

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LENGYEL

## **Racines de fonctions différentiables**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 25, n° 2 (1975), p. 171-183

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1975\\_\\_25\\_2\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_171_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## RACINES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Pierre LENGYEL

Soit  $f$  une application de classe  $C^\infty$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{C}$  ; supposons qu'en chaque point  $x$  de  $\Omega$ , la série de Taylor de  $f$  est la puissance  $q^{\text{ième}}$  d'une série formelle. Alors, avec ces seules hypothèses,  $f$  n'admet pas toujours (même localement) une racine  $q^{\text{ième}}$  de classe  $C^\infty$ . Par exemple, dans [1]. G. Glaeser donne un exemple d'application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , strictement positive en dehors de l'origine et plate à l'origine, n'admettant pas de racine carrée de classe  $C^2$  au voisinage de 0. Un autre exemple est fourni par la fonction de deux variables réelles :  $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$ . Visiblement, les conditions formelles sont satisfaites en tout point de  $\mathbf{R}^2$  et pourtant  $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$  n'est pas, au voisinage de l'origine, le carré d'une fonction de classe  $C^1$  (d'après le théorème des fonctions implicites ordinaire). On a cependant le résultat suivant dû à G. Glaeser ([1] ou [2]) : si  $f$  est une application de classe  $C^2$  de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}^+$ , 2-plate sur l'ensemble de ses zéros, alors sa racine carrée est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

Dans le § 2, nous considérons des fonctions positives, de classe  $C^p$  dans l'ouvert  $\Omega$ ,  $p$ -plate sur l'ensemble de leurs zéros ; nous donnons des conditions suffisantes pour que  $f$  admette une racine avec une certaine classe de différentiabilité. Les conditions envisagées sont des conditions de régularité, liées à l'inégalité de Łojasiewicz (ceci est développé dans le § 1). Dans le § 3, nous considérons une application  $f$  de  $\Omega$  dans  $\mathbf{C}$ , de classe  $C^\infty$  et plate en aucun point de  $\Omega$ . Modulo certaines inégalités analogues à celles utilisées par Hörmander [3], et l'existence d'une racine  $q^{\text{ième}}$  formelle en chaque point de  $\Omega$ ,  $f$  admet localement une racine  $q^{\text{ième}}$  de classe  $C^\infty$ .

### 1. Inégalités de Łojasiewicz.

Nous allons établir tout d'abord des résultats dont nous nous servirons par la suite. Le point générique  $x$  de  $\mathbf{R}^n$  aura pour coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  relativement à une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$ ;  $H_{n,q}$  désignera l'espace des polynômes homogènes sur  $\mathbf{R}^n$  de degré  $q$  à coefficients réels; si  $A$  est une partie de  $\mathbf{R}^n$ , on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)|.$$

Enfin, si  $\Delta$  est une demi-droite issue de l'origine de  $\mathbf{R}^n$  et si  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on notera  $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$  le cône plein ensemble des  $x$  de la boule unité de  $\mathbf{R}^n$  tels que l'angle de  $Ox$  et  $\Delta$  soit majoré par  $\theta$ .

LEMME 1.1. — *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que, pour tout polynôme  $P$  de  $H_{n,q}$ , tout  $\Delta$  et tout  $\theta$ ,*

$$\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta}} \geq C \cdot \theta^q \cdot \|P\|.$$

*Preuve.* — L'image de l'ensemble

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n; x_i \geq 0, i = 1, \dots, n; x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$

par l'application linéaire  $U_\theta$  définie par :

$$U_\theta(e_1) = e_1; \quad U_\theta(e_i) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_i$$

si  $i \geq 2$  est contenue dans  $\mathcal{C}_{Ox_1, \theta}$ . Soit  $O_\Delta$  une transformation linéaire orthogonale de  $\mathbf{R}^n$  appliquant le demi-axe  $Ox_1$  sur  $\Delta$ ;  $O_\Delta$  transforme  $\mathcal{C}_{Ox_1, \theta}$  en  $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$  et alors

$$\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta}} \geq \|P \circ O_\Delta \circ U_\theta\|_\Gamma \geq C \|P \circ O_\Delta \circ U_\theta\|$$

où  $C$  est une constante  $> 0$ . Comme pour tout  $P$  et tout  $\Delta$ ,

$$\|P \circ O_\Delta\| = \|P\|,$$

il suffit donc d'établir le résultat suivant : (1) il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $P$  et tout  $\theta$ .

$$\|P \circ U_\theta\| \geq C \cdot \theta^q \cdot \|P\|.$$

Si  $x' = (x_2, \dots, x_n)$ , tout polynôme  $P$  s'écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^q P_i(x') x_1^{q-i}$$

où  $P_i(x')$  est un polynôme homogène de degré  $i$  en  $x'$ .

Si  $Q(x) = P \circ U_\theta(x) = \sum_{i=0}^q Q_i(x') x_1^{q-i}$ ,  $Q(x) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^q \sin^i \theta P_i(x') (x_1 + \cos \theta (x_2 + \dots + x_n))^{q-i} \\ &= \sum_{i=0}^q \sin^i \theta P_i(x') \sum_{j=i}^q C_{q-i}^{q-j} x_1^{q-j} (\cos \theta (x_2 + \dots + x_n))^{j-i} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$Q_j(x') = \sum_{i=0}^j C_{q-i}^{q-j} \sin^i \theta P_i(x') [\cos \theta (x_2 + \dots + x_n)]^{j-i}.$$

On en déduit l'existence d'une constante  $C' > 0$  telle que

$$\sin^j \theta \|P_j\| \leq \|Q_j\| + C' \sum_{i=0}^{j-1} \sin^i \theta \|P_i\|.$$

Puis, par récurrence sur  $j$ , l'existence d'une constante  $C'' > 0$  telle que :

$$\sin^j \theta \|P_j\| \leq C'' \sum_{i=0}^j \|Q_i\|.$$

En particulier :

$$\sin^q \theta \sum_{j=0}^q \|P_j\| \leq (q + 1) C'' \sum_{j=0}^q \|Q_j\|,$$

d'où le résultat.

LEMME 1.2. — Soit  $\varphi$  une fonction numérique, définie et de classe  $C^p$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Posons, pour tout  $q = 0, \dots, p$ ,

$$M_q = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi^{(q)}(t)|.$$

Alors :

$$M_q \leq 2 \left( e^2 \frac{p}{q} \right)^q M_0^{1-\frac{q}{p}} [\sup(M_p, p! M_0)]^{\frac{q}{p}}.$$

*Preuve.* — Ce résultat est démontré dans [4].

Soit  $f$  une fonction numérique, définie et de classe  $C^p$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . La dérivée  $q^{\text{ième}}$  de  $f$  en un point  $x$  de  $\Omega$  s'identifie à un élément de  $H_{n,q}$  et avec cette identification,  $A$  désignant une partie de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\|f^{(q)}(x)\|_A = \sup_{h \in A} |f^{(q)}(x)(h^q)|, \quad \|f^{(q)}(x)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} |f^{(q)}(x) \cdot (h^q)|.$$

Si  $\rho > 0$  et  $x \in \Omega$  ; soit  $\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x$  le cône de sommet  $x$ , translaté de l'homothétie  $\rho$ .  $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$  du cône  $\mathcal{C}_{\Delta, \theta}$ . Enfin, pour toute partie  $B$  de  $\Omega$ , soit  $\|f^{(q)}\|_B = \sup_{x \in B} \|f^{(q)}(x)\|$ .

LEMME 1.3. — Avec les notations précédentes, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de  $n$  et  $p$  telle que pour tout entier  $q$ ,  $0 \leq q \leq p$ , tout  $x \in \Omega$  et tout  $f$  de classe  $C^p$  dans  $\Omega$  :

$$\|f^{(q)}(x)\| \leq \frac{C}{\theta^q} \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x}^{1-\frac{q}{p}} \cdot \left[ \sup \left( \frac{p!}{\rho^p} \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x}, \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x} \right) \right]^{\frac{q}{p}}.$$

Si  $y \in \mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x$ , posons pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_y(t) = f((1-t)x + ty)$ .

$$\varphi_y^{(q)}(t) = f^{(q)}((1-t)x + ty) \cdot (y-x)^q;$$

d'où

$$\varphi_y^{(q)}(0) = f^{(q)}(x) \cdot (y-x)^q$$

et ainsi :

$$\sup_y |\varphi_y^{(q)}(0)| = \|f^{(q)}(x)\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta}} \cdot \rho^q; \quad \sup_{t,y} |\varphi_y(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x};$$

$$\sup_{t,y} |\varphi_y^{(p)}(t)| \leq \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta, \theta, \rho}^x} \cdot \rho^p;$$

d'après les inégalités précédentes et (1.2) appliqué à  $\varphi_y$ , on a :

$$\|f^{(q)}(x)\|_{e_{\Delta, \theta}} \cdot \rho^q \leq 2 \left( e^2 \cdot \frac{p}{q} \right)^q \|f\|_{e_{\Delta, \theta, \rho}}^{1-\frac{q}{p}} \left[ \sup \left( p! \|f\|_{e_{\Delta, \theta, \rho}}^x, \|f^{(p)}\|_{e_{\Delta, \theta, \rho}}^x \right) \right]^{\frac{q}{p}}$$

et l'on conclut en appliquant (1.1).

Soit  $\mathfrak{G}(\Omega)$  l'anneau des fonctions numériques  $f$ , définies et de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$ ,  $V_k(f)$  l'ensemble des points de  $k$ -platitude de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble des points où  $f$  et ses  $k$  premières dérivées s'annulent,  $V_\infty(f)$  l'ensemble des points de platitude de  $f$ , c'est-à-dire l'ensemble des points où  $f$  et toutes ses dérivées s'annulent.

PROPOSITION 1.4. — Si  $f$  est dans  $\mathfrak{G}(\Omega)$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Toute fonction  $g \in \mathfrak{G}(\Omega)$ , plate sur  $V_0(f)$  est divisible par  $f$  dans  $\mathfrak{G}(\Omega)$ .

2) Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe des constantes  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$  telles que pour tout  $x \in K$ ,  $|f(x)| \geq Cd(x, V_0(f))^\alpha$  (i.e.  $f$  vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros).

3)  $V_\infty(f) = \emptyset$  ; en outre, la condition suivante est satisfaite :  
 (3') Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe des constantes  $C > 0$ ,  $\alpha \geq 1$  et pour tout  $x \in K - V_0(f)$  une boule  $B(x, \rho_x)$  avec

$$\rho_x \geq Cd(x, V_0(f))^\alpha$$

tels que pour tout  $x' \in B(x, \rho_x)$  ;  $|f(x)| \geq \frac{1}{2} |f(x')|$ .

4)  $V_\infty(f) = \emptyset$  ; en outre, la condition suivante est satisfaite :  
 (4') Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe des constantes

$$C_1, C_2, C_3 > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 0$$

et pour tout  $x \in K - V_0(f)$  un cône  $\mathfrak{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$  avec

$$\theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1}, \rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}$$

tels que :

$$\text{pour tout } x' \in \mathfrak{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x, |f(x)| \geq C_3 |f(x')| d(x, V_0(f))^{\alpha_3}.$$

1  $\Leftrightarrow$  2. cf. [5], chap. V, proposition 4.3.

2  $\Rightarrow$  3. Des inégalités

$$|f(x')| \leq |f(x)| + |f(x) - f(x')| \leq |f(x)| + Ad(x, x')$$

où A est une constante  $> 0$  dépendant de K, il vient si

$$\rho_x = \frac{c}{A} d(x, V_0(f))^\alpha : |f(x')| \leq 2 |f(x)|.$$

En outre, la condition 2 implique que  $V_\infty(f) = \phi$ , ce qui n'est pas trivial, malgré les apparences ; cf. [5], appendice.

3  $\Rightarrow$  4. évident.

4  $\Rightarrow$  2. La condition (2) étant de nature locale, il suffit de démontrer l'inégalité (2) au voisinage d'un point  $x_0$  de  $\Omega$ . Comme  $V_\infty(f) = \phi$ , il existe un voisinage compact K de  $x_0$  dans  $\Omega$ , un réel  $\beta_1 > 0$  et un entier  $q$  tels que pour tout  $x \in K$ ,  $\|f^{(q)}(x)\| \geq \beta_1$ . Si l'on pose  $p = q + 1$ , il existe une constante  $\beta_2 > 0$  telle que pour tout  $x \in K$ ,  $\|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x} \leq \beta_2$ , les  $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$  étant les cônes associés par l'hypothèse (4') au compact K.

On a, d'après l'hypothèse (4') :

$$C_3 \|f\|_{\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x} d(x, V_0(f))^{\alpha_3} \leq |f(x)|, \theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1},$$

$$\rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}.$$

La condition (2) résulte alors de (1.3) appliqué au cône  $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$  et des cinq inégalités précédentes.

Nous utiliserons au paragraphe suivant des inégalités analogues à celles de (4'). On dira qu'une fonction numérique  $f$  de classe  $C^p$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifie une "condition de Łojasiewicz faible" s'il existe trois constantes  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 1$ ,  $\alpha_3 \geq 0$  pour lesquelles elle vérifie la condition :  $\mathfrak{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  : Il existe trois constantes  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$ ,  $C_3 > 0$  telles que pour tout  $x \in \Omega \setminus V_0(f)$  il existe un cône  $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$  avec

$$\theta_x \geq C_1 d(x, V_0(f))^{\alpha_1}, \rho_x \geq C_2 d(x, V_0(f))^{\alpha_2}$$

tels que pour tout  $x'$  de  $\mathcal{C}_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}^x$ ,

$$|f(x)| \geq C_3 |f(x')| d(x, V_0(f))^{\alpha_3}.$$

D'après la proposition précédente, la fonction  $f$  vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros, si et seulement si  $V_\infty(f) = \emptyset$  et  $f$  vérifie une "condition de Łojasiewicz faible".

**2. Racines d'une fonction de classe  $C^p$ ,  $p$ -plate sur l'ensemble de ses zéros.**

**THEOREME 2.1.** — Soit  $f$  une fonction positive de classe  $C^p$  dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$ -plate sur l'ensemble non vide  $V_0(f)$  de ses zéros; on suppose qu'il existe trois constantes  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_3 \geq 0$  pour lesquelles  $f$  vérifie la condition  $\mathfrak{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ .

Alors, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f^\alpha$  est de classe  $C^k$  et  $k$ -plate sur  $V_0(f)$ , où  $k = \left\lfloor \left\lfloor \frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right\rfloor \alpha \right\rfloor$ . ( $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ ).

Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

**LEMME 2.2.** — Si  $E, F, G$  sont trois espaces de Banach,  $f$  une application de classe  $C^p$  au voisinage d'un point  $x \in E$  dans  $F$ ,  $g$  une application de classe  $C^p$  au voisinage de  $f(x)$  dans  $G$ , alors  $g \circ f$  est une application de classe  $C^p$  au voisinage de  $x$  dans  $G$  et l'on a pour  $0 \leq q \leq p$  :

$$\| (g \circ f)^{(q)}(x) \| \leq \sum_{k=1}^q \| g^{(k)}(f(x)) \| \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_q = k \\ m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = q}} \frac{q!}{m_1! m_2! \dots m_q!} \left( \frac{\|f'(x)\|}{1!} \right)^{m_1} \dots \left( \frac{\|f^{(q)}(x)\|}{q!} \right)^{m_q}$$

*Preuve.* — Des développements limités à l'ordre  $p$  et  $f$  et  $g$  respectivement en  $x$  et  $f(x)$ , on en déduit pour  $0 \leq q \leq p$  :



$$\frac{1}{q!} (g \circ f)^{(q)}(x) [h, \dots, h] =$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} g^{(k)}(f(x)) \left( \frac{1}{i_1!} f^{(i_1)}(x) (h^{i_1}), \dots, \frac{1}{i_k!} f^{(i_k)}(x) (h^{i_k}) \right)$$

$$\text{d'où } (g \circ f)^{(q)}(x) [h_1, \dots, h_q] =$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq \alpha_1^j < \dots < \alpha_{i_j}^j \leq q \\ \alpha_i^u \neq \alpha_i^v \text{ pour } (u, i) \neq (v, j)}} g^{(k)}(f(x)) [f^{(\alpha_1^1)}(x) (h_{\alpha_1^1}), \dots, h_{\alpha_{i_1}^1}), \dots]$$

et aussi :

$$\|(g \circ f)^{(q)}(x) (h_1, \dots, h_q)\| \leq$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \frac{q!}{i_1! \dots i_k!} \|g^{(k)}(f(x))\| \|f^{(i_1)}(x)\| \dots \|f^{(i_k)}(x)\| \|h_1\| \dots \|h_q\|$$

$$\text{Mais de l'égalité } \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = q \\ 1 \leq i_j \leq q}} \frac{q!}{i_1! \dots i_k!} \|f^{(i_1)}(x)\| \dots \|f^{(i_k)}(x)\| =$$

$$\sum_{\substack{m_1 + \dots + m_q = k \\ m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = q}} \frac{k! q!}{(1!)^{m_1} \dots (q!)^{m_q} m_1! \dots m_q!} \|f'(x)\|^{m_1} \dots \|f^{(q)}(x)\|^{m_q}$$

on déduit le résultat.

LEMME 2.3. — Si  $f$  est une application de classe  $C^p$  au voisinage d'un point  $x$  d'un espace de Banach dans  $\mathbf{R}_*^+$ , alors pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f^\alpha$  est de classe  $C^p$  au voisinage de  $x$  et l'on a pour  $0 \leq q \leq p$  :

$$\|\varphi^{(q)}(x)\| \leq \frac{q!}{f(x)^{q-\alpha}} \sum_{\substack{m_0 + \dots + m_q = q \\ m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = q}} \frac{|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-q+m_0+1)|}{m_1! \dots m_q! (1!)^{m_1} \dots (q!)^{m_q}} (f(x))^{m_0} \|f'(x)\|^{m_1} \dots \|f^{(q)}(x)\|^{m_q}$$

*Preuve.* — Il suffit d'appliquer 2.2 à  $g : x \rightarrow x^\alpha$ .

*Preuve de 2.1.* — Soit  $x_0 \in V_0(f)$ ,  $U$  un voisinage de  $x_0$  dans  $\Omega$ ,  $M_p = \sup_{y \in U} \|f^p(y)\|$  et des entiers  $0 \leq q \leq k \leq p$ . Il existe une constante  $C_1 > 0$  ne dépendant que de  $n$  et  $p$  (1.3 et les hypothèses de 2.1) telle que pour tout  $x \in U \setminus V_0(f)$

$$\|f^q(x)\| \leq \frac{C_1 (f(x))^{1 - \frac{q}{k}}}{d(x, V_0(f))^{\alpha_1 q + \alpha_3 (1 - \frac{q}{k})}} \left( \sup \left( \frac{k! f(x)}{C_2^k C_3 d(x, V_0(f))^{\alpha_2 k + \alpha_3}}, \|f^{(k)}\|_{c_x, \Delta_x, \theta_x, \rho_x} \right) \right)^{\frac{q}{k}}$$

Il existe donc une constante  $C_2 > 0$  ne dépendant que de  $n$  et  $p$  telle que :

$$\|f^q(x)\| \leq C_2 (f(x))^{1 - \frac{q}{k}} \cdot M_p^{\frac{q}{k}} d(x, V_0(f))^r$$

où  $r = (\inf(p - k, p - \alpha_2 k - \alpha_3)) \frac{q}{k} - (\alpha_1 q + \alpha_3 (1 - \frac{q}{k}))$ .

En appliquant (2.3) à  $\varphi = f^\alpha$ , il existe une constante  $C_3 > 0$  telle que :

$$\|\varphi^{(q)}(x)\| \leq C_3 (f(x))^{\alpha - \frac{q}{k}} \cdot M_p^{\frac{q}{k}} d(x, V_0(f))^s ;$$

où  $s = (\inf(p - k, p - \alpha_2 k - \alpha_3) - (\alpha_1 k + \alpha_3 (k - 1))) \frac{q}{k}$

Si l'on prend  $s \geq 0$  et  $\alpha - \frac{q}{k} \geq 0$ ,

$\alpha \geq \frac{q}{k}$ ,  $p - k \geq \alpha_1 k + \alpha_3 (k - 1)$  et

$$p - \alpha_2 k - \alpha_3 \geq \alpha_1 k + \alpha_3 (k - 1),$$

ou encore

$$q \leq [k\alpha] \text{ et } k \leq \left[ \inf \left( \frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \frac{p + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3 + 1} \right) \right] =$$

$$= \left[ \frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right],$$

( $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ ),

$\varphi^q(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

Il suffit alors d'appliquer le lemme d'Hestenes (cf. [5], p. 80), pour déduire le résultat.

**COROLLAIRE 2.4.** — Soit  $f$  une application de classe  $C^\infty$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^+$ ,  $p$ -plate sur l'ensemble non vide de ses zéros  $V_0(f)$ , vérifiant une condition de Łojasiewicz faible  $\mathfrak{L}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ; alors, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f^\alpha$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

**COROLLAIRE 2.5.** — Soit  $f$  une application de classe  $C^p$  (resp.  $C^\infty$ ) d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^+$ ,  $p$ -plate (resp. plate) sur l'ensemble non vide de ses zéros, au voisinage desquels elle est monotone; alors, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f^\alpha$  est de classe  $C^{\lfloor p\alpha \rfloor}$  (resp.  $C^\infty$ ).

*Preuve.* — Il suffit de prendre  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$   $\alpha_2 = 1$ .

**COROLLAIRE 2.6.** — Soit  $f$  une application de classe  $C^p$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^+$   $p$ -plate sur l'ensemble non vide de ses zéros  $V_0(f)$ . On suppose qu'il existe deux constantes  $A > 0, B > 0$  telles que pour tout  $x \in \Omega \setminus V_0(f)$  et tout  $x' \in B(x, \rho_x)$ , où

$$\rho_x \geq A d(x, V_0(f)), f(x) \geq B f(x').$$

Alors, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f^\alpha$  est de classe  $C^{\lfloor p\alpha \rfloor}$ .

**PROPOSITION 2.7.** — Pour tout entier  $p$ , tout fermé  $X$  de  $\mathbf{R}^n$  et tout ouvert  $\Omega$  le contenant, il existe une application positive  $f$  de classe  $C^p$  sur  $\Omega$ , vérifiant une condition de Łojasiewicz faible  $\mathfrak{L}(0, 1, 0)$  et telle que  $V_0(f) = V_p(f) = X$ .

Nous aurons besoin du lemme suivant :

**LEMME 2.8.** — Pour tout compact  $X$  de  $\mathbf{R}^n$ , tout ouvert  $\Omega$  contenant  $X$  et tout voisinage  $V$  de  $X$  inclu dans  $\Omega$ , il existe une application

de classe  $C^p$   $f$ , strictement positive sur  $V - X$ , égale à 1 sur  $\Omega - V$  telle que :

$$0 \leq f \leq 1, V_0(f) = V_p(f) = X,$$

$f$  vérifie une condition  $\mathfrak{L}(0, 1, 0)$ .

*Preuve.* — Soit  $U_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; d(x, X) < \frac{1}{2^q} \right\}$ . On peut se ramener au cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n, V \supset U_0$ . Soit  $f_q$  une application de classe  $C^\infty$  égale à 1 sur  $\mathbb{R}^n - U_q$ , nulle sur  $\bar{U}_{q+2}$ , telle que

$$0 \leq f_q \leq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 0, \|f_q^{(k)}\| \leq C_k 2^{qk}$$

où  $C_k$  est une constante indépendante de  $q$ . Il suffit de prendre :

$$f = \frac{1}{a} \sum_{q > 0} \frac{f_q}{2^{q(p+1)}} \quad \text{où} \quad a = \sum_{q \leq 0} \frac{1}{2^{q(p+1)}}.$$

On remarque de plus qu'il existe deux constantes  $A > 0, B > 0$ , indépendantes de  $X$ , telles que  $f(x) \geq A \sup f(x')$  où

$$d(x', x) \leq B d(x, X).$$

*Preuve de 2.7.* — Soit  $\varphi_j$  une partition de l'unité  $C^\infty$  de  $\Omega$  subordonnée à un recouvrement localement fini de  $\Omega$  par des ouverts relativement compacts  $V_j$  tel que tout  $x$  possède un voisinage rencontrant au plus  $n + 1$   $V_j$ . Soit  $X_j = X \cap \text{supp } \varphi_j$ . D'après 2.8, il existe  $f_j$  de classe  $C^p$ , strictement positive sur  $V_j - X_j$  égale à 1 sur  $\Omega \setminus V_j$ , telle que  $0 \leq f_j \leq 1, V_0(f_j) = V_p(f_j) = X_j$  et  $f_j$  vérifie une condition  $\mathfrak{L}(0, 1, 0) : f_j(x) \geq A \sup f_j(y)$  où  $d(x, y) \leq B d(x, X_j)$   $A$  et  $B$  étant deux constantes  $> 0$ , indépendantes de  $j$ .

Il suffit alors de prendre  $f = \prod_{j \geq 0} f_j$ .

*Exemple 2.9.* — Soit  $\varphi$  l'application de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  définie par :  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$  pour  $|x| < 1$  et 0 pour  $|x| \geq 1$ . Posons  $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi(2n(n+1)x - (2n+1))$  nulle

en dehors de  $I_n = \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$  ( $n \geq 1$ ) et de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}$ . Posons

$\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \varphi_n(x)$ , définie, positive sur  $\mathbb{R}$ , plate en les points  $\frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ .

Sur  $I_n$ ,  $\psi^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n} (2n(n+1))^k \varphi^{(k)}(2n(n+1)x - (2n+1))$  et donc  $\psi^{(k)}(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0. Ainsi,  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , plate en ses zéros et vérifie une condition de Łojasiewicz faible  $\mathcal{L}(0, 1, 0)$  tout en n'étant pas monotone à l'origine.

### 3. Racines d'une fonction $C^\infty$ plate en aucun point.

Soit  $f$  une application de classe  $C^\infty$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , plate en aucun point et vérifiant une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble non vide  $V_0$  de ses zéros : Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe deux constantes  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\forall x \in K : |f(x)| \geq C d(x, V_0)^\alpha.$$

On suppose que  $f$  possède en tout point  $x \in V_0$  une racine  $p^{\text{ième}}$  formelle c'est-à-dire un jet  $\varphi(x) = (\varphi_k(x))_{|k| \geq 0}$  tel que :

$$\left[ \sum_{|k| \geq 0} \varphi_k(x) \frac{X^k}{k!} \right]^p = \sum_{|k| \geq 0} D^k f(x) \frac{X^k}{k!}.$$

Les fermés emboîtés  $V_k = \{x \in \Omega \mid f \text{ et ses } k \text{ premières dérivées s'annulent en } x\}$ , vérifient alors :  $\forall x \geq 1, V_{(r-1)p} = V_{rp-1}$  et  $V_\infty = \emptyset$ . Soit  $W_r = V_{(r-1)p} - V_{rp}$ .

On suppose en outre que pour tout entier  $r \geq 1$ , il existe des constantes  $\alpha_r > 0$ ,  $C_r > 0$ , telles que

$$\forall x \in W_r, \|f^{(rp)}(x)\| \geq C_r d(x, V_{rp})^{\alpha_r}.$$

(On convient que  $d(x, \emptyset) = 0$ ).

**THEOREME.** — Avec les hypothèses précédentes,  $f$  possède au voisinage de tout point de  $\Omega$  une racine  $p^{\text{ième}}$  de classe  $C^\infty$ .

*Preuve.* — Nous renvoyons le lecteur à [6].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. GLAESER, Racine carrée d'une fonction différentiable, *Ann. Inst. Fourier*, XIII, 2 (1963).
- [2] J. DIEUDONNE, Sur un théorème de Glaeser, *Journal d'analyse Mathématique*, XXIII, (1970).
- [3] L. HORMANDER, On the division of distributions by polynomials, *Ark. Mat. Stockholm*, (1958).
- [4] H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Act. Sci. et ind.*, n° 867, (1940).
- [5] J. Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, *Erg der Math.*, band 71 – Springer Verlag (1972).
- [6] P. LENGYEL, Racines de fonctions différentiables, *Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes*, fascicule 1 : Séminaires d'Analyse (Année 1973).

Manuscrit reçu le 19 août 1974  
accepté par B. Malgrange.

Pierre LENGYEL,  
Université de Rennes  
Département de Mathématiques et Informatique  
Avenue du Général Leclerc  
B.P. 25 A  
35031 - Rennes Cedex.