ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Racines p-ième de fonctions différentiables : passage du local au global

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 185-192

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_185_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 185-192

RACINES P$^{\text{èmes}}$ DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES : PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

par Jean-Claude TOUGERON

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe C^∞ *sur une variété* X, *qui admet localement une racine* $p^{\text{ème}}$ C^∞, *soit globalement puissance* $p^{\text{ème}}$ *de fonction* C^∞.

Soit X une variété différentiable paracompacte de classe C^∞. On désigne par $\mathcal{E}$ le faisceau sur X des germes de fonctions C^∞ à valeurs dans C ; par $\mathcal{E}^*$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}$ formé par les germes inversibles, i.e. $\forall x \in X$, $\mathcal{E}^*(x) = \{\varphi \in \mathcal{E}(x) ; \varphi(x) \neq 0\}$; par $\underline{\mathcal{E}}^\#$ le préfaisceau sur X des fractions différentiables défini comme suit : si U est un ouvert de X,

$$\underline{\mathcal{E}}^\#(U) = \{\varphi/\psi ; \varphi , \psi \in \mathcal{E}(U) \quad \text{et} \quad \forall x \in U, T_x\varphi \neq 0, T_x\psi \neq 0\} \quad ;$$

par $\mathcal{E}^\#$ le faisceau associé à $\underline{\mathcal{E}}^\#$. Les faisceaux $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{E}^\#$ sont des faisceaux de groupes abéliens multiplicatifs. Enfin, on note $\mathcal{E}^{[p]}$ la puissance $p^{\text{ème}}$ de $\mathcal{E}^\#$ ($\forall x \in X$, $\mathcal{E}^{[p]}(x)$ est le sous-groupe de $\mathcal{E}^\#(x)$ formé par les φ^p où $\varphi \in \mathcal{E}^\#(x)$) ; on pose :

$$G_p(X) = \operatorname{coker}\,(H^0(X, \mathcal{E}^\#) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{E}^{[p]})) \;;$$

$$G_p^*(X) = \operatorname{coker}\,(H^0(X, \mathcal{E}^*) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{E}^*)),$$

où dans les deux cas, p désigne l'application qui, à tout élément, associe sa puissance $p^{\text{ème}}$.

LEMME 1. — *Soit* Y *un fermé de* X *et soit* $\varphi \in \mathcal{E}(Y)$ *telle que* $\forall y \in Y$, $T_y\varphi \neq 0$. *Alors, il existe* $\overline{\varphi} \in \mathcal{E}(X)$ *telle que*

$$\forall x \in X , T_x\overline{\varphi} \neq 0,$$

et telle que $\overline{\varphi}$ *induise le germe* φ.

Preuve. – Soit $\varphi' \in \mathcal{E}(X)$ telle que φ' induise le germe φ. Il existe un voisinage ouvert U de Y, tel que, $\forall x \in \overline{U}$, on ait $T_x \varphi' \neq 0$. Soit ϵ une fonction C^∞ sur X à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\epsilon = 0$ au voisinage de Y et $\epsilon = 1$ sur $X - U$.

D'après le théorème de transversalité, l'ensemble des applications $\varphi'' \in \mathcal{E}(X)$ telles que φ'' soit transverse sur $\{0\}$ est dense dans $\mathcal{E}(X)$ pour la topologie fine [1]. Choisissons φ'' suffisamment voisin de φ' pour que, $\forall x \in \overline{U}$, on ait : $T_x(\varphi' + \epsilon(\varphi'' - \varphi')) \neq 0$.

Posons $\overline{\varphi} = \varphi' + \epsilon(\varphi'' - \varphi')$; on a $\overline{\varphi} = \varphi'$ au voisinage de Y, donc $\overline{\varphi}$ induit le germe φ. En outre, $\overline{\varphi} = \varphi''$ sur $X - \overline{U}$ et donc, $\forall x \in X$, on a $T_x \overline{\varphi} \neq 0$.

LEMME 2. – *Avec les notations précédentes :*

1) $\underline{\mathcal{E}}^{\#}$ *est un faisceau, i.e.* $\underline{\mathcal{E}}^{\#} = \mathcal{E}^{\#}$.

2) *Le faisceau* $\mathcal{E}^{\#}$ *est mou.*

3) *Tout élément de* $\mathcal{E}^{[p]}(X)$ *est de la forme* f/g^p, *où*

$$f, g \in \mathcal{E}(X) \;;\; \forall x \in X,\ T_x f \neq 0,\ T_x g \neq 0,$$

et f est localement la puissance $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞.

Preuve. –

1) Soit U un ouvert de X ; soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U et pour chaque $i \in I$, soit $\varphi_i/\psi_i \in \underline{\mathcal{E}}^{\#}(U_i)$, tels que $\varphi_i/\psi_i = \varphi_{i'}/\psi_{i'}$ sur $U_i \cap U_{i'}$. Il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j \in J}$ plus fin que le recouvrement précédent et une partition C^∞ de l'unité $(\epsilon_j)_{j \in J}$ subordonnée à ce recouvrement. Pour chaque indice $j \in J$, choisissons un indice $i(j) \in I$ tel que $V_j \subset U_{i(j)}$. D'après le lemme 1, il existe $f_j/g_j \in \underline{\mathcal{E}}^{\#}(U)$ tel que $f_j/g_j = \varphi_{i(j)}/\psi_{i(j)}$ au voisinage de supp ϵ_j et $g_j = 1$ sur $U - V_j$.

La somme localement finie $\sum_{j \in J} \epsilon_j \dfrac{f_j}{g_j}$ s'écrit, après réduction au même dénominateur, sous la forme f/g, où g désigne le produit localement fini $\prod_{j \in J} g_j$. Visiblement, $\forall i \in I$, la restriction de f/g à U_i est égale à φ_i/ψ_i. Il en résulte que l'application canonique (évidemment injective) $\underline{\mathcal{E}}^{\#}(U) \to \mathcal{E}^{\#}(U)$ est surjective, et donc un isomorphisme.

2) Soit Y un fermé de X. D'après (1), une section de $\mathcal{E}^{\#}$ sur Y est de la forme φ/ψ où $\varphi \in \mathcal{E}(\mathrm{Y})$, $\psi \in \mathcal{E}(\mathrm{Y})$ et

$$\forall y \in \mathrm{Y},\ \mathrm{T}_y\ \varphi \neq 0,\ \mathrm{T}_y\ \psi \neq 0.$$

D'après le lemme 1, une telle section se prolonge en une section de $\mathcal{E}^{\#}$ sur X : le faisceau $\mathcal{E}^{\#}$ est donc mou.

3) La preuve est analogue à celle de (1) et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3. — *On a un diagramme commutatif de morphismes canoniques de groupes abéliens :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{G}_p^*(\mathrm{X}) & \to & \mathrm{G}_p(\mathrm{X}) & \to & \mathrm{G}_p(\mathrm{X})/\mathrm{G}_p^*(\mathrm{X}) & \to & 0 \\
 & & \psi^* \downarrow \wr & & \psi \downarrow \wr & & \psi \downarrow \wr & & \\
0 & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p & \to & \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/p) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbf{Z})_p & \to & 0
\end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes(*).

Preuve. — On a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Z}/p \to \mathcal{E}^{\#} \xrightarrow{p} \mathcal{E}^{[p]} \to 0$$

D'après 2.2., on en déduit une suite exacte :

$$\mathrm{H}^0(x, \mathcal{E}^{\#}) \xrightarrow{p} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{E}^{[p]}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{E}^{\#}) = 0.$$

D'où un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{G}_p(\mathrm{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/p) \tag{3.1}$$

De même, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Z}/p \to \mathcal{E}^* \xrightarrow{p} \mathcal{E}^* \to 0$$

d'où une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{G}_p^*(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{E}^*)_p \to 0 \tag{3.2}$$

Enfin, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\exp} \mathcal{E}^* \to 0$$

(*) Si G est un groupe abélien additif, on pose : $\mathrm{G}_p = \{x \in \mathrm{G} \ ; p\, x = 0\}$.

où exp désigne l'application exponentielle. D'où :

$$\operatorname{coker}\left(H^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\exp} H^0(X, \mathcal{E}^*)\right) \simeq H^1(X, \mathbf{Z})$$

et en tensorisant par $\mathbf{Z}/p$:

$$G_p^*(X) \simeq H^0(X, \mathcal{E}^*) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p \simeq H^1(X, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p \tag{3.3}$$

En outre, d'après la même suite exacte :

$$H^1(X, \mathcal{E}^*) \simeq H^2(X, \mathbf{Z}) \tag{3.4}$$

La proposition résulte de (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4).

COROLLAIRE 4. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $H^2(X, \mathbf{Z})_p = 0$.

2) *Toute fonction* $f \in \mathcal{E}(X)$ *telle que,* $\forall x \in X, T_x f \neq 0$, *et telle que* f *soit localement puissance* $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞, *est de la forme* $\varphi \cdot g^p$ *où* $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, $g \in \mathcal{E}(X)$, *et* $\forall x \in X$, $\varphi(x) \neq 0$ *(i.e.* f *est, à un facteur* C^∞ *inversible près, globalement puissance* $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞).

Preuve. — Immédiate, d'après la proposition 3 et 2.3.

COROLLAIRE 5. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $H^1(X, \mathbf{Z}/p) = 0$

2) *Toute fonction* $f \in \mathcal{E}(X)$ *telle que,* $\forall x \in X$, $T_x f \neq 0$, *et telle que* f *soit localement puissance* $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞, *est de la forme* g^p, *où* $g \in \mathcal{E}(X)$, *(i.e.* f *est globalement puissance* $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞).

Preuve. — Immédiate, d'après la proposition 3 et 2.3.

Nous nous proposons désormais d'expliciter l'homomorphisme ψ. Précisons d'abord quelques notations.

Le cercle S^1 étant paramétré par l'angle θ, i.e. par l'application $[0,2\pi] \ni \theta \to e^{i\theta} \in S^1$, une application C^∞ de S^1 dans $\mathbf{C}$ s'identifie à une application C^∞ $\sigma : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ telle que,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \sigma^{(n)}(0) = \sigma^{(n)}(2\pi).$$

Supposons que σ n'est plate en aucun point de $[0,2\pi]$, et soit $\mu_\theta(\sigma)$ le plus petit entier n tel que $\sigma^{(n)}(\theta) \neq 0$. On pose :

$$\mu(\sigma) = \sum_{\theta \in [0,2\pi[} \mu_\theta(\sigma) \quad \text{et} \quad \nu(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)}\, d\theta.$$

Si σ est à valeurs dans $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, il est bien connu que $\nu(\sigma)$ est un entier (c'est le degré de l'application $\sigma : S^1 \to \mathbf{C}\setminus\{0\}$). Plus généralement, on a le résultat élémentaire suivant :

LEMME 6. — *Si l'application σ n'est plate en aucun point de $[0,2\pi]$, l'intégrale (généralisée) $\nu(\sigma)$ existe et $\nu(\sigma) + \frac{1}{2}\mu(\sigma)$ est un entier.*

Preuve. — Soit $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}$ l'ensemble des zéros de σ ; nous supposerons, ce qui n'est pas restrictif, que $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q < 2\pi$. Posons $\mu_{\theta_i}(\sigma) = n_i$ pour $i = 1, \ldots, q$, et plongeons $[0,2\pi]$ dans $\mathbf{C}$. Si $\eta > 0$ est assez petit, il existe pour $i = 1, \ldots, q$, une fonction continue inversible $\xi_i(z)$ sur le disque $\{z \in \mathbf{C} ; |z - \theta_i| \leqslant \eta\}$, telle que la fonction $f_i(z) = (z - \theta_i)^{n_i}.\ \xi_i(z)$ induise sur l'intervalle $[\theta_i - \eta , \theta_i + \eta]$ la fonction σ.

Si $\epsilon < \eta$, soit $\gamma_i(\epsilon)$ le demi-cercle centré en θ_i, de rayon ϵ, et situé dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} ; \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$. Enfin, soit $I(\epsilon)$ le complémentaire dans $[0,2\pi]$ de la réunion des intervalles $[\theta_i - \eta , \theta_i + \eta]$, $i = 1, \ldots, q$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la somme :

$$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)}\, d\theta + \sum_{i=1}^{q} \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{f_i'(z)}{f_i(z)}\, dz\right]$$

est le degré d'une application continue de S^1 dans S^1 ; c'est un entier qui varie continûment avec ϵ et donc indépendant de ϵ. Cette somme s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)}\, d\theta + \frac{\mu(\sigma)}{2} + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{q} \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\xi_i'(z)}{\xi_i(z)}\, dz$$

En outre :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} \, d\theta = \nu(\sigma)$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{q} \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\xi_i'(z)}{\xi_i(z)} \, dz = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

Soit $f \in \mathcal{E}(X)$ telle que, $\forall x \in X$, $T_x f \neq 0$ et telle que f soit localement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ ; soit $[f]$ sa classe dans $G_p(X)$. D'après (2.3), tout élément de $G_p(X)$ est de cette forme. Si τ est une application C^∞ de S^1 dans X, plate en aucun point de S^1, notons $[\tau] \in H_1(X, \mathbf{Z}/p)$ sa classe d'homologie. L'application f étant donnée, on peut déformer τ sans modifier la classe d'homologie en sorte que $f \circ \tau$ ne soit plate en aucun point de S^1. D'après le lemme 6, l'expression $\nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau)$ est alors définie et c'est un entier.

Supposons désormais p premier ; alors

$$H^1(X, \mathbf{Z}/p) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}/p} (H_1(X, \mathbf{Z}/p), \mathbf{Z}/p).$$

L'homomorphisme ψ sera donc complètement déterminé par la proposition suivante :

PROPOSITION 7. – *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a :*

$$< \psi([f]), [\tau] > = \nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau) \text{ mod. p.}$$

Preuve. – Considérons d'abord le cas $X = S^1$; $\tau = 1_{S^1}$. Si f est inversible, i.e. $f \in \mathcal{E}^*(S^1)$, on vérifie immédiatement que :

$$< \psi^*([f]), 1_{S^1} > = \nu(f) \quad \text{mod. p}$$

Si f est quelconque, d'après le corollaire 4, $f = \varphi \cdot g^p$ où

$$\varphi \in \mathcal{E}^*(S^1) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{E}(S^1).$$

Ainsi :

$$< \psi([f]), 1_{S^1} > = < \psi^*([\varphi]), 1_{S^1} > = \nu(\varphi) \quad \text{mod. p} =$$

$$\nu(f) - p\,\nu(g) \text{ mod. p} = \nu(f) + \frac{p}{2} \mu(g) \quad \text{mod. p} =$$

$$\nu(f) + \frac{\mu(f)}{2} \text{ mod. p.}$$

Considérons le cas général. Soit $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}^{\#}$ tel que, pour tout ouvert U de X :

$\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}(U) = \{\varphi/\psi \in \mathcal{E}^{\#}(U)$; $\varphi \circ \tau$ et $\psi \circ \tau$ ne sont plates en aucun point de $\tau^{-1}(U)\}$

et soit $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{[p]}$ le faisceau puissance $p^{\text{ème}}$ de $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}$. Posons :

$$\underset{\sim}{G}_p(X) = \operatorname{coker}\{H^0(X, \underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}) \xrightarrow{p} H^0(X, \underset{\sim}{\mathcal{E}}^{[p]})\}.$$

On a un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/p \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#} \arrow[r, "p"'] \arrow[d] & \underset{\sim}{\mathcal{E}}^{[p]} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/p \arrow[r] & \mathcal{E}^{\#} \arrow[r, "p"] & \mathcal{E}^{[p]} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'où un diagramme commutatif d'isomorphismes, le faisceau $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}$ étant mou (vérification analogue à 2.2) :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\sim}{G}_p(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^1(X, \mathbf{Z}/p) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
G_p(X) \arrow[r, "\sim"] & H^1(X, \mathbf{Z}/p)
\end{tikzcd}$$

En outre, l'application τ définit un morphisme τ^* des faisceaux $\mathbf{Z}/p$, $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{\#}$, $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^{[p]}$ sur X dans les faisceaux $\mathbf{Z}/p$, $\mathcal{E}^{\#}$, $\mathcal{E}^{[p]}$ sur S^1, respectivement. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\sim}{G}_p(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tau^*"] & H^1(X, \mathbf{Z}/p) \arrow[d, "\tau^*"] \\
G_p(S^1) \arrow[r, "\psi"] & H^1(S^1, \mathbf{Z}/p)
\end{tikzcd}$$

La commutativité du premier diagramme permet d'identifier $\underset{\sim}{G}_p(X)$ à $G_p(X)$; d'après la commutativité du second et la première partie de cette démonstration :

$$< \psi \circ \tau^*([f]) , 1_{S^1} > = < \psi([f \circ \tau]) , 1_{S^1} > =$$

$$\nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2}\mu(f \circ \tau) \bmod p =$$

$$< \tau^* (\psi ([f])) \, , 1_{S^1} > =$$
$$< \psi ([f]) \, , [\tau] > \, , \text{c.q.f.d.}$$

COROLLAIRE 8. – *Soit* $f \in \mathcal{E}(\mathrm{X})$ *telle que* f *ne soit plate en aucun point de* X *et telle que* f *soit localement puissance* $p^{\text{ème}}$ *d'une fonction* C^∞. *Soit* $(\tau_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille d'application* C^∞ *de* S^1 *dans* X *telle que les* $[\tau_i]$ *engendrent* $\mathrm{H}_1(\mathrm{X}, \mathbf{Z}/p)$ *et telle que,* $\forall i \in \mathrm{I}$, $f \circ \tau_i$ *ne soit plate en aucun point de* S^1. *Alors,* f *est globalement puissance* $p^{\text{ème}}$ *de fonction* C^∞ *si et seulement,* $\forall i \in \mathrm{I}$, *l'entier* $\nu(f \circ \tau_i) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau_i)$ *est divisible par* p.

En particulier, si $p = 2$ *et si* f *est à valeurs dans* $\mathbf{R}^+$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* f *admette globalement une racine carrée* C^∞ *est que pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *le nombre de* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tels que* $\mu_\theta(f \circ \tau_i)$ *ne soit pas divisible par 4, est un nombre pair.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables. Chap. VII, *Ergebnisse Der Mathematik,* Band 71, Springer Verlag (1972).

Manuscrit reçu le 22 mai 1974
accepté par B. Malgrange.

Jean-Claude TOUGERON,
Université de Rennes I
Département de Mathématiques
Avenue du Général Leclerc
35000 - Rennes-Beaulieu.