Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,1 (1974), 293-295

A PROPOS D'UNE QUESTION POSÉE PAR V. KLEE

par J.-C. DUPIN et G. COQUET (1)

1. Introduction

Dans ([2] p. 29), Klee pose la question suivante : Soient E un espace vectoriel topologique métrisable, C un cône convexe complet de E tel que $E = C - C$, et f une forme linéaire sur E positive ou nulle sur C ; f est-elle continue ?

Nous répondons à cette question par la négative en exhibant des contre-exemples reposant sur une construction assez générale.

2. Théorème

Soit E un espace vectoriel topologique (réel) localement convexe séparé de dimension infinie. Supposons qu'il existe dans E un convexe compact K contenant 0 tel que le sous-espace vectoriel F engendré par K soit dense dans E et $\neq$ E. Posons $\mathcal{E} = S[F \cup \{x_0\}]$ (c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup \{x_0\}$) où $x_0 \in E \sim F$ et désignons par C le cône pointé de sommet 0 engendré par $x_0 + K$. Alors :

1/ $C - C = \mathcal{E}$.

2/ C est un cône convexe complet de $\mathcal{E}$.

3/ F est un hyperplan de $\mathcal{E}$ dense dans $\mathcal{E}$ et tel que $C \sim \{0\}$ soit contenu dans le demi-espace "ouvert" de $\mathcal{E}$ délimité par F.

---

(1) Centre Universitaire de Valenciennes, Le Mont Houy, 59 – Valenciennes, France

Démonstration. –

1/ La démonstration est triviale.

2/ K étant compact dans E est compact dans $\mathcal{E}$ car $K \subset \mathcal{E}$.

Ainsi $x_0 + K$ est compact dans $\mathcal{E}$ et l'origine 0 n'appartient pas à $x_0 + K$. On en déduit que C est un cône convexe complet de $\mathcal{E}$ ([1] p. 113, Proposition 6).

3/ Il est clair que F est un hyperplan de $\mathcal{E}$. Puisque F est dense dans E, F est dense dans $\mathcal{E}$.

3. *Exemple 1 :* **Construction d'espaces normés du type de $\mathcal{E}$.**

Soit $\mathcal{G}$ un espace de Banach de dimension infinie contenant un ensemble total dénombrable $(e_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ formé de points de norme 1 et soit $\mathcal{T}_1$ la topologie de $\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{T}_2$ une topologie d'espace normé sur $\mathcal{G}$ strictement moins fine que $\mathcal{T}_1$([1] p. 134, exercice n° 5). L'espace $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_2)$ est non complet, d'après le théorème de Banach.

Soit $E = \hat{\mathcal{G}}$ le complété de $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_2)$. Désignons par K l'adhérence dans $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_1)$ de l'enveloppe convexe des $\frac{e_n}{e}$. L'origine 0 appartient à K et K est compact dans $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_1)$ puisque cet espace est complet. Ainsi K est compact dans $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_2)$ et aussi dans $\hat{\mathcal{G}}$.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$ engendré par K. F est dense dans $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_1)$ car F contient tous les e_n. Ainsi F est dense dans $(\mathcal{G}, \mathcal{T}_2)$ et aussi dans $\hat{\mathcal{G}}$. Il suffit de poser $\mathcal{E} = S[F \cup \{x_0\}]$ où $x_0 \in \hat{\mathcal{G}} \sim F$ (x_0 existe car $F \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{G} \neq \hat{\mathcal{G}}$) et d'appliquer le théorème précédent.

4. *Exemple 2 :*

Soient $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $K = [0,1]^{\mathbf{N}}$. Le sous-espace vectoriel F engendré par K est l'espace des suites bornées, donc est différent de E. Soit $x_0 \in E \sim F$; $\mathcal{E} = S[F \cup \{x_0\}]$ est métrisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1 et 2, Paris, Hermann, 1965.

[2] V. Klee, Separation and support properties of convex sets, A survey, *Mathematical Note* N° 599, Boeing Scientific Research Laboratories, Mai 1969.

Manuscrit reçu le 19 mars 1973
accepté par J. Dieudonné.

J.C. Dupin et G. Coquet,
Centre Universitaire de Valenciennes
Département de Mathématiques
Sciences Exactes et Naturelles
le Mont Houy
59 – Valenciennes