dans le disque non circonférencié Δ de centre a, de rayon $|a-b|$.

Soit $h_1=h\dfrac{x-a}{x-b}$. Nous allons montrer que

$$\|h_1\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\leqslant\|h\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\,. \tag{2}$$

Alors nous en déduirons qu'il existe un polynôme R de degré q ayant tous ses zéros dans $\mathrm{A}-\mathrm{A}\cap\mathrm{D}$, tel que :

$$\left\|\frac{1}{\mathrm{R}}\right\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\leqslant\|h\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\,, \tag{3}$$

et le résultat (1) sera établi car par hypothèse on a :

$$r^{q}\left\|\frac{1}{\mathrm{R}}\right\|_{\mathrm{D}\cap\mathrm{A}}\geqslant\gamma_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}\,,q)\,.$$

Montrons donc (2). Soit $h = \dfrac{P_1}{Q_1}$ sous sa forme irréductible unitaire. Remarquons d'abord que

$$\|h_1\|_{D-\Delta\cap D} \leqslant \|h\|_{D-\Delta\cap D}, \quad \text{car}$$

$$\left|\frac{x-b}{x-a}\right| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad |x-a| \geqslant |a-b| \, .$$

Or h_1 n'ayant pas de pôle dans Δ, (car $|a-b|$ est minimal), son dénominateur irréductible Q_1 y est constant en valeur absolue. On a donc

$$\|h_1\|_\Delta = \frac{\|P_1\|_\Delta}{\|Q_1\|_\Delta} \, .$$

Donc :

$$-\log \|h_1\|_\Delta = -\log \|P_1\|_\Delta + \log \|Q_1\|_\Delta$$

$$= v_a(P_1\,, v(a-b)) - v_a(Q_1\,, v(a-b)) = v_a(h_1\,, v(a-b)) \, .$$

Soit $\theta_1(x) = \dfrac{x-a}{x-b}$. Alors :

$$v_a(h_1\,, v(a-b)) = v_a(h\,, v(a-b)) + v_a(\theta_1\,, v(a-b)) \, ,$$

or $\quad v_a(\theta_1\,, v(a-b)) = 0$.

Donc $v(h_1\,, v(a-b)) = v_a(h\,, v(a-b))$.

Donc $-\log \|h_1\|_\Delta = v_a(h\,, v(a-b))$.

Mais il est connu que $v_a(h\,, v(a-b)) \geqslant -\log \|h\|_\Delta$ car

$$v_a(h\,, v(a-b)) = -\log\left(\frac{\|P\|_\Delta}{\|Q\|_\Delta}\right) \geqslant -\log \left\|\frac{P}{Q}\right\|_\Delta \, .$$

Donc la relation (2) *est montrée.* Alors soit n le degré de P. On voit qu'après n opérations semblables, on obtient une fraction h_n qui est de la forme $\dfrac{1}{R}$, d'où la relation (3).

Nous allons maintenant définir une variété particulière de filtres monotones percés appelés T-filtres, dont nous montrerons ensuite qu'ils sont caractérisés par la propriété d'annuler strictement certains éléments analytiques.

3. Définition d'un T-filtre.

Les filtres monotones sur un infraconnexe fermé borné ont été introduits dans [3] (II, § 2) pour caractériser les éléments f non quasi-minorés de H(D), ([2] IV), c'est-à-dire tels qu'il existe une suite a_n de D sans point adhérent tel que $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0$.

Rappelons qu'un *filtre décroissant de* K est un filtre qui admet une base de la forme $D_n = d_n - \bigcap_{i=1}^{\infty} d_i$ où (d_n) est une suite de disques strictement décroissante. De même on appelle *filtre décroissant* $\mathcal{F}$ *d'un infraconnexe* D l'intersection avec D d'un filtre décroissant de K sécant à D. On note $\Delta(\mathcal{F})$ l'ensemble $\bigcap_{d \in \mathcal{F}} \underline{\underline{d}}$ et on appelle *centre* de $\mathcal{F}$ tout point de $\Delta(\mathcal{F})$; enfin on appellera ici *plage* de $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \Delta(\mathcal{F}) \cap D$.

De même on appelle *filtre croissant* de K un filtre image d'un filtre décroissant $\mathcal{F}$ de K par une inversion centrée en un centre de $\mathcal{F}$; on appelle *filtre croissant d'un infraconnexe* D l'intersection avec D d'un filtre croissant de K. Enfin si un filtre $\mathcal{F}$ croissant de D est l'image par une inversion $\mathcal{J}$ d'un filtre décroissant $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$(D), on appellera *plage* de $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \mathcal{J}(\mathcal{P}(\mathcal{F}'))$.

Pratiquement, tout filtre croissant $\mathcal{F}$ d'un infraconnexe D admet une base de la forme $D_n = (A - d_n) \cap D$, où A est un disque non circonférencié et où d_n est une suite strictement croissante de disque inclus dans A telle que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} d_n$. Alors $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = (\complement A) \cap D$.

Pour tout $a \in K$ et $r \in R^+$, on notera $C(a, r)$ le *cercle* $\{x \in K / |x - a| = r\}$.

Nous dirons qu'une suite de cercles $C(a_n, r_n)$ de K est *décroissante* si $|a_{n+1} - a_n| < r_n$ et si $r_{n+1} < r_n$. Il est clair qu'un filtre décroissant de K peut être associé à une suite décroissante de cercles $C_n = C(a_n, r_n)$ en considérant la suite $d_n = \underline{\underline{C_n}}$ et en notant $\mathcal{F}$ le filtre décroissant admettant pour base la suite $D_n = d_n - \bigcap_{i=1}^{\infty} d_i$. Nous dirons que la suite C_n *décrit* le filtre.

De même on définit de façon évidente une *suite croissante* de cercles de K à laquelle on associe un filtre croissant.

Nous dirons qu'un cercle C de K est un *cercle percé d'un fermé borné* D si C contient au moins un trou de D. De même nous dirons qu'une classe de C est percée si elle contient au moins un trou de D.

Soit D un infraconnexe. On appelle T-*filtre décroissant* un filtre percé, décroissant, défini par une *suite décroissante de cercles percés* c_m de rayons respectifs d_m vérifiant la propriété suivante : c_m *admet au moins un nombre fini* $k(m)$ *de classes* $\Gamma_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k(m)$; *il existe des entiers* $q_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k(m)$; *si l'on pose*

$$\gamma_m = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}), q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i},$$

on a la relation

$$\text{(T)} \qquad \lim_{m \to \infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0 .$$

De même on appelle T-*filtre croissant* un filtre percé inverse d'un T-filtre décroissant.

La définition d'un T-filtre croissant peut être interprétée de la façon suivante : un T-filtre croissant est un filtre percé croissant défini par une suite croissante de cercles percés concentriques c_m de rayons respectifs d_m vérifiant la propriété suivante : c_m *admet au moins un nombre fini* $k(m)$ *de classes* $\Gamma_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k(m)$; *il existe des entiers* $q_{m,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k(m)$; *si l'on pose*

$$\gamma_m = \sup_{i=1,\ldots,k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}), \; q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i},$$

on a la relation

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_m \Pi \left(\frac{d_j}{d_m}\right)^{q_m} = 0 .$$

Remarque 1. – On peut résumer dans les deux cas la condition portant sur la limite par

$$\text{(T)} \qquad \lim_{m \to \infty} \left[- \log \gamma_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j \,|\log d_m - \log d_j|\right] = + \infty .$$

Remarque 2. – Il est bon de remarquer que l'existence d'un T-*filtre à centre* est équivalente à l'existence d'une *suite "convenable"* de disques vérifiant la condition (*) définie dans [11] par E. Motzkin et P. Robba. Cette équivalence découle en effet du théorème I.2. de façon immédiate.

4. Propriété $\varphi(\mathfrak{F})$.

Nous allons maintenant traduire la définition d'un T-filtre sous une forme qui facilitera la démonstration ultérieure de la propriété : *tout* T-*filtre de* D *annule strictement des éléments de* H(D).

DÉFINITION. – *Soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre monotone percé d'un infraconnexe fermé borné* D *et soit* Q_m *une suite de polynômes unitaires de degrés* q_m. *Nous dirons que la suite* Q_m *possède la propriété* $\varphi(\mathfrak{F})$, *s'il existe une suite de cercles* C_m *de rayons* d_m, *décrivant le filtre percé* $\mathfrak{F}$, *tels que pour tout m les zéros de* Q_m *appartiennent à* $C_m \cap \complement D$ *et tels que la suite*

$$\lambda_m = \| Q_m \|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D} \qquad \textit{satisfasse}$$

$$(\mathrm{T}') \qquad \lim_{m \to \infty} \left[-\log \lambda_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j \,|\log d_m - \log d_j|\right] = +\infty \,.$$

Pour pouvoir caractériser les T-filtres par l'existence d'une suite de polynômes possédant la propriété $\varphi(\mathfrak{F})$, nous établirons d'abord le lemme I.4.

I.4. LEMME. – *Soit* D *un infraconnexe ; soit* C *un cercle de* K *et tel que* $C \cap \complement D \neq \phi$, *et* $C \subset \underline{\underline{D}}$. *Soient* $h \in K(D)$ *telle que* $h(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in C$. *Soient* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ *les classes de* C *contenant des pôles de h. Soit* R *le dénominateur d'une forme irréductible de h et pour tout* $i = 1, \dots, k$, *soit* Q_i *le plus grand diviseur unitaire de* R *dont les zéros appartiennent à* Γ_i. *Alors, on a :*

$$\| h \|_{C \cap D} \left\| \frac{1}{h} \right\|_{C} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k(m)} \left\| \frac{1}{Q_i} \right\|_{\Gamma_i \cap D} \| Q_i \|_{\Gamma_i} \,.$$

Preuve. – Soit $h_i = Q_i h$ alors h_i n'a aucun pôle ni zéro dans Γ_i et l'on a donc $|h_i(x)| = \text{Cte}$ pour $x \in \Gamma_i$ ([3],). Par conséquent $\|h\|_{\Gamma_i \cap D} \cdot \left\|\frac{1}{h}\right\|_{\Gamma_i} = \left\|\frac{1}{Q_i}\right\|_{\Gamma_i \cap D} \cdot \|Q_i\|_{\Gamma_i}$. D'autre part, h n'admet pas de zéro dans C et l'on a donc $\left\|\frac{1}{h}\right\|_{\Gamma_i} = \left\|\frac{1}{h}\right\|_{C}$ quel que soit $i = 1, \ldots, k$. Enfin comme les pôles de h appartiennent à $\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, on a

$$\sup \|h\|_{\Gamma_i \cap D} = \|h\|_{C \cap D}$$

d'où le lemme I.4.

I.5. Lemme. – *Un filtre monotone $\mathcal{F}$ est un* T*-filtre si et seulement s'il existe une suite de polynômes unitaires* Q_m *satisfaisant la propriété* $\varphi(\mathcal{F})$.

Preuve. – Gardons les notations de la définition et plaçons-nous pour démonstration dans le cas d'un filtre percé décroissant.

Supposons qu'il existe une suite de polynômes Q_m de degré q_m possédant la propriété $\varphi(\mathcal{F})$, et soient $(\Gamma_{m,i})_{1 \leqslant i \leqslant k(m)}$ les classes du cercle C_m qui contiennent des zéros de Q_m ; supposons que Q_m se factorise sous la forme $Q_m = \prod_{i=1}^{k(m)} Q_{m,i}$ où les zéros de $Q_{m,i}$ appartiennent à $\Gamma_{m,i}$, et soit $q_{m,i} = \deg(Q_{m,i})$. Alors on a trivialement $\lambda_m \geqslant \gamma_m = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i}\,;\, q_{m,i})$ ce qui prouve en considérant la famille des couples $(\Gamma_{m,i}\,;\, q_{m,i})$ que $\mathcal{F}$ est un T-filtre car la propriété $\varphi(\mathcal{F})$ implique a fortiori

$$\lim_{m \to \infty} \left[-\log \gamma_m + \sum_{j=1}^{m-1} q_j \,|\log d_m - \log d_j|\right] = +\infty .$$

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ soit un T-filtre défini par une famille $(\Gamma_{m,i}\,;\, q_{m,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k(m) \\ m \in \mathbb{N}}}$ satisfaisant la relation (T). Pour tout couple (m, i) $(m \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant k(m))$ soit $Q_{m,i} \in \epsilon(\Gamma_{m,i}\,;\, q_{m,i})$ tel que

$$\left\|\frac{1}{Q_{m,i}}\right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D} < 2 d_m^{q_{m,i}} \gamma(\Gamma_{m,i}\,;\, q_{m,i}) .$$

Alors, soit $Q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} Q_{m,i}$; soit C_m le cercle de rayon d_m de K contenant les classes $(\Gamma_{m,i})_{1 \leqslant i \leqslant k(m)}$ et soit $\lambda_m = \| Q_m \|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D}$.

On sait grâce au lemme I.4. que

$$\lambda_m = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k(m)} \| Q_{m,i} \|_{\Gamma_{m,i}} \left\| \frac{1}{Q_{m,i}} \right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D}$$

$$= d_m^{q_{m,i}} \left\| \frac{1}{Q_{m,i}} \right\|_{\Gamma_{m,i} \cap D} \leqslant 2\gamma_D(\Gamma_{m,i}, q_{m,i}) ,$$

ce qui prouve que la suite Q_m possède la propriété $\varphi(\mathcal{F})$ et le lemme I.5. est établi.

5. Propriété caractéristique des T-filtres.

I.6. PROPOSITION. – *Un filtre percé monotone est strictement annulateur si et seulement si c'est un* T-*filtre.*

Preuve. – Montrons d'abord que si un filtre percé monotone est strictement annulateur, alors c'est un T-filtre.

Rappelons encore qu'une assertion voisine de celle-ci a été établie par E. Motzkin et P. Robba dans [11]. Mais nous ne pouvons l'utiliser ici pour montrer que tout filtre strictement annulateur est un T-filtre car elle ne concerne que des filtres percés qui ont un centre, ce qui n'est pas forcément le cas de ceux que nous devons considérer ici. Nous établirons ensuite la *réciproque* de cette propriété, ce qui permettra ultérieurement de résoudre le problème de l'intégrité de H(D) ainsi que les conditions que D doit vérifier pour que H(D) soit noethérienne, mais aussi de compléter les résultats obtenus par E. Motzkin et P. Robba [11] : la condition (*) suffisante, pour que D soit analytique est aussi nécessaire et ceci quelle que soit la caractéristique p du corps des restes de K.

Nous allons faire la démonstration pour un filtre *décroissant*, ce qui est évidemment suffisant pour déduire le résultat dans le cas général.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre percé décroissant auto-annulateur de diamètre R_0. Soit I l'intervalle $[-\log T, -\log R_0[$. On peut choisir $f \in H(D)$ tel que la fonction $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ associée vérifie

$$\lim_{\mu \to -\log R_0} w_{\mathcal{F}}(f, \mu) = +\infty, \quad \text{et}$$

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) < +\infty \quad \text{quel que soit} \quad \mu \in I .$$

Soit (ν_m) la suite des valeurs de I pour lesquelles $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ admet des sauts de pente s_m.

Soit $n_m = w_{\mathcal{F}}'^{+}(f, \nu_m)$ la dérivée à droite de $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ au point ν_m.

Les points de I où la fonction $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ n'est pas dérivable sont isolés et d'autre part grâce à [3], on sait que la fonction $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ est concave sur tout intervalle $]\nu_m, \nu_{m+1}[$. Il en résulte que la dérivée $w'_{\mathcal{F}}(f, \mu)$ vérifie, en tout point de $]\nu_m, \nu_{m+1}[$ où elle existe, $w'_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leqslant n_m$. On en déduit immédiatement que

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leqslant w_{\mathcal{F}}(f, \nu_m) + n_m(\mu - \nu_m) ,$$

quel que soit $\mu \in [\nu_m, \nu_{m+1}]$.

Donc, en effectuant une telle opération m fois, on obtient la relation

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leqslant w_{\mathcal{F}}(f, \nu_1) + n_1(\nu_2 - \nu_1) + \cdots + n_{m-1}(\nu_m - \nu_{m-1}) + \\ + n_m(\mu - \nu_m) . \qquad (1)$$

D'autre part, on sait que

$$n_j \leqslant n_{j-1} + s_j , \qquad (2)$$

car la fonction $w_{\mathcal{F}}(f, .)$ est concave sur l'intervalle $]\nu_{j-1}, \nu_j[$. Alors (1) et (2) nous donnent

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leqslant w_{\mathcal{F}}(f, \mu_1) + s_1(\mu - \nu_1) + \cdots + s_m(\mu - \nu_m) .$$

Soit $A = w(f, \mu_1)$. On a la relation

$$w_{\mathcal{F}}(f, \mu) \leqslant A + \sum_{j=1}^{j=m} s_j(\mu - \nu_j) , \qquad (3)$$

quel que soit μ tel que $\nu_m \leqslant \mu \leqslant \nu_{m+1}$.

Nous allons maintenant fixer $m = m_0$.

Soit D_m une base canonique de $\mathcal{F}$. Soit $\mu_m = -\log(\operatorname{diam}(D_m))$. Soit m_0' assez grand pour que $\mu_{m_0'} < \nu_{m_0}$. Soit $a_{m_0} \in D_{m_0'+1}$. Soit c_{m_0} l'ensemble des $x \in D$ tel que $v(a_{m_0} - x) = \nu_{m_0}$. Nous nous proposons d'étudier $|f(x)|$ pour $x \in c_{m_0}$. Pour cela nous allons considérer une fraction rationnelle $h \in H(D)$ telle que

$$v(f(x) - h(x)) > \inf_{\mu \leqslant \nu_{m+1}} w_{\mathfrak{F}}(f, \mu) \quad \text{pour tout } x \in D ,$$

et telle que $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu) = w_{\mathfrak{F}}(h, \mu)$ quel que soit $\mu \leqslant \nu_{m+1}$,

(on sait que h existe d'après la proposition I.5 de [3].

On voit que $w_{\mathfrak{F}}(h, .)$ admet au point ν_{m_0} le même saut de pente s_{m_0} que $w_{\mathfrak{F}}(f, .)$ puisque ces fonctions ont même valeur au voisinage du point ν_{m_0}.

Donc la différence entre le nombre de pôles de h et le nombre de zéros de h sur le cercle c_{m_0} est égale à s_{m_0} d'après [3] et d'après la définition de $w_{\mathfrak{F}}(f, .)$ [on a en effet $w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_m) = v(h_a, \nu_m)$].

Soient $\Gamma_{m_0,1}; \dots ; \Gamma_{m_0,k(m_0)}$ les classes du cercle c_{m_0} dans lesquelles h admet plus de pôles que de zéros. Soit $q_{m_0,i}$ la différence entre le nombre des pôles et le nombre des zéros de h dans $\Gamma_{m_0,i}$. Alors

$$q_{m_0} = q_{m_0,1} + \cdots + q_{m_0,k(m_0)} \geqslant s_{m_0} . \tag{4}$$

Factorisons h sous la forme

$$h = h_{m_0,i} \cdot g_{m_0,i} ,$$

où $h_{m_0,i}$ admet pour numérateur le polynôme unitaire des zéros de h dans $\Gamma_{m_0,i}$ et pour dénominateur le polynôme unitaire de pôles de h dans $\Gamma_{m_0,i}$.

soit, quel que soit m, $d_m = p^{-\nu_m}$.

Alors, on a d'après I.3.

$$\| h_{m_0,i} \|_{\Gamma_{m_0,i} \cap D} \geqslant \frac{\gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i})}{(d_{m_0})^{q_{m_0,i}}} . \tag{5}$$

Evaluons $w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0})$. Rappelons que

$$w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = v((h_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) \ ;$$

soit $a_{m_0,i} \in \Gamma_{m_0,i}$. Alors $v(a_{m_0,i} - a_{m_0}) = \nu_{m_0}$.

Donc, d'après la proposition I.6. ii) de [3].

$$v((h_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) = v((h_{m_0,i})_{a_{m_0,i}}, \nu_{m_0}) \ ,$$

or, $$v((h_{m_0,i})_{a_{m_0,i}}, \nu_{m_0}) = -\, q_{m_0,i}\, \nu_{m_0} \ .$$

D'ou

$$w_{\mathfrak{F}}(h_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = -\, q_{m_0,i}\, \nu_{m_0} \ . \tag{6}$$

D'où

$$w_{\mathfrak{F}}(g_{m_0,i}, \nu_{m_0}) = w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) + q_{m_0,i}\, \nu_{m_0} \ . \tag{7}$$

D'autre part, $g_{m_0,i}$ n'ayant ni pôle ni zéro dans $\Gamma_{m_0,i}$, alors quel que soit $x \in \Gamma_{m_0,i}$, on a

$$v(g_{m_0,i}(x)) = v((g_{m_0,i})_{a_{m_0}}, \nu_{m_0}) = w_{\mathfrak{F}}(g_{m_0,i}, \nu_{m_0}) \ .$$

Alors, grâce à (7), quel que soit $x \in \Gamma_{m_0,i}$, on a

$$v(h(x)) = v(g_{m_0,i}(x)) + v(h_{m_0,i}(x)) = w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) + q_{m_0,i}\, \nu_{m_0} + \\ + v(h_{m_0,i}(x)) \ . \tag{8}$$

Mais grâce à (3) et (4), on a

$$w_{\mathfrak{F}}(h, \nu_{m_0}) \leqslant \mathrm{A} + \sum_{j=1}^{m_0-1} q_j(\nu_{m_0} - \nu_j) \ .$$

D'où

$$v(h(x)) \leqslant \mathrm{A} + \Big(\sum_{j=1}^{j=m_0-1} q_j(\nu_{m_0} - \nu_j)\Big) + q_{m_0,i} \cdot \nu_{m_0} + v(h_{m_0,i}(x)) \ ,$$

quel que soit $x \in \Gamma_{m_0,i}$.

Soit $\mathrm{B} = p^{-\mathrm{A}}$. Cette relation s'écrit encore

$$|h(x)| \geqslant B \left[\prod_{j=1}^{j=m_0-1} \left(\frac{d_{m_0}}{d_j}\right)^{q_j} \right] \cdot \left[\frac{|h_{m_0,i}(x)'|}{(d_{m_0})^{q_{m_0,i}}} \right],$$

quel que soit $x \in \Gamma_{m_0,i}$.

Alors, grâce à (5)

$$\sup_{x \in \Gamma_{m_0,i}} |h(x)| \geqslant B \prod_{j=1}^{j=m_0-1} \left(\frac{d_{m_0}}{d_j}\right)^{q_j} \cdot \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}) .$$

Donc

$$\|h\|_{c_{m_0}} \geqslant \left(\sup_{i=1,\dots,k(m_0)} \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}) \right) B \left(\prod_{j=1}^{m_0-1} \left(\frac{d_{m_0}}{d_j}\right)^{q_j} \right).$$

Alors soit

$$\gamma_{m_0} = \sup_{i=1,\dots,k(m_0)} \gamma_D(\Gamma_{m_0,i}, q_{m_0,i}) .$$

Il reste à vérifier que

$$\|f\|_{c_{m_0}} = \|h\|_{c_{m_0}} .$$

Mais c'est évident car

$$\|h\|_{c_{m_0}} \geqslant p^{-w_{\mathfrak{F}}(h, v_{m_0})},$$

or

$$\|f - h\| < p^{-w_{\mathfrak{F}}(h, v_{m_0})} .$$

Donc $$\|f\|_{c_{m_0}} = \|h\|_{c_{m_0}} > \|f - h\| .$$

La première partie de la démonstration est achevée.

En effet,

$$\|f\|_{c_{m_0}} \geqslant \gamma_{m_0} B \prod_{j=1}^{m_0-1} \left(\frac{d_{m_0}}{d_j}\right)^{q_j},$$

et ceci est vrai pour tout m_0.

Donc il existe une famille de classes $\Gamma_{m,i}$ telle que

$$\lim_{m \to \infty} \left[\gamma_m \left(\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right) \right] = 0 .$$

Donc $\mathcal{F}$ est un T*-filtre.*

Achevons la démonstration de I.6 en montrant la réciproque de la proposition qui vient d'être établie :

si $\mathcal{F}$ est un T*-filtre, alors $\mathcal{F}$ est strictement annulateur.*

Nous supposerons toujours $\mathcal{F}$ décroissant pour la démonstration.

Supposons que $\mathcal{F}$ est un T-filtre décroissant de diamètre R_0. Il existe donc une suite de polynômes unitaires possédant la propriété $\varphi(\mathcal{F})$. Nous terminerons la démonstration du théorème I.6., en établissant le lemme I.6.A.

I.6.A. Lemme. – *Soit $\mathcal{F}$ un* T*-filtre et soit une suite de polynômes Q_m possédant la propriété $\varphi(\mathcal{F})$. Alors il existe une suite croissante d'entiers $n \to h(n)$ et il existe une suite de fractions $\Pi_n \in K(D)$ de la forme* $\dfrac{\phi_n}{\left(\prod\limits_{m=1}^{h(n+1)-1} Q_m\right)}$ (*où* $\phi_n \in K[X]$) *qui converge vers un élément $\pi \in H(D)$ strictement annulé par $\mathcal{F}$ et tel que $\pi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$.*

Preuve. – Nous nous bornerons naturellement au cas d'un T-filtre décroissant pour effectuer la démonstration. Soit Q_m une suite de polynômes unitaires possédant la propriété $\varphi(\mathcal{F})$. Soit une suite de cercles C_m décrivant $\mathcal{F}$, de rayons d_m tels que pour tout m les zéros de Q_m appartiennent à $C_m \cap$ C D et tels que la suite

$$\lambda_m = \| Q_m \|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{C_m \cap D}$$

satisfasse la relation (T').

Soit $$\Delta_m = \underline{\underline{C_m}} \cap D .$$

et soit $$D_m = \Delta_m - \mathcal{R}(\mathcal{F}) .$$

Alors $(D_m)_{m \in N}$ est une base canonique de $\mathcal{F}$ et pour que l'élément π que nous allons construire soit strictement annulé par $\mathcal{F}$, il suffira d'établir les relations

$$w\ (\pi , \mu) < +\infty \quad \text{quel que soit} \quad \mu < -\log R_0 , \tag{1'}$$

$$\| \pi \|_{\Delta_m} < \frac{1}{m} , \tag{2'}$$

car (2′) montre que π est annulé par $\mathfrak{I}$ et nul sur $\mathcal{R}(\mathfrak{I})$ et grâce à (1′) on voit que π est strictement annulé par $\mathfrak{I}$.

Avant de pouvoir construire effectivement les fractions approchant l'élément π cherché, nous devons établir certaines relations. Pour cela, nous allons d'abord supposer définies une suite d'entiers croissante $n \to h(n)$, ainsi qu'une suite d'entiers croissante $n \to l(n)$ telles que

$$h(n) < l(n) < l(n) + 1 = h(n+1) \quad \text{quel que soit } n .$$

Alors, quel que soit m, soit

$$R_n = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} Q_m .$$

Soit $a_n \in \Delta_{h(n+2)}$. Soit $X_n = x - a_n$.

Il est clair que

$$|X_n| \leqslant d_{h(n)} \quad \text{si et seulement si} \quad x \in \underline{\underline{\Delta}}_{h(n)} .$$

Soit $R_n(x) = U_n(X_n)$. Développons U_n. On a

$$U_n = A_{o,n} + \cdots + A_{\tau(n),n} X_n^{\tau(n)} , \quad \text{où}$$

$$\tau(n) = \deg(U_n) = \deg R_n = \sum_{m=h(n)}^{l(n)} q_m .$$

Remarquons la propriété suivante :

Pour tout entier δ satisfaisant aux relations

$$0 \leqslant \delta < \tau(n) ,$$

$$q_{h(n)} + \cdots + q_{j(\delta)-1} + \beta(\delta) = \tau(n) - \delta < q_{h(n)} + \cdots + q_{j(\delta)} \qquad (\beta(\delta) \geqslant 0) ,$$

on a

$$|A_{\delta,n}| \leqslant (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \times \cdots \times (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \times (d_j(\delta))^{\beta(\delta)} . \quad (3')$$

En effet, ceci tient à ce que le coefficient d'ordre δ de U_n est obtenu comme somme de produits de $\tau(n) - \delta$ zéros de U_n, chacun étant naturellement compté autant de fois que son ordre de multiplicité.

Donc $|A_{\delta,n}|$ est majoré par le produit des $\tau(n) - \delta$ plus grands zéros de U_n. Evaluons ce produit. Si ζ_m est un zéro de Q_m, alors

$\zeta_m - a_n$ est un zéro de U_n et $|\zeta_m - a_n| = d_m$. D'où le résultat ci-dessus.

Nous allons utiliser (3') pour établir une relation très importante. Mais nous allons tout d'abord définir la fraction F_n.

Soit $\sigma(n)$ un entier satisfaisant à la relation $0 < \sigma(n) < \tau(n)$ et soit $t(n)$ tel que

$$q_{h(n)} + \cdots + q_{t(n)-1} < \tau(n) - \sigma(n) \leqslant q_{h(n)} + \cdots + q_{t(n)} ,$$

$$q_{h(n)} + \cdots + q_{t(n)-1} + \alpha_n = \tau(n) - \sigma(n) .$$

Soit $S_n(X_n) = A_{\sigma(n)+1,n} X_n^{\sigma(n)+1} + A_{\sigma(n)+2,n} X_n^{\sigma(n)+2} + \cdots + A_{\tau(n),n} X_n^{\tau(n)}$.

Soit $G_n(X_n) = \dfrac{S_n(X_n)}{U_n(X_n)}$ et soit $F_n(x) = G_n(X_n)$.

Enfin, soit $\pi_n = \prod_{i=1}^{n} F_i$.

Pour faire apparaître π_n sous la forme annoncée au lemme I.6.A, il suffit évidemment de poser $\theta_n(x) = S_n(X_n)$ et $\phi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \theta_i(x)$.

Pour montrer que la suite π_n converge dans H(D), il faut disposer d'une bonne majoration de $|1 - F_n(x)|$ sur le complémentaire par rapport à D de $\Delta_{h(n)}$, où $|F_n(x)|$ est égal à 1.

Nous allons établir la relation (4') : *quel que soit* $x \in D - \Delta_{h(n-1)}$, *on a*

$$|1 - F_n(x)| \leqslant \left(\frac{d_{h(n)}}{|x - a_n|}\right)^{\sigma(n)} \leqslant \left(\frac{d_{h(n)}}{d_{h(n-1)}}\right)^{\sigma(n)} . \tag{4'}$$

Cette relation va être établie à partir de la proposition suivante :

Soient $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2 < \tau(n)$.

Alors, quel que soit X_n *tel que* $|X_n| > d_{h(n)}$, *on a :*

$$|X_n|^{\delta_1} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{j(\delta_1)-1})^{q_{j(\delta_1)-1}} \cdot (d_{j(\delta_1)})^{\beta(\delta_1)} < \cdots$$

$$< |X_n|^{\delta_2} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{j(\delta_2)-1})^{q_{j(\delta_2)-1}} \cdot (d_{j(\delta_2)})^{\beta(\delta_2)} .$$

En effet, les d_m en facteur dans chaque membre de l'inégalité, sont par hypothèse, inférieurs à $|X_n|$. Alors, la somme des puissances de $|X_n|$ et des d_m étant la même dans chaque membre, le plus grand de ces termes est celui qui a la plus forte puissance de $|X_n|$.

Donc, en utilisant la proposition qui vient d'être établie et (3') pour tout X_n tel que $|X_n| > d_{h(n)}$ et pour tout $\delta \leqslant \sigma(n)$, on a

$$|X_n|^\delta \, |A_{\delta,n}| < |X_n|^\delta \, (d_{l(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant |X_n|^{\sigma(n)} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{t(n)-1})^{q_{t(n)-1}} \cdot (d_{t(n)})^{\alpha_n} .$$

Ce qui montre que, pour tout X_n tel que $|X_n| > d_{h(n)}$, on a

$$|(U_n - S_n)(X_n)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \delta \leqslant \sigma(n)} (|A_{\delta,n}| \cdot |X_n|^\delta) \leqslant$$

$$\leqslant |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{t(n)-1})^{q_{t(n)-1}} \cdot (d_{t(n)})^{\alpha_n} .$$

Or les d_m sont inférieurs à $d_{h(n)}$ pour $h(n) < m \leqslant t(n)$. Donc, finalement, quel que soit X_n tel que $|X_n| > d_{h(n)}$ on a

$$|(U_n - S_n)(X_n)| \leqslant |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{\tau(n)-\sigma(n)} .$$

Or, d'autre part, il est évident que quel que soit $|X_n| > d_{h(n)}$, on a

$$|U_n(X_n)| = |X_n|^{\tau(n)} ,$$

car les zéros de U_n sont en valeur absolue inférieurs à $d_{h(n)}$. D'où le résultat suivant :

Quel que soit X_n tel que $|X_n| > d_{h(n)}$, on a

$$|1 - G_n(X_n)| \leqslant \left(\frac{d_{h(n)}}{|X_n|}\right)^{\tau(n)-\sigma(n)} ,$$

ce qui est équivalent à la relation (4') lorsque $x \notin \Delta_{h(n)}$.

Nous allons établir maintenant une majoration de $|S_n(X_n)|$ lorsque $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$.

Rappelons que d'après (3') on a

$$|X_n|^\delta \, |A_{\delta,n}| \leqslant |X_n|^\delta \, (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)} .$$

Mais les termes de S_n vérifient tous $\delta \geqslant \sigma(n) + 1$. Donc

$$|X_n|^\delta \, |A_{\delta,n}| \leqslant |X_n|^{\sigma(n)+1} \cdot |X_n|^{\delta-\sigma(n)-1} \cdot (d_{h(n)})^{q_{h(n)}} \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (d_{j(\delta)-1})^{q_{j(\delta)-1}} \cdot (d_{j(\delta)})^{\beta(\delta)} .$$

Rappelons maintenant que les d_m considérés vérifient $d_m < d_{h(n)}$ et que par hypothèse $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$. Alors, on a

$$|X_n|^\delta \, |A_{\delta,n}| \leqslant |X_n|^{\sigma(n)+1} (d_{h(n)})^{\tau(n)-\sigma(n)-1} ,$$

quel que soit $\delta \geqslant \sigma(n) + 1$.

D'où la relation : quel que soit X_n tel que $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$, on a

$$|S_n(X_n)| \leqslant |X_n|^{\sigma(n)+1} (d_{h(n)})^{\tau(n)-\sigma(n)-1} .$$

Pour simplifier les notations, nous utiliserons de préférence la relation suivante, vraie à fortiori.

Quel que soit X_n *tel que* $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$, *on a*

$$|S_n(X_n)| \leqslant |X_n|^{\sigma(n)} (d_{h(n)})^{\tau(n)-\sigma(n)} . \qquad (5')$$

Nous allons maintenant minorer $|U_n(X_n)|$ *lorsque* $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$.

Une remarque s'impose d'abord. Comme nous ne considérons $F_n(x)$ que pour $x \in D$, il est évident que nous n'étudierons $U_n(X_n)$ que pour $X_n + a_n \in D$.

Soit A_n l'ensemble des X_n tels que $X_n + a_n \in D$ et tels que $|X_n| \leqslant d_{h(n)}$.

Soit $V_n(X_n) = Q_m(x)$, $(m = h(n), \ldots, l(n))$.

Alors
$$U_n(X_n) = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} V_m(X_n) .$$

De plus, quel que soit X_n tel que $d_m \leqslant |X_n| < d_{m+1}$, on a

$$|V_j(X_n)| = |X_n|^{q_j} \quad \text{pour tout} \quad j > m ,$$

$$|V_j(X_n)| = (d_j)^{q_j} \quad \text{pour tout} \quad j < m ,$$

et grâce à la propriété $\varphi(\mathcal{F})$,

$$|V_m(X_n)| \geqslant \frac{|X_n|^{q_m}}{\lambda_m} \quad \text{d'après le lemme I.4.}$$

Il résulte de ces trois relations, la relation suivante :

Soit m tel que $h(n) \leqslant m \leqslant l(n)$. Alors, quel que soit $X_n \in A_n$ tel que $d_m \leqslant |X_n| < d_{m+1}$, on a

$$|U_n(X_n)| \geqslant \frac{|X_n|^{(q_{l(n)}+\cdots+q_m)}\,(d_{h(n)}^{q_{h(n)}}\,.\,.\,.\,.\,.\,(d_{m-1})^{q_{m-1}}}{\lambda_m}\,. \qquad (6')$$

Superposons les relation (5') et (6').

Soit $X_n \in A_n$ tel que $d_{m+1} < |X_n| \leqslant d_m$. D'après (10') et (11'), on a

$$|G_n(X_n)| = \left|\frac{S_n(X_n)}{T_n(X_n)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|X_n|^{\sigma(n)}\cdot(d_{h(n)})^{\tau(n)-\sigma(n)}\cdot\lambda_m}{|X_n|^{q_{l(n)}+\cdots+q_m}\cdot(d_{h(n)})^{q_{h(n)}}\,.\,.\,.\,.\,.\,(d_{m-1})^{q_{m-1}}}\,.$$

Supposons d'abord $t(n) > m$.

Alors $\sigma(n) < q_{l(n)} + \cdots + q_m$. Donc

$$\frac{|X_n|^{\sigma(n)}}{|X_n|^{q_{l(n)}+\cdots+q_m}} = \frac{1}{|X_n|^{(q_{t(n)}-\alpha_n)+(q_{t(n)+1})+\cdots+q_m}}\,.$$

Multiplions numérateur et dénominateur de $|G_n(X_n)|$ par $|X_n|^{\tau(n)-\sigma(n)}$. Majorons au numérateur $|X_n|$ par d_m et minorons au numérateur $|X_n|$ par R_0. Il vient :

$$|G_n(X_n)| \leqslant \left[\prod_{j=h(n)}^{m-1}\left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j}\right]\cdot\lambda_m\cdot\left(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\right)^{\tau(n)-\sigma(n)}\,. \qquad (7')$$

Supposons maintenant $t(n) \leqslant m$.

$$\frac{|X_n|^{\sigma(n)}}{|X_n|^{q_{l(n)}+\cdots+q_m}} = |X_n|^{(q_m+\cdots+q_{t(n)-1}+\alpha_n)}\,.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de $|G_n(X_n)|$ par $|X_n|^{\tau(n)-\sigma(n)}$. Nous retrouvons la relation (7') après avoir, de même, majoré $|X_n|$ au dénominateur par d_m et minoré au numérateur par R_0.

La relation (7') est donc vraie quel que soit m tel que $h(n) \leqslant m \leqslant l(n)$ et quel que soit X_n tel que

$$d_{m+1} < |X_n| \leqslant d_m\,.$$

Cette relation (7′) *se traduit encore de la façon suivante :*

Soit m tel que $h(n) \leqslant m \leqslant l(n)$.

Soit $x \in D_m - D_{m+1}$. Alors on a (7″)

$$|F_n(x)| \leqslant \left[\prod_{j=h(n)}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j}\right] \lambda_m \left(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\right)^{\tau(n)-\sigma(n)} \tag{7″}$$

Etudions maintenant le comportement de $|G_n(X_n)|$ lorsque $X_n \in A_{n+1}$. On voit que $|X_n| < d_{l(n)}$.

$|V_m(X_n)| = (d_m)^{q_m}$ quel que soit m tel que $h(n) \leqslant m \leqslant l(n)$.

D'où $$U_n(X_n) = \prod_{m=h(n)}^{l(n)} (d_m)^{q_m} .$$

D'où, quel que soit $X_n \in A_{n+1}$, on a

$$|G_n(X_n)| < \frac{(d_{l(n)}^{\sigma(n)})(d_{h(n)}^{\tau(n)-\sigma(n)})}{\prod_{m=h(n)}^{l(n)} (d_m)^{q_m}} <$$

$$< \prod_{m=h(n)}^{l(n)} \left(\frac{d_{l(n)}}{d_m}\right)^{q_m} \left(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\right)^{\tau(n)-\sigma(n)} . \tag{8′}$$

Cette relation se traduit par la relation (8″) :

Quel que soit $x \in \Delta_{h(n+1)})$ on a

$$|F_n(x)| < \prod_{m=h(n)}^{l(n)} \left(\frac{d_{l(n)}}{d_m}\right)^{q_m} \left(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\right)^{\tau(n)-\sigma(n)} . \tag{8″}$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire la suite F_n, ce qui revient à définir les suites $h(n)$, $l(n)$, $\sigma(n)$.

Pour des raisons de commodité, nous utiliserons $\psi(n) = \tau(n) - \sigma(n)$.

Supposons construits jusqu'au rang n_0 les entiers $\psi(n)$ et $l(n-1)$, tels qu'ils vérifient :

$$\left(\frac{d_{h(n-1)+1}}{d_{h(n-1)}}\right)^{\psi(n)} < \frac{1}{n} , \tag{9′}$$

$$\left(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\right)^{\psi(n)} < 2 , \tag{10′}$$

(11′) quel que soit $m \geqslant h(n)$, on a

$$\lambda_m \left(\prod_{j=h(n-1)}^{m} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right) < \frac{1}{4n} .$$

Nous connaissons donc $l(n_0 - 1)$, $h(n_0) = l(n_0 - 1) + 1$ et $\psi(n_0)$.

Montrons qu'alors, on peut choisir $\psi(n_0 + 1)$ et $l(n_0)$. En effet, soit $\psi(n_0 + 1)$ assez grand pour que :

$$\left(\frac{d_{h(n_0)+1}}{d_{h(n_0)}}\right)^{\psi(n_0+1)} < \frac{1}{n_0 + 1} .$$

Alors, il existe un rang N tel que, pour $m > \mathrm{N}$, on ait :

$$\left(\frac{d_m}{\mathrm{R}_0}\right)^{\psi(n_0+1)} < 2 \quad \text{car} \quad \lim_{m \to \infty} d_m = \mathrm{R}_0 .$$

Enfin, par hypothèse

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m \left(\prod_{j=h(n_0)}^{m} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right) = 0 .$$

Donc il existe un rang M tel que pour $m \geqslant \mathrm{M}$, on ait :

$$\lambda_m \left(\prod_{j=h(n_0)}^{m} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right) < \frac{1}{8(n_0 + 1)} .$$

Donc les relations (9′), (10′), (11′) *sont vérifiées au rang* $n_0 + 1$.

Comme la construction aux rangs 1 et 2 est triviale, la suite est construite quel que soit n.

Nous allons en déduire que la suite F_n associée possède les propriétés cherchées.

Montrons d'abord que

$$\| \pi_n \| \leqslant \sup (\| \pi_{n-1} \| , \| \pi_{n-2} \|) . \tag{12′}$$

Supposons d'abord $x \in \mathrm{D} - \Delta_{h(n)}$.

On a $\qquad \pi_n(x) = \pi_{n-1}(x)\, \mathrm{F}_n(x)$, et

$$| \mathrm{F}_n(x) | = 1 \quad \text{quel que soit} \quad x \in \mathrm{D} - \Delta_{h(n)} .$$

Donc $\quad | \pi_n(x) | = | \pi_{n-1}(x) | \quad$ quel que soit $\quad x \in \mathrm{D} - \Delta_{h(n)}$.

Donc la relation (12′) est triviale pour $x \in D - \Delta_{h(n)}$ et elle est la conséquence de la relation

$$|\pi(x)| = |\pi_n(x)| \quad \text{quel que soit} \quad x \in D - \Delta_{h(n)} . \qquad (13')$$

Supposons maintenant $x \in \Delta_{h(n+1)}$ et soit m tel que $x \in D_m$, $x \notin D_{m+1}$.

$$|F_{n-1}(x)| \ldots |F_n(x)| \leqslant \Big(\prod_{m=h(n-1)}^{l(n)} \Big(\frac{d_{l(n)}}{d_m}\Big)^{q_m} \Big) \lambda_m \cdot$$

$$\cdot \Big(\frac{d_{h(n-1)}}{R_0}\Big)^{\psi(n-1)} \Big(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\Big)^{\psi(n)} ,$$

d'après (8″).

Mais le membre de droite est majoré par $\frac{1}{n}$ d'après (10′) et (11′).

D'où

$$|\pi_n(x)| \leqslant \frac{\|\pi_{n-2}\|}{n} \quad \text{quel que soit} \quad x \in \Delta_{h(n+1)} . \qquad (14')$$

Supposons enfin $x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}$.

Soit m tel que $x \in D_m$, $x \notin D_{m+1}$; alors

$$|F_{n-1}(x)\, F_n(x)| < \Big(\prod_{j=h(n)}^{m} \Big(\frac{d_m}{d_j}\Big)^{q_j} \Big) \cdot \lambda_m \cdot$$

$$\cdot \Big(\frac{d_{h(n-1)}}{R_0}\Big)^{\psi(n-1)} \Big(\frac{d_{h(n)}}{R_0}\Big)^{\psi(n)},$$

d'après (7″).

Le membre de droite est majoré par $\frac{1}{n-1}$ d'après (10′) et (11′)

$$|\pi_n(x)| \leqslant \frac{\|\pi_{n-2}\|}{n} \quad \text{quel que soit } x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)} . \qquad (14'')$$

Donc en résumant les deux derniers cas, on voit que la relation (14′) est vérifiée pour tout $x \in \Delta_{h(n)}$, et la relation (12′) est évidemment une conséquence de (14′).

Nous allons d'abord appliquer ce résultat à l'étude de

$$|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)| \quad \textit{pour} \quad x \in \Delta_{h(n)} .$$

On a

$$|\pi_n(x)| \cdot |F_{n+1}(x) - 1| \leqslant \|\pi_n\| \cdot |F_{n+1}(x) - 1| .$$

Or

$$\|\pi_n\| \leqslant \sup(\|\pi_{n-1}\|,\|\pi_{n-2}\|) \cdot \leqslant \cdots \leqslant \sup(\|\pi_1\|, \|\pi_2\|) = M .$$

D'où

$$|\pi_n(x)| \leqslant M \cdot |F_{n+1}(x) - 1| .$$

Or, d'après (4′) et (9′) quel que soit $x \in D - \Delta_{h(n)}$ on a

$$|1 - F_{n+1}(x)| < \left(\frac{d_{h(n+1)}}{d_{n(n)}}\right)^{\psi(n+1)} < \frac{1}{n+1} .$$

D'où

$$|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)| < \frac{M}{n+1}, \quad \text{quel que soit} \quad x \in D - \Delta_{h(n)} . \tag{15'}$$

Etudions maintenant $|\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x)|$ pour $x \in \Delta_{h(n)}$.

Grâce à (14′) nous voyons que, quel que soit $x \in \Delta_{h(n)}$, on a

$$|\pi_n(x)| < \frac{M}{n-1} .$$

Evaluons $|\pi_{n+1}(x)|$. Toujours grâce à (14′) nous avons, quel que soit $x \in \Delta_{h(n+1)}$,

$$|\pi_{n+1}(x)| < \frac{M}{n} .$$

Il reste donc à étudier $|\pi_{n+1}(x)|$ pour $x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)}$.

On a

$$|\pi_{n+1}(x)| = |\pi_n(x)| \cdot |F_{n+1}(x)| .$$

Or

$$|F_{n+1}(x)| = 1 \quad \text{pour} \quad x \in \Delta_{h(n)} - \Delta_{h(n+1)} .$$

Donc
$$|\pi_{n+1}(x)| = |\pi_n(x)| < \frac{M}{n-1} .$$

D'où
$$\|\pi_{n+1} - \pi_n\| < \frac{M}{n-1} .$$

Ceci montre la convergence de la suite π_n vers un élément π qui vérifie notamment $\|\pi\|_{\Delta_{h(n)}} < \frac{1}{n-1}$ donc la condition (2') est réalisée.

Il est évident d'autre part que $w_{\mathfrak{F}}(f, \mu) < +\infty$. En effet, quel que soit μ fixé, inférieur à $-\log R_0$, soit m_0 tel que $-\log d_{m_0} > \mu$. Soit n_0 tel que $h(n_0) > m_0$.

Alors on a, quel que soit $n > n_0$, et quel que soit x tel que $x \notin D_{m_0}$, $|F_n(x)| = 1$. Donc, quel que soit $\mu < -\log d_{m_0}$, $w_{\mathfrak{F}}(F_n, \mu) = 0$. Donc

$$w_{\mathfrak{F}}(\pi, \mu) = w_{\mathfrak{F}}(\pi_n, \mu) = w_{\mathfrak{F}}(\pi_{n_0}, \mu) .$$

Or $\quad \pi_n \in K(D)$, $\quad$ donc $\quad w_{\mathfrak{F}}(\pi_n, \mu) < +\infty$.

Donc $w_{\mathfrak{F}}(\pi, \mu) < +\infty$, quel que soit $\mu < -\log R_0$, et la condition (1') est bien réalisée, ce qui montre que π est strictement annulé par $\mathfrak{F}$.

Donc $\mathfrak{F}$ est un filtre percé strictement annulateur.

Le lemme I.6.A. est établi ainsi que le théorème I.6.

6. Filtres percés simples. Exemples et contre-exemples.

Nous allons présenter ici quelques exemples de filtres percés et déterminer s'ils sont, ou non des T-filtres. Pour cela, nous allons considérer une catégorie de filtres percés dont l'étude est facilitée par la rareté relative des trous qui le composent, et que nous allons maintenant définir.

DEFINITION. – *Soit* D *un infraconnexe,* $\mathfrak{F}$ *un filtre percé décroissant de* D *et* $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une base canonique de* $\mathfrak{F}$. *Alors le filtre percé* $\mathfrak{F}$ *est dit simple si et seulement si la suite* (D_n) *vérifie à partir d'un certain rang* N *la propriété suivante*

l'ensemble $(D_n \cup \underline{\underline{D_{n+1}}})$ *admet au plus un trou.*

De même, *un filtre percé croissant* est dit *simple* s'il est *l'inverse d'un filtre percé décroissant simple.*

Remarque. – Si un filtre percé simple admet pour centre l'origine, alors l'ensemble des trous internes de D_N est une suite monotone décrivant $\mathcal{F}$ et cette suite suffit à caractériser les propriétés du filtre $\mathcal{F}$.

Nous noterons par $(T_m)_{m\in N}$ une telle suite, et nous noterons ρ_m le diamètre de T_m, ainsi que

$$d_m = d(T_{m+1}, T_m) \quad \text{si } \mathcal{F} \text{ est décroissant,}$$

$$d_m = d(T_{m-1}, T_m) \quad \text{si } \mathcal{F} \text{ est croissant.}$$

On voit que $\mathcal{F}$ n'est décrit que par une seule suite de cercles concentriques percés c_m n'ayant chacun qu'un seul trou T_m dans une de leurs classes Γ_m.

Alors $\mathcal{F}$ est un T-filtre si et seulement s'il existe une suite d'entiers $q_m \geqslant 0$ vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} [\log \gamma_D(\Gamma_m, q_m) + \sum_{j=1}^{m-1} q_j \,|\log d_m - \log d_j\,|] = +\infty .$$

Or $$\gamma_D(\Gamma_m, q_m) = \left(\frac{d_m}{\rho_m}\right)^{q_m} .$$

Donc $\mathcal{F}$ est un T-filtre si et seulement si il existe une suite d'entiers $q_m \geqslant 0$ tels que

$$(T_0) \quad \lim_{m\to\infty} [q_m(\log \rho_m - \log d_m) + \sum_{j=1}^{m-1} q_j \,|\log d_m - \log d_j\,|] = +\infty$$

Nous allons citer quelques exemples intéressants, dont certains ont déjà été obtenus par E. Motzkin et P. Robba sous l'hypothèse que le corps de reste de K est de caractéristique non nulle, que nous éviterons ici.

Soit R le diamètre de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire la limite de la suite d_m.

1) *Si la relation $d_m = \rho_m$ est vérifiée pour une infinité d'indices, alors $\mathcal{F}$ est un* T-filtre [10].

2) *Si la série de terme général $|\log R - \log d_m|$ est convergente et si la relation $\rho_m = d_m$ n'est vérifiée que pour un nombre fini d'indices, alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ soit un* T-*filtre est que la série de terme général* $\dfrac{|\log R - \log d_m|}{\log d_m - \log \rho_m}$ *soit divergente* [10].

En particulier, on voit que si $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \dfrac{\rho_m}{R} < 1$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas un T-filtre.

3) *Si la série de terme général* $|\log R - \log d_m|$ *est divergente et si* $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_m > 0$ *alors* $\mathcal{F}$ *est un T-filtre.*

4) Un exemple plus intéressant encore que l'exemple 3) montre que la condition $\underline{\lim\limits_{m\to\infty}} \rho_m > 0$ n'est pas nécessaire pour que $\mathcal{F}$ soit un T-filtre.

En effet, il est clair que si

$$\lim_{m\to\infty} [\log \rho_m - \log d_m + \sum_{j=1}^{m-1} |\log d_m - \log d_j|] = +\infty ,$$

alors $\mathcal{F}$ vérifie la condition (T_0) avec $q_m = 1$ pour tout m.

Or cette condition peut être réalisée avec une suite ρ_m telle que $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_m = 0$, à condition bien sûr que,

$$\lim_{m\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{m-1} |\log d_m - \log d_j| \right] = +\infty$$

Il est à remarquer que cette dernière relation est vraie si et seulement si la série de terme général $|\log R - \log d_j|$ diverge [11].

II. APPLICATIONS AUX PROBLEMES D'ANALYCITE

1. Caractérisation des ensembles analytiques.

Rappelons le problème posé par E. Motzkin et P. Robba [11]. Une partie D de K est dite *analytique* si pour tout $a \in D$, pour tout $r > 0$ et pour tout $f \in H(D)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ satisfaisant $|x - a| \leqslant r$, on a $f = 0$. Nous allons caractériser les ensembles analytiques au moyen des T-filtres.

DEFINITIONS. – Soit D un infraconnexe et soit $\mathcal{F}$ un T-filtre. Soit $f \in H(D)$. *Nous dirons que f est auto-annulé par $\mathcal{F}$ si f est strictement annulé par $\mathcal{F}$ et si $v(f(x)) = +\infty$ quel que soit $x \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$.*

II.1. LEMME. – *Soit* D *un infraconnexe de diamètre* R. *Soit $a \in D$, soit $r \underset{> 0}{\leqslant} R$ et soit d l'ensemble des $x \in D$ tels que $|x - a| \leqslant r$. Soit $f \in H(D)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in d$. Alors il existe un* T-*filtre $\mathcal{F}$ tel que $d \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$ et tel que f soit auto-annulé par $\mathcal{F}$.*

Preuve. – Si f est auto-annulé par un T-filtre décroissant de centre a, de diamètre $\geqslant r$, le lemme est établi. Sinon, on a $v_a(f, \mu) = +\infty$ pour tout $\mu \geqslant -\log R$. Soit $b \in D$ tel que $f(b) \neq 0$; on a donc $|a - b| > r$ et $v_b(f, -\log|a - b|) = v_a(f, -\log|a - b|) = +\infty$. Or $\lim\limits_{\mu \to +\infty} v_b(f, \mu) = v(f(b))$, ce qui prouve l'existence d'un nombre $\nu \geqslant -\log|a - b|$ tel que $v(f_b, \mu) < +\infty$ pour

$$\mu > \nu \quad \text{et} \quad \lim_{\mu \to \nu} v_b(f, \mu) = +\infty .$$

Donc il existe un T-filtre croissant $\mathcal{F}$ de centre b, de diamètre $p^{-\nu}$, tel que f soit auto-annulé par $\mathcal{F}$ et l'on a bien $d \subset \mathcal{P}(\mathcal{F})$.

II.2. THEOREME. – *Une partie* D *de* K *est analytique si et seulement si* D *est infraconnexe sans* T-*filtre à plage non vide.*

Preuve. – Il est immédiat de se ramener au cas d'une partie bornée grâce à une inversion, centrée en un trou de D. (Si D n'admet pas de trou, $\overline{D} = K$ et $H(D) = K(D)$). D'autre part il est immédiat de se ramener au cas d'un fermé borné grâce au corollaire II.2. de [2]. Alors on sait que si D est analytique, D est infraconnexe d'après le théorème I.8. de [2] car si H(D) admet des idempotents $\neq 0$ et 1, D n'est pas analytique. Enfin, l'infraconnexe D ne doit pas admettre de T-filtre $\mathcal{F}$ à plage non vide car il existerait $f \underset{\neq 0}{\in} H(D)$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ et en particulier, si $a \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ et si $r = d(a, C\mathcal{P}(\mathcal{F}))$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant r$.

Réciproquement si D est infraconnexe, un élément $f \underset{\neq 0}{\in} H(D)$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x - a| \leqslant r$, ($a \in D$ et $r > 0$) est auto-annulé par un T-filtre dont la plage contient a, d'après le lemme II.1. et ceci ne peut donc pas se produire si D est sans T-filtre à plage non vide.

2. Transformation de Fourier associée à $\mathbf{Z}_p$.

Rappelons brièvement le problème de la non-injectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbf{Z}_p$. M. Guerraoui et B. de Mathan ont montré dans [7] que si la transformation de Fourier p-adique associée à $\mathbf{Z}_p$ n'est pas injective, un groupe abélien compact totalement discontinu est Fourier-injectif si et seulement s'il s'identifie à son dual p-adique. Il s'agit donc d'établir qu'en effet cette transformation de Fourier associée à $\mathbf{Z}_p$ n'est pas injective.

Pour cela nous allons d'abord rappeler la définition de cette transformation de Fourier.

Soit p un nombre premier, soit $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue p-adique $|\,.\,|_p$; soit K le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ munie de l'unique valeur absolue prolongeant celle de $\mathbf{Q}_p$, soit v_p sa valuation ($v_p(x) = -\log_p |x|_p$) et soit $\mathfrak{M}$ l'idéal de valuation de K. Pour tout entier $s \geqslant 0$, soit Γ_s le groupe des racines p^s-ième de l'unité et soit $\Gamma = \bigcup_{s=0}^{\infty} \Gamma_s$. On sait que le groupe Γ s'identifie au groupe des homomorphismes continus de $\mathbf{Z}_p$ dans $(\mathrm{K}^*\,,\,.)$ par l'isomorphisme Φ qui associe à $\gamma \in \Gamma$ l'application $\Phi(\gamma)$ telle que $\Phi(\gamma)(x) = \gamma^x (x \in \mathbf{Z}_p)$.

Soit $\mathrm{L}^1(\Gamma)$ l'algèbre de Banach p-adique des applications de Γ dans K qui tendent vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de Γ, dont la norme est définie par $\|f\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|_p$ et dont la multiplication est la convolution $f * g$ définie par

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\delta)\, g(\gamma\delta^{-1}) \ .$$

Enfin, soit $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p\,,\mathrm{K})$ l'algèbre des applications continues de $\mathbf{Z}_p$ dans K munie de la norme de la convergence uniforme sur $\mathbf{Z}_p$.

On appelle transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbf{Z}_p$ *l'homomorphisme* $\mathfrak{F}$ *de* $\mathrm{L}^1(\Gamma)$ *dans* $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p\,,\mathrm{K})$ *défini par*

$$\mathfrak{F}(f)(n) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\, \gamma^n$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}_p$.

3. Aspect analytique du problème.

En 1971, B. de Mathan a fait la conjecture : $\mathcal{F}$ *n'est pas injective.* Cette conjecture a trouvé en 1973 deux solutions simultanées. L'une obtenue par J. Fresnel et B. de Mathan [4] utilise une amélioration des résultats de [9]. L'autre que nous allons étudier ramène la conjecture à un problème d'analycité grâce à la proposition II.1 due à Yvette Amice.

II.3. PROPOSITION. – *Soit* $r < p^{\frac{1}{p(p-1)}}$ *et soit* D *l'ensemble des* $x \in \mathrm{K}$ *tels que* $|x - \gamma| \geqslant r$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$. *Le filtre croissant* $\mathcal{C}$ *qui admet pour base la suite des parties*

$$\Delta_m = \left\{ x \in \mathrm{D} \mid 0 < v_p(x-1) \leqslant \frac{1}{p^m(p-1)} \right\}$$

est percé. Alors $\mathcal{F}$ *n'est pas injective si et seulement s'il existe un élément de* $\mathrm{H}(\mathrm{D}_r)$ *auto-annulé par* $\mathcal{C}$ *et de la forme* $g(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$.

Preuve. – Soit $f \in \mathrm{L}_1(\Gamma)$. Pour tout $x \in \mathfrak{M}$, il est clair que la famille $f(\gamma)\gamma^n x^n$ est une famille sommable et la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathfrak{M}$ par $\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathrm{N}_0} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^n x^n$ satisfait

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \sum_{n \in \mathrm{N}_0} (\gamma x)^n = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{f(\gamma)}{1 - \gamma x}$$

de sorte que $\tilde{f}$ est en fait la restriction d'une fonction $\bar{f}$ définie sur $\mathrm{K} - \Gamma$ par (1) $\bar{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{f(\gamma)}{1 - \gamma x}$; alors on a $\bar{f} \in \mathrm{H}(\mathrm{D})$. De plus, on sait que si γ et $\gamma' \in \Gamma$ on a $|\gamma - \gamma'| \geqslant p^{\frac{1}{p(p-1)}}$ de sorte que comme $r < p^{\frac{1}{p(p-1)}}$ chaque trou de D contient un seul élément de Γ ; par suite le développement Mittag-Lefflerien de $\bar{f}$ se présente sous la forme (1).

On sait que pour tout entier $m > 0$, $\Gamma_m - \Gamma_{m-1}$ se compose de $p^{m-1} \cdot (p-1)$ points répartis sur le cercle C_m de centre 1, de rayon $p^{\frac{1}{p^m(p-1)}}$ et il en résulte donc que le filtre croissant $\mathcal{C}$ est percé.

Maintenant, il est clair que $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{F}$ si et seulement si (2) $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (car $\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$) ; mais trivialement, (1) est équivalent à (3) $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^n x^n = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$. Or (2) est aussi équivalent à (4) $\sum_{n \in \mathbf{N}_0} \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^n\Big) x^n = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$ car (3) implique (4) et comme toute série de Taylor nulle sur un disque a tous ses coefficients nuls, on voit que (4) implique (3). Donc finalement $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{F}$ si et seulement si $\overline{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$. Or le développement Mittag-Lefflerien de $\overline{f}$ montre que $f = 0$ si et seulement si $\overline{f} = 0$. On voit donc que $\mathcal{F}$ n'est pas injective si et seulement s'il existe un élément $\underset{\neq 0}{\overline{f} \in \mathrm{H(D)}}$, de la forme (1), dont la restriction à $\mathfrak{M}$ est nulle ; il résulte du lemme II.1 que $\mathfrak{M}$ est inclus dans une plage de T-filtre et comme $\mathcal{C}$ est le seul filtre percé de D, cela implique que $\mathcal{C}$ soit un T-filtre. Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est un T-filtre et s'il existe un élément $g \in \mathrm{H(D)}$, auto-annulé par $\mathcal{C}$ et de la forme $\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$ où la famille a_γ tend vers zéro suivant le filtre complémentaire des parties finies de Γ, alors la fonction $f : \gamma \to a_\gamma$ appartient à $\operatorname{Ker} \mathcal{F}$ et la proposition II.3 est établie.

4. Solution du problème.

Nous allons maintenant résoudre le problème posé sous cette nouvelle forme.

II.4. Proposition. — *Le filtre percé $\mathcal{C}$ est un* T-*filtre et il existe un élément $g \in \mathrm{H(D)}$, auto-annulé par $\mathcal{C}$, de la forme*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{a_\gamma}{1 - \gamma x}. \tag{1}$$

II.5. Corollaire. — *$\mathcal{F}$ n'est pas injective.*

Preuve de la proposition II.4. — Supposons construite une suite de polynômes Q_m possédant la propriété $\varphi(\mathcal{C})$ et telle que pour tout m,

Q_m n'admette que des zéros simples appartenant tous à Γ et soit g un élément de H(D) auto-annulé par $\mathcal{C}$ et de la forme indiquée par le lemme I.6B. Alors comme les zéros de Q_m sont simples, il est clair que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $(1 - \gamma x) g \in H(D \cup T_\gamma)$ où T_γ est le trou de D qui contient γ^{-1}. Donc la partie singulière du développement Mittag-Lefflerien de g relative au trou T_γ est de la forme $\dfrac{a_\gamma}{1 - \gamma x}$ ce qui prouve que g est bien de la forme (1). Il reste donc à construire une suite de polynômes Q_m possédant la propriété $\varphi(\mathcal{C})$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, Q_m n'admette que des zéros simples, appartenant tous à Γ.

Pour tout entier s, Γ_s est de la forme $\Gamma_{s-1} + \sum_{i=1}^{p-1} u_{s,i}\Gamma_{s-1}$ où $(u_{s,i})$, $(1 \leqslant i \leqslant p - 1)$, désigne $p - 1$ racines p^s-ième de 1 telles que $|u_{s,i} - u_{s,j}|_p = p^{\left(\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}\right)}$. On notera $\Gamma_{s,0} = \Gamma_{s-1}$ et $\Gamma_{s,i} = u_{s,i}\,\Gamma_{s-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant p - 1)$ et on a donc $-\log d(\Gamma_{s,i}, \Gamma_{s,j}) = \dfrac{1}{p^{s-1}(p-1)}$.

On appellera *Γ-cercle* l'intersection avec Γ d'un cercle C centré en un point de Γ, dont le rayon est de la forme $r_s = p^{\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}}$. (Alors on sait qu'un Γ-cercle de rayon r_s possède $p^{s-1}(p - 1)$ points). En particulier, pour tout $s \in \mathbf{N}$, on notera Σ_s le Γ-cercle de centre 1, de rayon r_s ; alors il est clair que $\Gamma_s \cap C\Gamma_{s-1} = \Sigma_s$. D'autre part, on notera C_s le cercle de centre 1, de rayon r_s.

Pour tout entier n fixé nous allons construire maintenant une partie E_n de Γ aussi grande que possible telle que pour tous $\underset{x \neq y}{x, y} \in E_n$ on ait (5) $v_p(x - y) \geqslant \dfrac{1}{p^{n-1}(p-1)}$. Soit $s \geqslant n$ et supposons déjà construite une partie $E_{n,s}$ de Γ_s satisfaisant la relation (5) pour tous $\underset{x \neq y}{x, y} \in E_{n,s}$ et telle que tout Γ-cercle Σ inclus dans Γ_s et de rayon $r_t \geqslant r_n$ satisfasse (6) $\mathrm{Card}(\Sigma \cap E_{n,s}) = p^{t-1}(p - 1)$. Nous allons construire une partie $E_{n,s+1}$ de Γ_{s+1} contenant $E_{n,s}$, et satisfaisant toujours (5) et (6) au rang $s + 1$. Pour cela considérons les parties $\Gamma_{s+1,i} = u_{s+1,i}G_s$ et soit $E_{n,s+1} = E_{n,s} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} u_{s,i}E_{n,s}\right)$. Il est clair que $E_{n,s+1}$ satisfait encore les relations (5) et (6), et on peut ainsi construire E_n par récurrence en posant $E_n = \bigcup_{s=n}^{\infty} E_{n,s}$. Nous allons maintenant construire la suite Q_m de la façon suivante. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, soit v_m la partie entière de $\log_p m$ et soit Δ_m une classe du cercle C_m. Alors soit $Q_m(X) = \prod_{\alpha \in E_{v_m} \cap \Delta_m} (X - \alpha)$; on a $\deg Q_m = P^{m-1-v_m}$ et Q_m admet exactement $P^{j-1-v_m}(p-1)$ pôles sur chaque Γ-cercle inclus dans Δ_m et de rayon r_j $(v_m + 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Nous allons établir que la suite Q_m possède la propriété $\varphi(\mathscr{C})$, ce qui établira le théorème d'après ce que nous avons vu précédemment.

Pour cela nous allons majorer les nombres

$$\lambda_m = \| Q_m \|_{C_m} \cdot \left\| \frac{1}{Q_m} \right\|_{\Delta_m \cap D} .$$

Soit T un trou de D inclus dans Δ_m et soit $\alpha \in T$. Alors il est clair que pour $|x - \alpha|_p = r$, on a

$$\begin{aligned}\log(\lambda_m) &= -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right) = \\ &= -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) \cdot \\ &\quad -v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right) .\end{aligned}$$

Or, par construction, le polynôme Q_m admet au plus un zéro dans chaque disque centré en un trou de D et de diamètre r_{m-v_m} de sorte qu'on a :

$$\begin{aligned}&-v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1-v_m}(p-1)}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=v_m}^{m} \frac{p^{j-1-v_m}}{p^{j-1}(p-1)} \leqslant \frac{m}{p^{v_m}} < \frac{p^{v_m+1}}{p^{v_m}} = p\end{aligned}$$

et $$-v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p^{m-1}(p-1)}\right) + v_\alpha\left((Q_m), \frac{1}{p-1}\right) \leqslant \frac{1}{p-1}$$

d'où
$$\log \lambda_m \leqslant p + \frac{1}{p-1} \cdot$$

Alors comme les zéros d'un polynôme Q_m appartiennent tous à Δ_m, on a, en posant $q_m = p^{m-1-v_m}$, $\| \prod_{j=1}^{m} Q_j \|_{C_m \cap D} = \lambda_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{r_m}{r_j}\right)^{q_j}$ et l'on est donc ramené à étudier la suite $\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{r_m}{r_j}\right)^{q_j}$. Soit

$$A_m = \log \left(\prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} \right) \cdot$$

On a $\quad A_m = \sum_{j=1}^{m-1} (\log d_j - \log d_m)\, q_j =$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} P^{j-1-v_j} \left[\frac{1}{P^{j-1}(p-1)} - \frac{1}{P^{m-1}(p-1)} \right]$$

et comme $P^{v_j} > j$ on voit que $A_m > \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m-1} P^{j-m-v_j} \right) \left(\frac{1}{p-1} \right)$. Or $\sum_{j=1}^{m-1} P^{j-m-v_j}$ est borné de façon évidente, ce qui prouve que

$$\lim_{m \to \infty} A_m = +\infty ,$$

donc la suite Q_m possède la propriété $\varphi(\mathcal{C})$ et la proposition II.4 est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice et A. Escassut, Sur la non injectivité de la transformation de Fourier p-adique relative à Zp, *C.R.A.S.*, A, 278 (mars 1974), 583-585.

[2] A. Escassut, Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, *Indagationes Mathematicae*, (North. Holland Publishing Company. Amsterdam, London) Vol. 36, n° 4, (1974), 339-351.

[3] A. ESCASSUT, Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, *Annali di mathematica pura ed applicata,* Bologna. (A paraître).

[4] J. FRESNEL et B. DE MATHAN, Sur la transformation de Fourier p-adique, *C.R.A.S.,* Paris, A, 277 (15 oct. 1973), 711-714.

[5] G. GARANDEL, Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indagationes Mathematicae,* Amsterdam, London. (A paraître en 1975).

[6] L. GRUSON, Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine, 1967 (polycopié).

[7] M. GUERRAOUI et B. DE MATHAN, Groupes p-réflexifs et transformation de Fourier p-adique, *C.R.A.S.,* Paris, A, 276, 423-426.

[8] M. KRASNER, Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, Colloques Internationaux du C.N.R.S., n° 143, Clermont-Ferrand, 1964, Edition du C.N.R.S. 1966.

[9] M. LAZARD, Les zéros d'une fonction analytique. Presses Universitaires de France, Paris, (I.H.E.S. Publication mathematique n° 14).

[10] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 269 (21 juil. 1969), 126-129.

[11] E. MOTZKIN et Ph. ROBBA, Prolongement analytique en analyse p-adique. Séminaire de Théorie des Nombres, Faculté des Sciences de Bordeaux (J. Lesca) n° 3, 1968-1969 (polycopié)

[12] Ph. ROBBA, Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, *Astérisque,* fascicule n° 10, Octobre 1973.

Manuscrit reçu le 17 mai 1974
Accepté par C. Chabauty.

Alain ESCASSUT,
Laboratoire de Mathématiques
Associé au CNRS
UER de Math. et d'Informatique
Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 – Talence.