Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23,1 (1973), pp. 197-202

APPROXIMATION PAR DES SÉRIES PONCTUELLEMENT CONVERGENTES

par NGUYEN HUU VINH

Le but de cette note est de démontrer le

THEOREME. – *Soit* $x_0(t)$ *une fonction continue sur* R *telle que* $\operatorname{Sup}_t |x_0(t)| = \|x_0\| = F > 0$ *fini ou infini, et* S *une constante réelle telle que* $S < F$. *Sous ces hypothèses, il existe une suite de fonctions continues* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, *telles que*

1) *Pour toute série ponctuellement convergente* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu(t)$ *de somme continue on a*

$$\operatorname{Sup}_t |x_0(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu(t)| = \|x_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu x_\nu\| \geqslant S.$$

2) *Par contre, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe une série ponctuellement convergente de somme discontinue* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu(t)$ *telle que*

$$\operatorname{Sup}_t |x_0(t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu(t)| = \|x_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu x_\nu\| \leqslant \varepsilon.$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le lemme suivant qu'on utilise pour répondre à d'autres questions concernant l'approximation par des séries ponctuellement convergentes.

LEMME. – *Etant donné deux constantes réelles positives* K *et* C (*avec* $C < 1$), *alors il existe une suite de fonctions* $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ *appartenant à* $c(\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ *et possédant les deux propriétés suivantes :*

1) $\sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu(t) = 0$ *où la série converge ponctuellement.*

2) *Si la série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu(t)$ *est ponctuellement convergente (de somme non nécessaire continue), avec* $1 > \lambda_1 > C > 0$, *et*

$$\operatorname*{Sup}_t |\sum_\nu \lambda_\nu y_\nu(t)| = \|\sum_\nu \lambda_\nu y_\nu\| \leqslant K.$$

alors on a $\operatorname*{Inf}_\nu \{\lambda_\nu\} > 0$.

Preuve. – Construction des fonctions y_ν. Pour fixer les idées, supposons que $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Toutes les fonctions y_ν sont linéaires par morceaux, passent par les 2 points (0,0) et (1,0), et sont définies par induction de façon suivante :

– y_1 passe en plus par les deux points

$$\left(\frac{1}{4}, -P\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

– une fois que les fonctions $y_1, \ldots, y_{h-1}$ sont déjà construites, on définit y_h de telle manière que l'on ait

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_h = s_h$$

où s_h est parfaitement définie par les cinq points

$(0,0)$, $(1 - 2^{1-h}, 0)$, $(1 - 3.2^{-h-1}, -P^h)$, $(1 - 2^{-h}, 0)$ et $(1,0)$

où P est une constante convenablement choisie.

Maintenant supposons que $\lambda_1 > C$. Puisque $y_\nu \left(\frac{1}{4}\right) = 0$ pour $\nu \geqslant 3$ on a

$$\|\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu\| \leqslant K \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu y_\nu \left(\frac{1}{4}\right) \geqslant -K \Rightarrow \lambda_2 \geqslant \lambda_1 - \frac{K}{P}.$$

De même on a

$$\lambda_3 - \lambda_2 \geqslant -\frac{K}{P^2}, \ldots \lambda_{i+1} - \lambda_i \geqslant \frac{K}{P^i}$$

$$\lambda_{i+1} \geqslant \lambda_1 - \frac{K}{P} - \frac{K}{P^2} - \ldots - \frac{K}{P^i} \geqslant C - \frac{K}{P-1}.$$

En choisissant P suffisamment grand on a $\operatorname{Inf}\{\lambda_i\} > 0$.

Démonstration du théorème. – Soit S_1 un réel tel que $S < S_1 < F$. Il est clair qu'il existe un intervalle I′ tel que

$$\sup_{t \in I'} |x_0(t)| = \|x_0\|_{I'} \geqslant S_1.$$

Posons $r = \dfrac{S_1 - S}{S_1}$. Soit Q positif tel que $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{Q^i} = r$. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ et J $(1 \leqslant n < \infty)$ des intervalles disjoints entre eux et disjoints de I′. Soit $H = \sup_{t \in I} |x_0(t)| = \|x_0\|_I$.

Construction des fonctions z_{nt}. Les z_{ni} sont des fonctions ayant des supports disjoints inclus dans J. Il est facile de voir qu'il est possible de construire les z_{ni} telles que la somme ponctuelle de la série $\sum_i \lambda_{ni} z_{ni}$ n'est continue que si $\lim_{i \to \infty} \lambda_{ni} = 0$. De plus les z_{ni} sont choisies telles que $\|z_{ni}\| = \varepsilon_n \searrow 0$. Ensuite on pose $\sum_i z_{ni} = z_n$ (discontinue).

Construction des y_{ni}. D'après le lemme, pour tout n il existe une suite $y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{ni}, \ldots$ de fonctions continues portées par I_n et telles que

1) $\sum_{i=1}^{\infty} y_{ni}(t) = 0$ où la série converge ponctuellement.

2) Si $\lambda_{n1} > \dfrac{1}{Q^n}$ et si $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\right\|_{I_n} \leqslant M + S$, alors on a $\inf_i \{\lambda_{ni}\} > 0$.

Construction des fonctions x_ν. La convention qu'on utilise ci-dessous paraît compliquée, mais elle simplifie bien le raisonnement et évite toute confusion possible.

Si ν admet deux facteurs premiers différents, on prend $x_\nu = 0$.

Si $\nu = p^i$ où p est un nombre premier, on écrit $x_\nu = x_{ni}$, où

n est l'ordre du nombre premier p dans la suite des nombres premiers $2, 3, 5 \ldots$ On définit ensuite les x_ν de la façon suivante.

Si $\nu = p$ (premier) alors $x_\nu = x_0 + y_{n1} + z_{n1}$.

Si $\nu = p^i$ $(i \neq 1)$ alors $x_\nu = y_{n0} + z_{ni}$.

La suite x_ν est construite, il est clair que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} : n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_{ni} - x_0 \right\| = \| z_n \| = \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Montrons maintenant qu'il est impossible d'approcher la fonction x_0 à moins de S par une série $\sum_\nu \lambda_\nu x_\nu$ ponctuellement convergente et de somme continue. En effet, soit $x = \Sigma \lambda_\nu x_\nu$. En dehors des intervalles I_n et J la fonction x est égale à $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1}\right) x_0$. Distinguons les trois cas suivants :

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} \leqslant r$ alors sur l'intervalle I$'$ on a

$$x_0 - x = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1}\right) x_0$$

$$\| x_0 - x \|_{\mathrm{I}'} = | 1 - \Sigma \lambda_{n1} | \cdot \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} \geqslant (1 - r) \ \mathrm{S}_1 =$$

$$= \left(1 - \frac{\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}}{\mathrm{S}_1}\right) \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}.$$

2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} \geqslant 2$ alors sur l'intervalle I$'$ on a

$$x - x_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} - 1\right) x_0$$

$$\| x - x_0 \|_{\mathrm{I}'} = (\Sigma \lambda_{n1} - 1) \cdot \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} \geqslant \| x_0 \|_{\mathrm{I}'} = \mathrm{S}_1 > \mathrm{S}.$$

3) Si $r < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{ni} < 2$ alors dans l'intervalle In on a

$$x - x_0 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} - 1\right) x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}.$$

Ceci est légitime puisqu'en chaque point de I_n il n'y a qu'un nombre fini d'indice pour lesquels y_{ni} est différent de zéro.

Or

$$\|x - x_0\|_{I_n} \geqslant \|\sum_{i=1} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} - \|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{ni} - 1\Big) x_0\|_{I_n}$$

$$\geqslant \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} - \mathrm{M}.$$

Donc, pour que $\|x - x_0\|_{I_n} \leqslant$ il est nécessaire que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} \leqslant \mathrm{S} + \mathrm{M}.$$

Mais puisque $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{Q}^i} = r$, l'inégalité $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n1} > r$ entraîne $\exists n : \lambda_{n1} > \frac{1}{\mathrm{Q}^n}$ et d'après la construction des y_{ni} on a

$$\lambda_{ni} > \frac{1}{\mathrm{Q}^n}, \ \|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} y_{ni}\|_{I_n} \leqslant \mathrm{S} + \mathrm{M} \Rightarrow \mathrm{Inf}\,\{\lambda_{ni}\} > 0.$$

Cette dernière inégalité entraîne, d'après la construction des z_{ni}, que la somme de la série ponctuellement convergente $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{ni} z_{ni}$ est discontinue. Il est donc impossible d'approcher x_0 à moins de S par une série $\Sigma\, \lambda_\nu x_\nu$ ponctuellement convergente et de somme continue.

Remarque. – Le théorème précédent répond abondamment à une question que nous nous sommes posés dans la note [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] NGUYEN HUU VINH, Sur le comportement de la suite π_p projection de l'origine sur une variété linéaire M au sens de la norme de Hölder de paramètre *p*. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 688-690.

[2] Nguyen huu vinh, Approximation par des séries ponctuellement convergentes. *C.R. Acad. Sc. Paris,* t. 269, 840-843.

Manuscrit reçu le 9 août 1972
accepté par J.P. Kahane

Nguyen huu vinh
Département de Mathématiques
Université de Paris-Sud
91405 Orsay