ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE MOLINO

Sur la géométrie transverse des feuilletages

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 2 (1975), p. 279-284

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_279_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 279-284

SUR LA GÉOMÉTRIE TRANSVERSE DES FEUILLETAGES

par Pierre MOLINO

Soit $(V, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. La géométrie transverse du feuilletage $\mathcal{F}$ est l'étude des structures transverses localement projetables le long des feuilles : formes basiques (voir [7]), champs de vecteurs feuilletés ([8]), connexions transverses projetables ([4]) etc. En fait cette géométrie n'est pas liée à la variété feuilletée elle-même, mais seulement à la structure de l'espace des feuilles. Autrement dit on peut définir une relation d'équivalence entre feuilletages ayant la même géométrie transverse. La structure définie par cette relation d'équivalence est appelée ici *feuillage.*

On esquisse rapidement l'étude des feuillages : holonomie, cohomologie, morphismes, fibrations, connexions et G-structures. On remarquera que, dans le cas d'un feuilletage sans holonomie transversale (Godbillon [2]), le feuillage associé est une Q-variété au sens de R. Barre ([1]). On démontre en particulier le résultat suivant : si un feuillage admet une connexion linéaire, alors son prolongement d'ordre 1 est une Q-variété.

1. Feuilletages transversalement équivalents ; notion de feuillage.

Soient $(V, \mathcal{F})$ et $(V_1, \mathcal{F}_1)$ deux variétés feuilletées. Les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ sont dits *transversalement équivalents* si il existe une variété feuilletée $(\hat{V}, \hat{\mathcal{F}})$ et des submersions π , π_1 de $\hat{V}$ respectivement sur V et V_1 telles que les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ soient les préimages de celles de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_1$) par π (resp. π_1). On vérifie que ceci définit bien une relation d'équivalence entre feuilletages.

Ceci étant, soit $\mathcal{W}$ un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Un *atlas de feuillage différentiel* sur $\mathcal{W}$ sera une famille $\mathcal{A} = (U_i, V_i, \mathcal{F}_i, \pi_i)_{i\in I}$ de quadruplés avec :

i) $(U_i)_{i\in I}$ forme un recouvrement ouvert de $\mathcal{W}$

ii) pour tout $i \in I$, $(V_i, \mathcal{F}_i)$ est une variété feuilletée d'espace des feuilles U_i, $\pi_i : V_i \to U_i$ la projection naturelle

iii) au-dessus de $U_i \cap U_j$, les feuilletages $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_j$ sont transversalement équivalents.

DEFINITION. — *Un* feuillage différentiel *(ou F-variété) est un espace topologique à base dénombrable d'ouverts, muni d'un atlas de feuillage différentiel (ou F-atlas) maximal.*

Si $\mathcal{W}$ est connexe, la codimension des feuilletages de l'atlas est la même et sera dite *dimension du feuillage.*

Exemples. — a) Si $(V, \mathcal{F})$ est une variété feuilletée, $\mathcal{F}$ étant de codimension q, l'espace des feuilles de $\mathcal{F}$ est muni d'une structure de feuillage de dimension q. On notera $V/\mathcal{F}$ ce feuillage et $\pi : V \to V/\mathcal{F}$ la projection naturelle.

b) Si les feuilletages $\mathcal{F}_i$ de l'atlas $\mathcal{A}$ sont sans holonomie transversale ([2]), $\mathcal{A}$ définit un Q-atlas et le feuillage est une Q-variété ([1]).

La notion de *morphisme de feuillages différentiels* se définit de façon immédiate à partir de la notion de morphisme de variété feuilletée par localisation transverse. En particulier, la projection $\pi : V \to V/\mathcal{F}$ d'une variété feuilletée sur le feuillage associé est un morphisme de feuillages.

2. Holonomie d'un feuillage différentiel.

Soit $\mathcal{W}$ un feuillage différentiel. x étant un point de $\mathcal{W}$, $(V, \mathcal{F}, \pi)$ une F-carte de $\mathcal{W}$ dans un voisinage U de x, $y \in \pi^{-1}(x)$, supposons que la dimension (locale) de $\mathcal{W}$ soit q. Un *repère local* de $\mathcal{W}$ en x sera un germe d'application de $(\mathbf{R}^q, 0)$ dans (U, x) de la forme $\pi \circ \tau$, où τ est une immersion transverse en y à $\mathcal{F}$. Le groupe Diff $(\mathbf{R}^q, 0)$ des germes de difféomorphismes de $\mathbf{R}^q$ de source et but 0 opère par composition sur l'ensemble $\mathcal{R}_x$ des repères locaux en x.

L'holonomie de $\mathcal{W}$ en x est la classe d'équivalence Π_x des sous-groupes de Diff $(\mathbf{R}^q, 0)$ qui laissent invariant un repère local en x. On notera que cette notion correspond à la notion d'holonomie transversale en y du feuilletage $\mathcal{F}$ ([2]).

$\mathcal{W}$ est une Q-variété si et seulement si son holonomie en tout point est triviale.

3. Formes différentielles et cohomologie.

$\mathcal{W}$ étant un feuillage de dimension q, une *p-forme différentielle* sur $\mathcal{W}$ $(0 \leqslant p \leqslant q)$ sera définie localement, dans le domaine U d'une F-carte $(V, \mathcal{F}, \pi)$, par la donnée d'une p-forme "basique" (Reinhart [7]) sur V. La condition de cohérence de ces formes locales est évidente.

Comme la différentielle d'une forme basique est une forme basique, on aura une différentielle pour les formes sur un feuillage, et par suite une *cohomologie* dont les espaces seront notés $H^p_{\text{bas}}(\mathcal{W}, \mathbf{R})$. Bien entendu, dans le cas où $\mathcal{W}$ est une variété différentielle usuelle, on retrouve la cohomologie de De Rham (voir [9]).

4. Fibrations dans la catégorie des feuillages ; connexions.

Soit $(E, \mathcal{F}_E)$ un G-fibré principal feuilleté au-dessus de la variété feuilletée $(V, \mathcal{F})$. La projection $p : E \to V$ définira un morphisme de feuillages :

$$\bar{p} : E/\mathcal{F}_E \to V/\mathcal{F}$$

qui servira de modèle aux fibrations principales de la catégorie. On notera que si $(\mathcal{E}, p, \mathcal{W})$ est un G-fibré principal de la catégorie des feuillages, les fibres $\bar{p}^1(x)$ sont des Q-variétés en groupe G (voir [1]).

Une *connexion* ω sur $(\mathcal{E}, p, \mathcal{W})$ sera définie par recollement de connexions projetables (au sens de [4]) sur les fibrés principaux feuilletés locaux qui définissent $\mathcal{E}$. En général, l'existence d'une telle connexion ne sera pas assurée. On sait que, dans le cas où $\mathcal{E} = E/\mathcal{F}_E$ et $\mathcal{W} = V/\mathcal{F}$, l'existence d'une connexion projetable sur E, c'est-à-dire d'une connexion sur $\mathcal{E}$, est équivalente à la nullité d'une obstruction d'Atiyah $a(E)$, définie en [4].

Supposons qu'il existe une connexion ω sur le feuillage G-fibré principal $(\mathcal{E}, p, \mathcal{W})$. La courbure Ω de ω sera une forme différentielle sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\underline{g}$ du groupe structural. Si $I(\underline{g})$ est l'algèbre des polynômes symétriques sur $\underline{g}$ invariants par la représentation adjointe, on aura un homomorphisme de Chern-Weil :

$$\lambda : I(\underline{g}) \to H^*_{\mathrm{bas}}(\mathcal{W}, \mathbf{R})$$

qui définira les *classes caractéristiques* du fibré principal. Ce sont des obstructions à l'existence d'une section globale de $\mathcal{E}$ (on remarque que l'existence de sections locales n'est pas assurée !).

5. Connexions linéaires ; G-structures.

Soit $\mathcal{W}$ un feuillage différentiel de dimension q.

Le *fibré des repères* $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$ sera défini en considérant dans les feuilletages locaux d'un atlas de $\mathcal{W}$ les fibrés de repères transverses et les feuillages associés. Il est clair que $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ sera un feuillage $Gl(q, \mathbf{R})$-fibré principal au-dessus de $\mathcal{W}$.

Une *connexion linéaire* sur $\mathcal{W}$ sera une connexion sur ce fibré principal.

Si G est un sous-groupe de Lie de $GL(q, \mathbf{R})$, une G-structure sur $\mathcal{W}$ sera définie en recollant des G-structures transverses projetables sur les feuilletages locaux d'un atlas de $\mathcal{W}$. Par exemple, une *structure riemannienne* sur un feuillage sera une $O(q, \mathbf{R})$-structure au sens précédent. On notera que si $\mathcal{W}$ admet une structure riemannienne, il admet en particulier une connexion linéaire (l'unique connexion adaptée sans torsion) que l'on pourra appeler connexion de Levi-Civita.

Le feuillage $\mathcal{W}$ sera dit *parallélisable* s'il admet une $\{e\}$-structure. On a alors :

PROPOSITION 1. — *Tout feuillage parallélisable est une Q-variété.*

En effet, il suffit de prouver le résultat quand $\mathcal{W} = V/\mathcal{F}$. Dire que $\mathcal{W}$ est parallélisable, c'est dire que le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une trivialisation projetable de son fibré transverse. Or ceci entraine immédiatement l'absence d'holonomie transversale.

On en déduit :

PROPOSITION 2. – *Si $\mathcal{W}$ admet une connexion linéaire, son fibré de repères $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ est une Q-variété.*

En effet, si $\mathcal{W}$ admet une connexion linéaire, $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ est un feuillage parallélisable, comme on le vérifie immédiatement au-dessus des cartes locales de $\mathcal{W}$.

6. Champs de vecteurs et groupes de transformations ; feuillages transitifs.

Un champ de vecteurs sur le feuillage $\mathcal{W}$ sera défini en recollant des champs de vecteurs projetables dans les feuilletages locaux d'un atlas de $\mathcal{W}$. Ni l'existence globale, ni même l'existence locale d'un tel champ ne sont assurés, en dehors du cas du champ identiquement nul. En particulier, la valeur d'un tel champ en un point de $\mathcal{W}$ doit être un invariant de l'holonomie en ce point.

Soit X un tel champ de vecteurs. Si $\mathcal{W} = V/\mathcal{F}$, X se relève en un champ $\widetilde{X}$ projetable sur V. $\widetilde{X}$ définit dans V des groupes locaux à un paramètre compatibles avec la projection $\pi : V \to V/\mathcal{F}$. On obtient ainsi des groupes locaux à un paramètre de transformations de $\mathcal{W}$ associés à X.

Si $\mathfrak{X}(\mathcal{W})$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathcal{W}$, en chaque point $x \in \mathcal{W}$ les champs de vecteurs engendrent un sous-espace de l'espace des vecteurs tangents en x.

DEFINITION. – *Le feuillage $\mathcal{W}$ est* transitif *si en chaque point le sous-espace engendré par les champs de vecteurs de $\mathcal{W}$ a pour dimension la dimension du feuillage.*

On peut dire de façon équivalente que $\mathfrak{X}(\mathcal{W})$ est une algèbre de Lie transitive sur $\mathcal{W}$. On notera que ceci impose en particulier que $\mathcal{W}$ soit "localement parallélisable". D'où :

PROPOSITION 3. – *Si le feuillage $\mathcal{W}$ est transitif, c'est une Q-variété.*

Sur un feuillage connexe transitif, les groupes locaux à un paramètre associés aux champs de vecteurs engendrent un pseudogroupe transitif de transformations. On pourra également définir sur un tel feuillage la notion de G-structure transitive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BARRE, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, *Annales de l'Institut Fourier*, XXIII, 3 (1973), 227-312.

[2] C. GODBILLON, Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, *Annales de l'Institut Fourier,* XVII, 2 (1967), 219-260.

[3] C. EHRESMANN, Structures feuilletées, *Proceedings of the Fifth Canadian Mathematical Congress,* 109-172.

[4] P. MOLINO, Classes d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projetables, *C.R.A.S. Paris,* 271 (1971), 779-781.

[5] P. MOLINO, Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projetable, *Topology*, 12 (1973), 317-325.

[6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Scient. et Ind.,* Hermann, Paris (1952).

[7] B. REINHART, Harmonic integrals on foliated manifolds, *Amer. Math. J.,* 81 (1959), 529-536.

[8] I. VAISMAN, Variétés riemanniennes feuilletées, *Czech. Math. J.*, 21 (1971), 46-75.

[9] G. SCHWARZ, On the De Rham cohomology of the leaf space of a foliation, *Topology*, 13 (1974) 185-188.

Manuscrit reçu le 30 juillet 1974
accepté par G. Reeb.

Pierre MOLINO,
Université des Sciences & Techniques du Languedoc
Institut de Mathématiques
Place Eugène Bataillon
34060 Montpellier Cedex.