Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 297-310

SUR LES G-STRUCTURES K-PLATES

par Madeleine BAUER

Introduction.

Dans son article : "The integrability problem for G-structures" [3], V. Guillemin établit qu'une G-structure ($E \to M$) k-plate [1-5] est $(k+1)$-plate si et seulement si un certain tenseur C^k (k^e tenseur de structure) défini sur un prolongement E^k de E[1-5] est nul (Théorème fondamental).

Pour ce faire, V. Guillemin suppose implicitement que l'espace E^k des $(k+1)$-repères E-k-plats de M est un sous-espace fibré principal $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace $H^{k+1}(M)$ des $(k+1)$-repères de M.

Nous donnons ici, par des méthodes qui généralisent celles de D. Bernard [2], une démonstration du théorème fondamental utilisant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $(k+2)$-repère E-k-plat soit E-$(k+1)$-plat. Une conséquence de cette démonstration est que l'hypothèse implicite de V. Guillemin mentionnée ci-dessus est effectivement vérifiée (corollaire 3.3).

Notations.

On se place dans la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$ dont les morphismes sont les applications $\mathcal{C}^\infty$.

$T_x U$: espace tangent au point x à la variété U.

$T_x f$: application tangente à l'application f au point x.

$(D^r f)_x$: dérivée r^e de f au point x si f est une application $\mathcal{C}^\infty$ d'un espace vectoriel dans un autre.

Si $\mathfrak{G}$ est un groupe de Lie, on notera $\underline{\mathfrak{G}}$ son algèbre de Lie et on identifiera $\underline{\mathfrak{G}}$ et l'espace tangent à l'élément neutre de $\mathfrak{G}$.

Si U et V sont des variétés, on notera $J^k(U, V)$ la variété des k-jets de U dans V, et si $X = j_x^k f \in J^k(U, V)$, on notera par $\beta(X) = f(x)$ le but de X et par $\Pi_p^k(X) = j_x^p f$ la projection de X dans $J^p(U, V)$ $(p \leqslant k)$.

Si E est un espace fibré $\mathcal{C}^\infty$ de base M, on notera $\mathcal{J}^k(E)$ la variété des k-jets de sections de E.

$$e_k = j_0^{k+1}\, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}.$$

1. Préliminaires.

1. Si U, V, W sont des variétés et f un morphisme de V dans W alors l'application $\overline{f}$ de $J^k(U, V)$ dans $J^k(U, W)$ définie par :

$$\overline{f}\,(j_x^k g) = j_x^k(f \circ g) \tag{1}$$

est un morphisme.

Si M est une variété de dimension n, l'espace $H^k(M)$ des k-repères de M est la sous-variété de $J^k(\mathbf{R}^n, M)$ formée des k-jets inversibles de source 0. Pour l'application but β, $H^k(M)$ est un espace fibré principal de groupe structural L_n^k, ensemble des k-jets inversibles de source et but 0.

Si G est un sous-groupe de Lie de L_n^1, une G-structure sur M est un sous-espace fibré principal de $H^1(M)$ de groupe structural G. On supposera toujours G fermé dans L_n^1.

2. Soit $(E_i \to M_i)$ une G-structure $(i = 1, 2)$ et f un difféomorphisme local de M_1 dans M_2 : $\widetilde{f} = \overline{f}_{|H^1(M_1)}$ est un difféomorphisme local de $H^1(M_1)$ dans $H^1(M_2)$. On dit *que* f (ou $j_x^{k+1}f$) *préserve le couple de G-structures* (E_1, E_2) *à l'ordre* k *en* $x \in M_1$ si :

1/ $\widetilde{f}(E_{1_x}) = E_{2_{f(x)}}$ $\quad [E_{i_y}$: fibre de E_i en $y]$

2/ quelque soit $p \in E_{1_x}$, $\widetilde{f}(E_1)$ et E_2 ont un contact d'ordre k en $\widetilde{f}(p)$ (en tant que sous-variétés de $H^1(M_2)$).

3. *Définition de* G^k.

Soit E_0 la G-structure plate canonique sur $\mathbf{R}^n$ et G^k le sous-groupe de L_n^{k+1} composé des repères k-plats (c.à.d. préservant le couple de G-structures (E_0, E_0) à l'ordre k en 0) de but 0.

LEMME 1.3. – *Pour qu'un difféomorphisme local f de $\mathbf{R}^n$ préserve le couple de G-structures (E_0, E_0) à l'ordre k en x il faut et il suffit que $j_x^k D^1 f$ appartienne à $J^k(\mathbf{R}^n, G)$.*

L'application $i_{k+1,k}$ de L_n^{k+1} dans $J_0^k(\mathbf{R}^n, L_n^1)$, qui à $j_0^{k+1} f$ fait correspondre $j_0^k\, D^1 f$, est un plongement. Mais le lemme précédent implique que : $G^k = (i_{k+1,k})^{-1}\, [J_0^k(\mathbf{R}^n, G)]$. Or, G étant fermé dans L_n^1, $J_0^k(\mathbf{R}^n, G)$ est fermé dans $J_0^k(\mathbf{R}^n, L_n^1)$, ce qui entraîne que G^k est un sous-groupe fermé de L_n^{k+1} et que, par conséquent, c'est un sous-groupe de Lie.

L'ensemble E_0^k des $(k+1)$-repères k-plats de $\mathbf{R}^n$ est un G^k- sous-espace fibré principal trivial de $H^{k+1}(\mathbf{R}^n)$.

4. *Propriétés de* G^k.

L'application tangente $T_{e_k}\, i_{k+1,k}$ identifie l'algèbre de Lie $\underline{G}^k$ de G^k à l'espace vectoriel $\overset{k}{\underset{r=0}{\oplus}}\ \underline{G}^{(r)}$ avec :

$$\underline{G}^{(r)} = [\underline{G} \otimes S^r(\mathbf{R}^{n*})] \cap [\mathbf{R}^n \otimes S^{r+1}(\mathbf{R}^{n*})] \tag{2}$$

Une représentation linéaire ρ^k de G^k sur $T_{e_{k-1}}\, E_0^{k-1} = \mathbf{R}^n \overset{k}{\underset{r=0}{\oplus}} \underline{G}^{(r)}$ est définie par :

$$\rho^k(Y) = T_{e_{k-1}}(\bar{g}^{-1} \circ R_{Y'}) \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} Y = j_0^{k+1} g \in G^k \text{ , } Y' = j_0^k g \in G^{k-1} \\ \\ R_{Y'} \text{ translation à droite par } Y' \text{ opérant} \\ \text{sur } E_0^{k-1}. \end{array} \right. \tag{3}$$

De plus si $Y' = e_{k-1}$, on a pour (u, U) appartenant à

$$T_0(\mathbf{R}^n) \times T_{e_{k-1}}\, G^{k-1} :$$

$$T_{e_{k-1}} \bar{g}^{-1} (u , U) = \rho^k(Y) (u , U) = (u , U + [D^1(D^k g^{-1})]_0 u) \quad (4)$$

5. G-*structure k-plate.*

Une G-structure $E \to M$ est dite k-plate en $x \in M$, s'il existe en ce point un $(k + 1)$-repère E-k-plat, c.à.d. un $(k + 1)$-repère en x préservant le couple de G-structures (E_0 , E) à l'ordre k en 0. Une G-structure k-plate en tout point de M est dite simplement k-plate.

On considérera désormais une G-structure k-plate E et on désignera par E^k l'ensemble des $(k + 1)$-repères E-k-plats de M.

Il est évident que, du point de vue ensembliste, E^k *est un* G^k-*sous-espace fibré principal de* $H^{k+1}(M)$. *On supposera de plus, jusqu'au paragraphe 3, que :*

"E^k *est un* G^k-*sous-espace fibré principal* C^∞ *de* $H^{k+1}(M)$."

Cette hypothèse deviendra un théorème grâce au corollaire 3.3.

2. Tenseur de structure.

1. *1-forme fondametale* Γ^k *sur* E^k.

PROPOSITION 2.1. – *Soit* $X = j_0^{k+1} f$ *un* $(k + 1)$-*repère de* M *dont l'image* $X' = j_0^k f$ *dans* $H^k(M)$ *est dans* E^{k-1}. *Pour que* X *soit* E-k-*plat il faut et il suffit que l'application* : $T_{X'} \bar{f}^{-1} : T_{X'} E^{k-1} \to T_{e_{k-1}} H^k(\mathbf{R}^n)$ *prenne ses valeurs dans* $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1}$.

Il résulte de cette proposition que la 1-forme Γ^k sur E^k définie par :

$$\Gamma_X^k = T_X(\bar{f}^{-1} \circ \Pi_k^{k+1}) \quad (\Pi_k^{k+1} : E^k \to E^{k-1}) \quad (5)$$

prend ses valeurs dans $T_{e_{k-1}} E_0^{k-1} = \mathbf{R}^n \overset{k}{\underset{r=0}{\oplus}} \underline{G}^{(r)}$. On écrira :

$$\Gamma^k = \omega + \Omega^0 + \ldots + \Omega^{k-1},$$

Ω^i étant la composante de Γ^k à valeurs dans $\underline{G}^{(i)}$. De plus la translalation à droite sur E^k par $Y \in G^k$ transforme Γ^k de la façon suivante $R_Y^* \Gamma^k = \rho^k(Y)\, \Gamma^k$.

2. *Isomorphisme canonique entre* $\mathcal{J}^k_{\beta(X)}(T(\mathbf{R}^n))$ *et* $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$.

Soit ξ un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$; il se relève en un champ de vecteurs ξ^k sur $H^k(\mathbf{R}^n)$ défini par : $\xi^k_X = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} [\overline{\exp t\, \xi}(X)]$. ξ^k_X ne dépend que de $j^k_{\beta(X)}\, \xi$ et l'on notera $\alpha_{k,X}$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{J}^k_{\beta(X)}(T(\mathbf{R}^n))$ sur $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$ qui envoie $j^k_{\beta(X)}\xi$ sur ξ^k_X.

A partir du crochet, $[\,,]$, des champs de vecteurs dans $\mathbf{R}^n$, on obtient le crochet naturel, $[\![\,,]\!]$, de $\mathcal{J}^k_{\beta(X)}(T(\mathbf{R}^n))$ à valeurs dans $\mathcal{J}^{k-1}_{\beta(X)}(T(\mathbf{R}^n))$ défini par : $[\![j^k_{\beta(X)}\xi, j^k_{\beta(X)}\zeta]\!] = j^{k-1}_{\beta(X)}[\xi\,,\zeta]$. $\alpha_{k,X}$ permet de transporter ce crochet en un crochet, encore noté $[\![\,,]\!]$ de $T_X H^k(\mathbf{R}^n)$ à valeurs dans $T_{X'} H^{k-1}(\mathbf{R}^n)$ qui vérifie de plus

$$[\![\xi^k_X\,,\zeta^k_X]\!] = T\,\Pi^k_{k-1}\,[\xi^k\,,\zeta^k]_X = [\xi^{k-1}\,,\zeta^{k-1}]_{X'} \quad [X' = \Pi^k_{k-1}(X)].$$

3. *Formule de Maurer-Cartan.*

La 1-forme fondamentale Γ^k_0 de $H^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ prend ses valeurs dans $T_{e_{k-1}} H^k(\mathbf{R}^n)$ qui est muni de la structure d'"algèbre de Lie tronquée" définie par le crochet $[\![\,,]\!]$. L'expression $[\![\Gamma^k_0\,,\Gamma^k_0]\!]$ a donc un sens et on a :

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma^k_0\,,\Gamma^k_0]\!]\,(\xi^{k+1}_X\,,\zeta^{k+1}_X) &= 2\,[\![\Gamma^k_0(\xi^{k+1}_X)\,,\Gamma^k_0(\zeta^{k+1}_X)]\!] \\
&= 2\,[\![(Tf^{-1}\xi)^k_{e_{k-1}}\,,(Tf^{-1}\zeta)^k_{e_{k-1}}]\!] \quad \text{si } X = j^{k+1}_0 f \\
&= 2(Tf^{-1}[\xi\,,\zeta])^{k-1}_{e_{k-2}} \\
&= 2\,T_{e_{k-1}}\,\Pi^k_{k-1}\circ\Gamma^k_0\,[\xi^{k+1}\,,\zeta^{k+1}]_X \\
&= 2\,T_{e_{k-1}}\,\Pi^k_{k-1}\circ d\Gamma^k_0\,(\xi^{k+1}_X\,,\zeta^{k+1}_X)
\end{aligned}$$

car l'invariance de Γ^k_0 par le prolongement des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n (\bar{g}^*\Gamma^k_0 = \Gamma^k_0)$ implique : $\mathcal{L}_{\xi^{k+1}}\,\Gamma^k_0 = 0$.

On a ainsi obtenu la "formule de Maurer-Cartan" :

$$T_{e_{k-1}}\,\Pi^k_{k-1}\circ d\Gamma^k_0 = \frac{1}{2}\,[\![\Gamma^k_0\,,\Gamma^k_0]\!]. \tag{6}$$

4. *Cohomologie de Spencer.*

Le crochet $[\![\,,]\!]$ de $\mathcal{J}_0^k(T(\mathbf{R}^n))$ induit un crochet, encore noté $[\![\,,]\!]$ sur $\overset{k}{\underset{r=0}{\oplus}} \mathbf{R}^n \otimes S^r(\mathbf{R}^{n*})$. Ce crochet, restreint à

$$[\mathbf{R}^n \otimes S^p(\mathbf{R}^{n*})] \times [\mathbf{R}^n \otimes S^q(\mathbf{R}^{n*})]$$

est l'application nulle si $p + q - 1$ est supérieur à k ; si $p + q - 1$ est inférieur ou égal à k c'est l'application bilinéaire :

$$[\![v_1 \otimes s_1 , v_2 \otimes s_2]\!] = v_2 \otimes (D_{v_1} s_2) \odot s_1 - v_1 \otimes (D_{v_2} s_1) \odot s_2 \quad (7)$$

à valeurs dans $\mathbf{R}^n \otimes S^{p+q-1}(\mathbf{R}^{n*})$.

On vérifie l'inclusion : $[\![\underline{G}^{(p)} , \underline{G}^{(q)}]\!] \subset \underline{G}^{(p+q)}$ et on montre que :

$$C^*(\underline{G}) = \underset{(p,q)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}{\oplus} C^{p,q}(\underline{G}) = \underset{(p,q)\in \mathbf{N}\times\mathbf{N}}{\oplus} \underline{G}^{(p-1)} \otimes \overset{q}{\wedge} \mathbf{R}^{n*}$$

est un complexe si on le munit de l'opérateur linéaire δ de bidegré $(-1, +1)$ défini par :

$$(\delta\, \xi)\, (u_1 \ldots u_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i-1}\ [\![u_i , \xi(u_1, \ldots , \hat{u}_i, \ldots u_{q+1})]\!] \quad (8)$$

$$\text{si} \quad \xi \in C^{p,q}(\underline{G}).$$

La cohomologie, $H^{p,q}(\underline{G})$, de ce complexe en $C^{p,q}(\underline{G})$, est un des espaces de cohomologie de Spencer de G.

5. *Tenseur de structure*

Quelque soit $X \in E^k$ il existe au moins un sous-espace horizontal H_X de $T_X E^k$ sur lequel les Ω^i s'annulent $(i = 0, \ldots, k-1)$ car cette condition équivaut à

$$T_X \Pi_k^{k+1} H_X = T_{e_{k-1}} \overline{f}\ [T_0(\mathbf{R}^n) \times \{e_{k-1}\}] \quad \text{si} \quad X = j_0^{k+1} f$$

Si on note encore H la projection de $T_X E^k$ sur H_X parallèlement à $V_X = T_X E^k_{\beta(X)} = \operatorname{Ker} T_x\beta$ et si U et V sont des vecteurs de $T_X E^k$ *on pose :*

$$C^k_{H_X}(u, v) = d\Gamma^k \circ H \wedge H\,(U, V) \quad \text{si} \quad \omega(U) = u\,,\ \omega(V) = v. \quad (9)$$

A l'aide d'une carte locale de M et de (6), on voit que Γ^k vérifie aussi la formule de Maurer-Cartan :

$$T_{e_k} \Pi^k_{k-1} \circ d\Gamma^k = \frac{1}{2} [\![\Gamma^k , \Gamma^k]\!]. \tag{10}$$

En prenant les composantes homogènes de cette égalité (10) à valeurs dans $\underline{G}^{(i)}$ on obtient :

$$d\Omega^i = \frac{1}{2} \{[\![\omega , \Omega^{i+1}]\!] + [\![\Omega^0 , \Omega^i]\!] + \ldots + [\![\Omega^i , \Omega^0]\!] + [\![\Omega^{i+1} , \omega]\!]\} \tag{11}$$

$$(-1 \leqslant i \leqslant k-2) \begin{pmatrix} \omega = \Omega^{-1} \\ \underline{G}^{(-1)} = \mathbf{R}^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $d\Omega^i \circ H \wedge H$ est nulle pour $-1 \leqslant i \leqslant k-2$, ce qui entraîne :

$$C^k_{H_X}(u , v) = d\Omega^{k-1} \circ H \wedge H(U , V) \quad \text{si} \quad \omega(U) = u , \omega(V) = v \tag{12}$$

de sorte que $C^k_{H_X}$ est un élément de $\underline{G}^{(k-1)} \otimes \overset{2}{\wedge} \mathbf{R}^{n*} = C^{k,2}(\underline{G})$.

On vérifie que $C^k_{H_X}$ est un cocycle et que sa classe de cohomologie $C^k(X)$ dans $H^{k,2}(\underline{G})$ est indépendante du sous-espace horizontal choisi.

Γ^k_X étant une application linéaire surjective de $T_X E^k$ sur $T_{e_{k-1}} E^{k-1}_0$, $(\Omega^0 + \ldots + \Omega^{k-1})_X$ est aussi une application linéaire surjective de $T_X E^k$ sur $\underline{G}^{k-1}$. Les équations de Pfaff $\Omega^i = 0$ $(i = 0 , \ldots , k-1)$ constituent donc un système différentiel de rang constant sur E^k transverse aux fibres. Par conséquent, il existe (localement) un champ $\mathcal{C}^\infty$ de plans horizontaux $\mathcal{H}$ sur lequel les Ω^i $(i = 0 , \ldots , k-1)$ s'annulent. $C^k_{\mathcal{H}} : X \to C^k_{\mathcal{H}_X}$ étant alors un morphisme (local) de E^k dans $C^{k,2}(\underline{G})$, $C^k : X \to C^k(X)$ *est un morphisme de* E^k *dans* $H^{k,2}(\underline{G})$ *dit* k^e *tenseur de structure de* E.

C^k est en fait un tenseur de type $\mathcal{S}^k$ sur E^k . $\mathcal{S}^k(Y)$ ne dépendant que de $\Pi^{k+1}_1(Y)$, C^k passe au quotient et définit un tenseur C^k_0 sur E par :

$$C^k(X) = C^k_0(\Pi^{k+1}_1(X)). \tag{13}$$

C'est ce tenseur C_0^k que Guillemin appelle k^e tenseur de structure de E ; mais nous n'utiliserons que C^k et, par ailleurs, la donnée de C^k est équivalente à celle de C_0^k.

3. Théorème fondamental.

1. *Enoncé.*

THEOREME 3.1. – *Si* E *est une* G*-structure* k*-plate et si* E^k *est un* G^k*-sous-espace fibré principal* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $H^{k+1}(M)$ *alors* :

i) $C^k = 0$ *implique que* E *est* $(k+1)$*-plate et que* E^{k+1} *est un* G^{k+1}*-sous-espace fibré principal de* $H^{k+2}(M)$.

ii) *s'il existe un* $(k+2)$*-repère* E-$(k+1)$*-plat se projetant sur* $X \in E^k$, *alors* $C^k(X) = 0$.

La deuxième partie du théorème s'établit facilement à l'aide de la formule de Maurer-Cartan [(11) pour $i = k-1$] dans $H^{k+2}(M)$.

2. *Démonstration de i)*

a) *Définition de* $\widetilde{\Omega}^k$

Soit $\mathcal{H}$ un champ (local) sur E^k de plans horizontaux sur lequel les Ω^i $(i = 0, \ldots, k-1)$ s'annulent. On a :

$$d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = C^k_{\mathcal{H}} \overset{2}{\wedge} \omega ,$$

$C^k_{\mathcal{H}}$ étant une fonction (locale) $\mathcal{C}^\infty$ sur E^k à valeurs dans $\underline{G}^{(k-1)} \otimes {}^2\mathbf{R}^{n*}$. Comme $C^k = 0$, $C^k_{\mathcal{H}}$ prend en fait ses valeurs dans $\delta(\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})$. δ étant une application linéaire, il existe une application linéaire r de $\delta(\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})$ dans $\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*}$ vérifiant $\delta \circ r = \mathrm{id}_\delta\, (\underline{G}^{(k)} \otimes \mathbf{R}^{n*})$. Soit $t_{\mathcal{H}}$ la fonction (locale) C^∞ sur E^k définie par : $t_{\mathcal{H}} = r \circ C^k_{\mathcal{H}}$. On a alors :

$$d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = (\delta t \;\;) \overset{2}{\wedge} \omega .$$

Soit $\widetilde{\Omega}^k$ la 1-forme (locale) sur E^k à valeurs dans $\underline{G}^{(k)}$ définie par :

1) $\widetilde{\Omega}^k_X(U) = t_{\mathcal{H}}(X)\, \omega_X(U)$ si $U \in \mathcal{H}_X$,

2) $\widetilde{\Omega}^k_X(\widetilde{\xi}_X) = P_{\underline{G}^{(k)}}\xi$ si $\widetilde{\xi}$ est le champ de vecteurs verticaux induit par $\xi \in \underline{G}^k$ et $P_{\underline{G}^{(k)}}$ la projection de $\underline{G}^k$ sur $\underline{G}^{(k)}$. Mais alors on a :

$$[\![\omega , \widetilde{\Omega}^k]\!] \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = [\![\omega \circ \mathcal{H} , \widetilde{\Omega}^k \circ \mathcal{H}]\!] = [\![\omega , t_{\mathcal{H}} \omega]\!] =$$
$$(\delta t_{\mathcal{H}}) \overset{2}{\wedge} \omega = d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H}$$

c'est-à-dire :

$$[\![\omega , \widetilde{\Omega}^k]\!] \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H} = d\Omega^{k-1} \circ \mathcal{H} \wedge \mathcal{H}. \tag{14}$$

D'autre part, pour $\xi \in \underline{G}^k$, on a si $X = j_0^{k+1} f$, $X' = j_0^k f$:

$$(\Gamma^k + \widetilde{\Omega}^k)_X(\widetilde{\xi}) = \Gamma^k_X(\widetilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}}\xi = T_{X'} \overline{f}^{-1} \circ T_X \Pi^{k+1}_k(\widetilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}}\xi$$

$$= T_{X'}\, \gamma^{-1}_{X'} \circ T\Pi^{k+1}_k(\widetilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}}\xi$$

γ_X étant le difféomorphisme canonique de G^k sur $E^k_{\beta(X)}$ qui transforme e_k en X.

$$= T_{e_k}\Pi^{k+1}_k \circ T_X \gamma^{-1}_X(\widetilde{\xi}) + P_{\underline{G}^{(k)}}\xi$$

$$= P_{\underline{G}^{k-1}}\xi + p_{\underline{G}^{(k)}}\xi = \xi$$

c'est-à-dire :

$$(\Gamma^k + \widetilde{\Omega}^k)\,(\widetilde{\xi}) = \xi. \tag{15}$$

b) *Morphismes (locaux) de* E^k *dans* E^{k+1}.

On va construire des morphismes locaux s_α *de* E^k *dans* $H^{k+2}(M)$ *vérifiant* :

1/ $\Pi^{k+2}_{k+1} \circ s_\alpha = \mathrm{id}_{E^k}$.

2/ $s^*_\alpha \Gamma^{k+1} = \Gamma^k + \widetilde{\Omega}^k$ (1-*forme à valeurs dans* $T_{e_k}E^k_0$)

Ceci entraînera que s_α *sera un morphisme de* E^k *dans* E^{k+1} *d'après la proposition 2-1 car* $(s^*_\alpha\Gamma^{k+1}) = T_X\overline{F}^{-1}$ (*si* $s_\alpha(X) = j_0^{k+2}F$) *sera une application de* $T_X E^k$ *dans* $T_{e_k}E^k_0$.

Si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de M associé à un atlas de M il détermine un recouvrement ouvert $\{H^{k+1}(U_\alpha)\}$ de $H^{k+1}(M)$

muni de sections locales σ_α de Π^{k+2}_{k+1}. On en déduit, par restriction, un recouvrement ouvert de E^k muni de morphismes locaux, encore notés σ_α, de E^k dans $H^{k+2}(M)$ vérifiant $\Pi^{k+2}_{k+1} \circ \sigma_\alpha = \mathrm{id}_{E^k|_{U_\alpha}}$. Désormais on se restreindra à des ouverts de $E^k{}_{|U_\alpha}$ dans lesquels il existe un champ de plans horizontaux $\mathcal{H}_\alpha$ sur lequel les Ω^i $(i = 0, \ldots, k-1)$ s'annulent.

D'autre part, comme on aura besoin de les distinguer, on notera Ω^i_k (resp. Ω^i_{k+1}) la 1-forme Ω^i de E^k (resp. de $H^{k+2}(M)$).

Si $X = j_0^{k+2} f \in H^{k+2}(M)$ on a :

$$\mathrm{T}\Pi^{k+1}_k \circ \Gamma^{k+1}_{j_0^{k+2} f} = \mathrm{T}\Pi^{k+1}_k \circ \mathrm{T}\bar{f}^{-1} \circ \mathrm{T}_{j_0^{k+2} f}\, \Pi^{k+2}_{k+1} =$$

$$= \mathrm{T}\bar{f}^{-1} \circ \mathrm{T}\Pi^{k+1}_k \circ \mathrm{T}_{j_0^{k+2} f}\, \Pi^{k+2}_{k+1} = \Gamma^k \circ \mathrm{T}_{j_0^{k+2} f}\, \Pi^{k+2}_{k+1}$$

Γ^{k+1} (resp. Γ^k) étant la 1-forme fondamentale de $H^{k+2}(M)$ (resp. $H^{k+1}(M)$). Ceci entraîne :

$$\mathrm{T}\Pi^{k+1}_k \circ (\sigma_\alpha^* \Gamma^{k+1}) = \Gamma^k, \tag{16}$$

Γ^k étant cette fois la 1-forme fondamentale de E^k, et par suite :

$$\sigma_\alpha^* \Omega^i_{k+1} = \Omega^i_k \qquad (-1 \leqslant i \leqslant k-1). \tag{17}$$

Comme Ω^{k-1}_{k+1} vérifie la formule de Maurer-Cartan [(11) pour $i = k-1$] on a :

$$\sigma_\alpha^* d\Omega^{k-1}_{k+1} = \frac{1}{2}\, \sigma_\alpha^* \{[\![\omega_{k+1}, \Omega^k_{k+1}]\!] + [\![\Omega^0_{k+1}, \Omega^{k-1}_{k+1}]\!]$$

$$+ \ldots + [\![\Omega^{k-1}_{k+1}, \Omega^0_{k+1}]\!] + [\![\Omega^k_{k+1}, \omega_{k+1}]\!]\}$$

soit encore d'après (17) :

$$d\Omega^{k-1}_k = \frac{1}{2}\, \{[\![\omega_k, \sigma_\alpha^* \Omega^k_{k+1}]\!] + [\![\Omega^0_k, \Omega^{k-1}_k]\!]$$

$$+ \ldots + [\![\Omega^{k-1}_k, \Omega^0_k]\!] + [\![\sigma_\alpha^* \Omega^k_{k+1}, \omega_k]\!]\}$$

Ce qui entraîne l'égalité suivante :

$$d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\![\omega_k , \sigma_\alpha^* \Omega_{k+1}^k]\!] \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = \tag{18}$$
$$= [\![\omega_k , \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha \circ \mathcal{H}_\alpha]\!]$$

Soit t_α la fonction (locale) $\mathcal{C}^\infty$ définie dans $E^k{}_{|U_\alpha}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n \otimes S^{k+1}(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \mathbf{R}^{n*}$ définie par :

$$\Omega_{k+1}^k \circ T_X\sigma_\alpha(U) = \widetilde{\Omega}_\alpha^k(U) + t_\alpha(X)\ \omega(U) \quad \text{si} \quad U \in \mathcal{H}_{\alpha_X}, \tag{19}$$

$\widetilde{\Omega}_\alpha^k$ étant la 1-forme définie comme au paragraphe a) à l'aide de $\mathcal{H}_\alpha$.

L'égalité (14) implique :

$$d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\![\omega_k , \widetilde{\Omega}_\alpha^k]\!] \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\![\omega_k , \widetilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha]\!].$$

L'égalité (18) implique :

$$d\Omega_k^{k-1} \circ \mathcal{H}_\alpha \wedge \mathcal{H}_\alpha = [\![\omega^k , \Omega_{k+1}^k \circ T\sigma_\alpha \circ \mathcal{H}_\alpha]\!] = [\![\omega_k , \widetilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha + t_\alpha \omega_k]\!]$$
$$= [\![\omega_k , \widetilde{\Omega}_\alpha^k \circ \mathcal{H}_\alpha]\!] + (\delta t_\alpha) \overset{2}{\wedge} \omega.$$

Une conséquence de ces égalités est :

$$(\delta t_\alpha) \overset{2}{\wedge} \omega = 0,$$

ce qui n'est possible que pour $(\delta t_\alpha) = 0$.

Mais comme la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \to \mathbf{R}^n \otimes S^{k+2}(\mathbf{R}^{n*}) \to \mathbf{R}^n \otimes S^{k+1}(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \mathbf{R}^{n*} \xrightarrow{\delta}$$
$$\mathbf{R}^n \otimes S^k(\mathbf{R}^{n*}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathbf{R}^{n*} \to 0$$

t_α prend en fait ses valeurs dans $\mathbf{R}^n \otimes S^{k+2}(\mathbf{R}^{n*})$.

Soit s_α le morphisme (local) de $E^k{}_{|U_\alpha}$ dans $H^{k+2}(U_\alpha)$ défini par $s_\alpha(X) = j_0^{k+2}F$ avec :

1/ $j_0^{k+1}F = X$ (c'est-à-dire $\Pi_{k+1}^{k+2} \circ s_\alpha = \text{id } E^k{}_{|U_\alpha}$)

2/ $(D^{k+2}F^{-1} \circ f)_0 = -t_\alpha(X)$ si $\sigma_\alpha(X) = j_0^{k+2}f$.

On a alors si ζ appartient à $T_X E^k$

$$(\sigma_\alpha^*\Gamma^{k+1})_X\zeta = T_X\overline{f}^{-1}(\zeta) = (u\,,\,U) \in T_0\mathbf{R}^n \times T_{e_k}L_n^{k+1}$$

et

$$(s_\alpha^*\Gamma^{k+1})_X\zeta = T_X\overline{F}^{-1}(\zeta) = T_{e_k}\overline{F}^{-1}\circ\overline{f}\circ T_X\overline{f}^{-1}(\zeta) =$$

$$= T_{e_k}\overline{F}^{-1}\circ\overline{f}(u\,,\,U)$$

$$= (u\,,\,U + (D^1(D^{k+1}F^{-1}\circ f))_0 u) \quad \text{à cause de (4) avec } g = f^{-1}\circ F.$$

$$= (u\,,\,U - t_\alpha(X)u).$$

Ceci implique qu'on a :

$$s_\alpha^*\Gamma^{k+1} = \sigma_\alpha^*\Gamma^{k+1} - t_\alpha\omega_k = \Gamma^k + \Omega_{k+1}^k\circ T\sigma_\alpha - t_\alpha\omega_k$$

d'après (16).

Soit encore :

$$(s_\alpha^*\Gamma^{k+1})\circ\mathcal{H}_\alpha = (\Gamma^k + \Omega_{k+1}^k\circ T\sigma_\alpha - t_\alpha\omega_k)\circ\mathcal{H}_\alpha = \Gamma^k\circ\mathcal{H}_\alpha + \widetilde{\Omega}_\alpha^k\circ\mathcal{H}_\alpha + t_\alpha\omega_k - t_\alpha\omega_k$$

à cause de la définition de t_α (19), c'est-à-dire :

$$(s_\alpha^*\Gamma^{k+1})\circ\mathcal{H}_\alpha = (\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k)\circ\mathcal{H}_\alpha. \tag{20}$$

Si ξ appartient à $\underline{G}^k$, on a d'après (15) : $(\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k)_X(\widetilde{\xi}) = \xi$. Mais on a aussi :

$$(s_\alpha^*\Gamma^{k+1})_X(\xi) = T_X\overline{F}^{-1}(\widetilde{\xi}) = T_X\gamma_X^{-1}(\widetilde{\xi}) = \widetilde{\xi}.$$

Ceci entraîne l'égalité :

$$(s_\alpha^*\Gamma^{k+1})\ (\widetilde{\xi}) = (\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k)\ (\widetilde{\xi}). \tag{21}$$

Les 1-formes $s_\alpha^*\Gamma^{k+1}$ et $\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k$ sont donc les mêmes sur les vecteurs horizontaux (20) et sur les vecteurs verticaux (21) ; il en résulte qu'elles sont égales. Or $(\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k)_X$ est une application linéaire de T_XE^k dans $T_{e_k}E_0^k$, de sorte que, puisque $s_\alpha(X) = j_0^{k+2}F$, $T_X\overline{F}^{-1} = (s_\alpha^*\Gamma^{k+1})_X = (\Gamma^k + \widetilde{\Omega}_\alpha^k)_X$ est une application linéaire de T_XE^k dans $T_{e_k}E_0^k$. $s_\alpha(X)$ est donc un $(k+2)$-repère E-$(k+1)$-plat d'après la proposition 2-1 ; s_α est par conséquent un morphisme (local) de $E^k{}_{|U_\alpha}$ dans $H^{k+2}(U_\alpha)$ à valeurs dans $E^{k+1}{}_{|U_\alpha}$.

c) *Conclusion*

Puisque E^k est un sous-espace fibré principal $\mathcal{C}^\infty$ de $H^{k+1}(M)$, il existe des sections locales $\mathcal{C}^\infty$ s_α^k de E^k définies sur U_α (quitte à prendre le recouvrement $\{U_\alpha\}$ plus fin). Les fonctions $s_\alpha^{k+1} = s_\alpha \circ s_\alpha^k$ sont alors des sections locales $\mathcal{C}^\infty$ de $H^{k+2}(M)$ à valeurs dans E^{k+1} définies sur un recouvrement ouvert de M subordonné au recouvrement $\{U_\alpha\}$.

E^{k+1} étant déjà un G^{k+1}-sous-fibré principal ensembliste de $H^{k+2}(M)$, E^{k+1} est donc un G^{k+1}-sous-fibré principal $\underline{\mathcal{C}}^\infty$ de $H^{k+2}(M)$ et de plus E est $(k+1)$-plate.

3. *Conséquence*

Supposons que la G-structure E soit k-plate. Alors E est 1-plate ce qui entraîne, d'après la deuxième partie du théorème et le caractère tensoriel de C^0, que C^0 est nul. E^1 est donc un G^1-sous-fibré principal $\mathcal{C}^\infty$ de $H^2(M)$ d'après la première partie du théorème.

De même, pour $i \leqslant k-1$, si l'on fait l'hypothèse de récurrence que E^i est un G^i-sous-fibré principal $\mathcal{C}^\infty$ de $H^{i+1}(M)$, comme E est $(i+1)$-plate, C^i est nul, de sorte que E^{i+1} est un G^{i+1}-sous-espace fibré principal $\mathcal{C}^\infty$ de $H^{i+2}(M)$. Ainsi est établi le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.3. – *Si une* G-*structure* E *est k-plate, alors le fibré* E^k *des* $(k+1)$-*repères* E-*k-plats est un* G^k-*sous-fibré principal* $\mathcal{C}^\infty$ de $H^{k+1}(M)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BAUER, Sur les G-structures k-plates, *Thèse de 3ème cycle, Strasbourg, juin 1972, multigraphiée.*

[2] D. BERNARD, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier* T. 10 (1960), 151-270.

[3] V. GUILLEMIN, The integrability problem for G-structures, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 116 (1965), 544-560.

[4] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Deformation theory of pseudo-group structures, *Mem. Amer. Math. Soc.* n° 64 (1966).

[5] P. VER EECKE, Géometrie différentielle. Fasc. 1 : Calcul des jets, *Inst. de Pesquisas Mat. de Sao Paulo, 1967.*

Manuscrit reçu le 22 janvier 1973
accepté par B. Malgrange.

Madeleine BAUER ,
Institut de recherche mathématique avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex