ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL LEHMANN

Sur les obstructions à l'intégrabilité des *G*-structures

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 83-93
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_83_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 83-94

SUR LES OBSTRUCTIONS A L'INTÉGRABILITÉ DES G-STRUCTURES

par Daniel LEHMANN

1. Introduction.

Depuis que D. Bernard ([1]) a défini le tenseur de structure d'une G-structure d'ordre 1 comme obstruction à l'intégrabilité d'ordre 2, différents auteurs ont tenté de généraliser cette situation à l'ordre supérieur en définissant une obstruction à l'intégrabilité d'ordre $k + 1$ d'une G-structure $P \subset H^k(V)$ d'ordre k (i.e. d'un G-sous-fibré principal P du L_n^k-fibré principal $H^k(V)$ des repères d'ordre k de V) : cf., par exemple, [2], [3], [4], [5], [6], [7].

En particulier, cette obstruction prend ses valeurs dans la δ-cohomologie de Spencer $H^{2,k-1}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe structural G, dans le cas où P est le $(k-1)^{\text{ième}}$ prolongement d'une structure d'ordre 1 intégrable à l'ordre k (voir par exemple : Guillemin [2], Guillemin-Sternberg [3], Singer-Sternberg [6].

Par ailleurs, P. Libermann ([4]) a eu l'idée d'interpréter l'intégrabilité à l'ordre $k + 1$ comme signifiant que l'intersection de 2 sous-fibrés d'un même fibré se projette sur toute la base.

Nous nous proposons essentiellement de donner une nouvelle construction de cette obstruction, plus naturelle, et valable plus généralement chaque fois que P est inclus dans le prolongement $J^1 P' \cap H^k(V)$ de la structure P' d'ordre $k - 1$ obtenue par projection de P sur $H^{k-1}(V)$. Notre construction est basée sur un formalisme très simple exprimant l'obstruction à ce que l'intersection $Q' \cap Q''$ de deux sous-fibrés principaux Q' et Q'' d'un même fibré principal $Q \to Z$ se projette sur toute la base.

Plusieurs conversations avec Madame Buttin et Mademoiselle Libermann m'ont beaucoup aidé dans la préparation de ce travail. Je les en remercie vivement.

2. Quelques rappels.

Soit $P \subset H^k(V)$ une G-structure d'ordre k sur V et $J^l P$ la variété des l-jets de sections C^∞ de $P \to V$ ($l \geqslant 1$).

Posons $n = \dim V$. Pour toute variété W et tout point $w \in W$, notons $J^l_{w\,e}(W, G)$ le groupe de Lie des l-jets de W dans G, de source w et de but l'élément neutre e de G, la structure de groupe étant héritée de celle de G.

PROPOSITION 1. — *Pour $l \leqslant k$, la variété* $J^l P$, *fibrée au-dessus de* P *par l'application but, possède une structure naturelle de fibré principal différentiable de groupe structural* $J^l_{0\,e}(R^n, G)$.

En effet, $\forall x \in V$, $\forall z \in P_x$, le groupe $J^l_{x\,e}(V, G)$ opère à droite de façon simplement transitive sur la fibre $(J^l P)_z$ de $J^l P \to P$. Mais, pour $l \leqslant k$, la donnée d'un k-repère z de V en x définit par projection $p : H^k(V) \to H^l(V)$ un l-repère $p(z)$ de V en x, lequel définit par conséquent un isomorphisme de groupes de Lie

$$\widetilde{p(z)} : J^l_{0,e}(R^n, G) \underset{\cong}{\to} J^l_{x,e}(V, G)$$

ce qui permet de faire opérer $J^l_{0,e}(R^n, G)$ à droite sur $(J^l P)_z$, de façon simplement transitive.

(Le fait que ce fibré principal ensembliste soit C^∞ est fastidieux mais facile à démontrer).

Notations. — On notera $J^l_P H^k$ la restriction à P du $J^l_{0,e}(R^n, L^k_n)$-fibré principal $J^l H^k(V) \to H^k(V)$ (pour $l \leqslant k$), et H^{k+l}_P la restriction à P du $L^{k+l}_{n,k}$ fibré principal $L^{k+l}(V) \to H^k(V)$

$\left(\text{où } L^{k+l}_{n,k} = \operatorname{Ker}(L^{k+l}_n \to L^k_n) \text{ est difféomorphe à } \bigoplus_{i=1}^{l} S_{k+i}(R^n)^* \otimes R^n\right)$.

PROPOSITION 2.

i) $L^{k+l}_{n,k}$ *s'identifie de façon naturelle à un sous-groupe de Lie de* $J^l_{0,e}(R^n, L^k_n)$.

ii) $H^{k+l}_P \to P$ *s'identifie de façon naturelle à un sous-fibré principal de* $J^l_P H^k \to P$. (*pour* $l \leqslant k$).

Soit ψ un germe de difféomorphisme $(\mathbf{R}^n, 0) \overset{\cong}{\to} (\mathbf{R}^n, 0)$ de source et but 0, tel que $j_0^k \psi = j_0^k(\mathrm{I}d)_{\mathbf{R}^n}$. Soit $\hat{\psi} : (\mathbf{R}^n, 0) \to \mathrm{L}_n^k$ le germe en 0 de fonction C^∞ de $\mathbf{R}^n$ dans L_n^k défini par :

$$\hat{\psi}(a) = j_0^k(\tau_{-a} \cdot \psi \cdot \tau_{\psi^{-1}a}) \qquad \forall a \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n ,$$

(où τ_a désigne la translation de vecteur a dans $\mathbf{R}^n$). Il est clair que $\hat{\psi}(0) = j_0^k(\mathrm{I}d_{\mathbf{R}^n})$ et que $j_0^l \hat{\psi}$ ne dépend que de $j_0^{k+l}\psi$. On vérifie aisément que l'application $\bar{i} : j_0^{k+l}\psi \to j_0^l \hat{\psi}$ ainsi définie identifie $\mathrm{L}_{n,k}^{k+l}$ à un sous-groupe de Lie de $\mathrm{J}_{0,e}^l(\mathbf{R}^n, \mathrm{L}_n^k)$.

Soit φ un germe de difféomorphisme $(\mathbf{R}^n, 0) \overset{\cong}{\to} (\mathrm{V}, x)$ de source 0 et but x, et soit φ la section locale de $\mathrm{H}^k(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ au voisinage de x définie par :

$$\hat{\varphi}(y) = j_0^k(\varphi \cdot \tau_{\varphi^{-1}y}) \qquad \forall y \text{ voisin de } x \text{ dans V} .$$

On vérifie aisément que $j_x^l \hat{\varphi}$ ne dépend que de $j_0^{k+l}\varphi$. Soit

$$i : j_0^{k+l}\varphi \to j_x^l \hat{\varphi} \text{ l'application } \mathrm{H}^{k+l}(\mathrm{V}) \to \mathrm{J}^l\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$$

ainsi définie. On vérifie, pour $l \leqslant k$, que $(i, \bar{i})$ identifie

$$\mathrm{H}^{k+l}(\mathrm{V}) \to \mathrm{H}^k(\mathrm{V})$$

à un sous-fibré principal de $\mathrm{J}^l\mathrm{H}^k(\mathrm{V}) \to \mathrm{H}^k(\mathrm{V})$, d'où la proposition.

Soit P une G-structure d'ordre k, et $\mathrm{P}^{k-l}(l \geqslant 1)$ sa projection sur $\mathrm{H}^{k-l}(\mathrm{V})$: P^{k-l} est une structure d'ordre $k - l$. Il est *faux*, en général, que P soit inclus dans $\mathrm{J}^l\mathrm{P}^{k-l}$: on peut s'en convaincre en prenant $\mathrm{V} = \mathbf{R}^n$, $k = 2$, $l = 1$, $\mathrm{P} = \{$2-repères de $\mathbf{R}^n$ se projetant sur le 1-repère canonique de $\mathbf{R}^n\}$.

Cas particulier $\mathrm{P} \subset \mathrm{J}^l\,\mathrm{P}^{k-l}(k \geqslant l)$.

Nous allons définir un sous-fibré principal $\mathcal{J}^l\mathrm{P} \to \mathrm{P}$ de $\mathrm{J}^l\mathrm{P} \to \mathrm{P}$. Pour $k = l$, on posera $\mathcal{J}^l\mathrm{P} = \mathrm{J}^l\mathrm{P}$. Supposons désormais $k \geqslant l + 1$.

L'identification $i_{k-l} : \mathrm{H}^k(\mathrm{V}) \hookrightarrow \mathrm{J}^l\mathrm{H}^{k-l}(\mathrm{V})$ consiste à associer à $j_0^k\varphi$ (où $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \overset{\cong}{\to} (\mathrm{V}, x)$ est un germe de difféomorphisme) le jet $j_x^l\hat{\varphi}$ où $\hat{\varphi}$ est la section locale de $\mathrm{H}^{k-l}(\mathrm{V})$ définie au voisinage de x par $\hat{\varphi}(y) = j_0^{k-l}(\varphi \circ \tau_{\varphi^{-1}y})$. L'hypothèse faite sur P ($\mathrm{P} \subset \mathrm{J}^l\,\mathrm{P}^{k-l}$) permet d'affirmer que si $j_0^k\varphi \in \mathrm{P}$, $j_x^l\hat{\varphi}$ appartient non seulement à

$J^l H^{k-l}(V)$, mais même à $J^l P^{k-l}$. Soit $(\mathcal{J}^l P)_z$ la sous-variété de $(J^l P)_z$ formée des $j_x^l \sigma \in (J^l P)_z$ tels que

$$\begin{cases} \sigma(x) = z \\ \text{la projection de } j_x^l \sigma \text{ sur } J^l P^{k-l} \text{ induite par la projection} \\ \text{de P sur } P^{k-l} \text{ est égale à } i_{k-l}(z). \end{cases}$$

Notant $\mathcal{J}^l P = \bigcup_{z \in P} (J^l P)_z$, $\mathcal{J}^l P \to P$ possède une structure naturelle de sous-fibré principal de $J^l P \to P$, de groupe structural $J^l_{0,e}(R^n , G^k_{k-l})$, où $G^k_{k-l} = \mathrm{Ker}(L^k_n \to L^{k-l}_n) \cap G$. L'intérêt de ce sous-fibré principal provient essentiellement de la

PROPOSITION 3. – $\mathcal{J}^l P \cap H^{k+l}_P = J^l P \cap H^{k+l}_P$.

Nous admettrons cette proposition, dont la démonstration ne présente pas de difficulté.

Intégrabilité des G-structures. – Soit P une G-structure d'ordre k sur V. On identifiera désormais $J^l P$, H^{k+l}_P (et $\mathcal{J}^l P$ si $P \subset J^l P^{k-l}$) à des sous-fibrés C^∞ de $J^l_P H^k$.

DEFINITIONS.

i) *On dira que* P *est intégrable à l'ordre* $k + l$ *en un point* x *de* V *si* :

$$\forall z \in P_x \quad , \quad (J^l P)_z \cap (H^{k+l}_P)_z \neq \emptyset \ .$$

ii) *On dira que* P *est intégrable à l'ordre* $k + l$ *si* P *est intégrable à l'ordre* $k + l$ *en tout point* x *de* V.

On vérifie aisément que ces définitions sont équivalentes aux définitions classiques (rappelées par exemple dans Guillemin [2], avec la terminologie "l-plat en x" et "uniformément l-plat").

Remarques.

1) Si P est intégrable à l'ordre $k + l$, on peut montrer que $J^l P \cap H^{k+l}_P \to V$ est un sous-fibré principal différentiable de $H^{k+l}(V)$: c'est donc une structure d'ordre $k + l$, qu'on appellera $l^{ième}$*-prolongement de* P, et qu'on notera $P^{k+l} \to V$. La démonstration consiste à adapter un raisonnement de P. Libermann ([4] p. 13).

2) Posons, plus généralement, $P^{k+l} = J^l P \cap H_P^{k+l}$. Si P est intégrable à l'ordre $k + l$, on a la formule suivante (*transitivité des prolongements*) :

$$(P^{k+l})^{k+l+l'} = P^{k+l+l'} \quad \forall\, l' \geqslant 0 \ .$$

3) Si P est le $(k - q)^{\text{ième}}$-prolongement d'une structure d'ordre q intégrable à l'ordre k, la condition $P \subset J^l P^{k-l}$ est vérifiée $\forall\, l \leqslant k - q$. Il en est en particulier ainsi pour $q = 1$, $l = 1$ et $k \geqslant 2$: c'est le cas étudié par Guillemin dans [2].

3. Intersection de sous-fibrés principaux.

La définition ci-dessus suggère de définir l'obstruction à l'intégrabilité d'ordre $k + l$ comme obstruction à ce que l'intersection de deux sous-fibrés principaux différentiables d'un fibré principal se projette sur toute la base.

Soient donc $Q \to Z$ un fibré principal différentiable et Q', Q'' deux sous-fibrés principaux différentiables de groupes structuraux respectifs Γ, Γ', Γ''.

LEMME 1. — *Il existe une application* $\mathcal{D} : Q \to \Gamma/\Gamma''$ *et une seule vérifiant :*

i) $\mathcal{D}(q \cdot \gamma) = \gamma^{-1} \cdot \mathcal{D}(q)$ (Γ *opère à gauche sur* Γ/Γ'').

ii) $\mathcal{D}(q) = u_0 \ \forall\, q \in Q''$ (u_0 = *classe d'équivalence de l'élément neutre de* Γ).

Soit $q \in Q_z$ et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $q \cdot \gamma \in Q''_z$: la classe $\gamma\,\Gamma''$ de γ dans Γ/Γ'' ne dépend que de q, et l'application $\mathcal{D} : q \to \gamma\,\Gamma''$ ainsi définie vérifie i) et ii). Par ailleurs, si $\hat{\mathcal{D}}$ est une autre fonction vérifiant i) et ii), $\mathcal{D}$ et $\hat{\mathcal{D}}$ coïncident sur Q'' d'après ii), donc sur Q tout entier d'après i).

LEMME 2. — *Soit* $q' \in Q'_z$ $(z \in Z)$. *La classe d'équivalence de* $\mathcal{D}(q')$ *dans* $\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$ *ne dépend que de* z *: on la notera* $S(z)$.

Notons $\Pi : \Gamma/\Gamma'' \to \Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$ la projection canonique :

$$\Pi(\mathcal{D}(q' \cdot \gamma')) = \Pi(\gamma'^{-1} \cdot \mathcal{D}(q')) = \Pi(\mathcal{D}(q')) \ .$$

DEFINITIONS.

i) *La fonction* $\mathcal{O}: \mathrm{Q} \to \Gamma/\Gamma''$ *sera appelée torsion de* Q'' *dans* Q.

ii) *Sa restriction* $\mathcal{O}/\mathrm{Q}' : \mathrm{Q}' \to \Gamma/\Gamma''$ *sera appelée torsion de* (Q', Q'') *dans* Q.

iii) *La fonction* $\mathrm{S} : \mathrm{Z} \to \Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$ *sera appelée tenseur de structure de* (Q', Q'') *dans* Q.

PROPOSITION 4. – *Soit* $z \in \mathrm{Z}$. *Notons* v_0 *le point de base de* $\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Q}'_z \cap \mathrm{Q}''_z \neq \emptyset$.

ii) $\mathcal{O}|_{\mathrm{Q}'_z}$ *prend ses valeurs dans* $\Gamma'/\Gamma' \cap \Gamma''$.

iii) $\mathrm{S}(z) = v_0$.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

L'équivalence entre i) et iii) permet d'interpréter $\mathrm{S}(z)$ comme obstruction à ce que $\mathrm{Q}'_z \cap \mathrm{Q}''_z$ soit non vide.

4. Tenseurs de structure.

Soit P une G-structure d'ordre k sur V.

Si $k \geqslant 2$, nous supposerons en outre qu'elle vérifie :

$$\boxed{\mathrm{P} \subset \mathrm{J}^1 \mathrm{P}'} \quad (\text{où } \mathrm{P}' = \mathrm{P}^{k-1}) \ .$$

Soit $\mathcal{L}_n^k = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{S}_i(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n$ l'algèbre de Lie de L_n^k, et notons $\mathfrak{g}_i$ la composante homogène dans $\mathrm{S}_i(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n$ de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{L}_n^k$. La condition $\mathrm{P} \subset \mathrm{J}^1\mathrm{P}'$ implique évidemment que

$$\boxed{\mathfrak{g}_k \subset (\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}}$$

On appelle *cohomologie de Spencer de* $\mathfrak{g}$ *en dimension* $(2, k-1)$ l'espace vectoriel.

$$H^{2,k-1}(\mathfrak{g}) = \frac{\operatorname{Ker}[\overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1} \xrightarrow{\delta} \overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_{k-2}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n]}{\operatorname{Im}[(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k \xrightarrow{\delta} \overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}]}$$

où δ désigne l'antisymétrisation du complexe de Koszul

$$\underset{p,i}{\oplus} \overset{p}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_i(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n$$

des formes extérieures sur R^n à coefficients polynomiaux et à valeurs dans R^n.

Nous allons appliquer l'étude du § 3 au cas où $\mathrm{Z} = \mathrm{P}$, $\mathrm{Q} = \mathcal{J}^1_{\mathrm{P}}\mathrm{H}^k$, $\mathrm{Q}' = \mathcal{J}^1\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}'' = \mathrm{H}^{k+1}_{\mathrm{P}}$.

On a alors
$$\Gamma = (\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_k(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n ,$$
$$\Gamma' = (\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k ,$$
$$\Gamma'' = \mathrm{S}_{k+1}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n .$$

(structures de groupes abéliens sous-jacentes aux structures vectorielles, de sorte que ν_0 est le 0 de l'espace vectoriel $\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$). Posons

$$\mathrm{M} = \mathrm{S}_{k-1}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n .$$

PROPOSITION 5.

i) $\Gamma/\Gamma'' = \operatorname{Ker}[\overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M} \xrightarrow{\delta} \overset{3}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_{k-2}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n]$ *et*

$$\operatorname{Ker}[\overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1} \xrightarrow{\delta} \overset{3}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_{k-2}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n]$$

en est un sous-espace vectoriel.

ii) $$\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma'' = \frac{\operatorname{Ker}[\overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M} \xrightarrow{\delta} \overset{3}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_{k-2}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{R}^n]}{\operatorname{Im}[(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k \xrightarrow{\delta} \overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}]}$$

et $\mathrm{H}^{2,k-1}(\mathfrak{g})$ *en est un sous-espace vectoriel.*

Puisque Γ est inclus dans $(\mathrm{R}^n)^* \otimes (\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}$ et que

$$(\mathrm{S}_2(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}) \cap \Gamma = \Gamma'' ,$$

Γ/Γ'' est un sous-espace vectoriel de

$$\frac{(\mathrm{R}^n)^* \otimes (\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}}{\mathrm{S}_2(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}} = \overset{2}{\Lambda}(\mathrm{R}^n)^* \otimes \mathrm{M} ,$$

le passage aux quotients $(\mathbf{R}^n)^* \otimes (\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M} \to \overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}$ n'étant autre que l'antisymétrisation.

Il revient au même de dire qu'une 2-forme $\alpha \in \overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}$ est l'antisymétrisée d'un élément de $(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_k(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^n$, ou que $\delta\alpha = 0$ dans $\overset{3}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}_{k-2}(\mathbf{R}^n)^*$ (acyclicité du complexe de Koszul) : on en déduit la partie i). On en déduit aussi la partie ii) puisque

$$\Gamma' = (\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k$$

et puisque les classes d'équivalences dans Γ/Γ'' sont les antisymétrisées des 1-formes à coefficients dans $\mathrm{S}_k(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^n$.

Puisque $\mathfrak{g}_k \subset (\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}$, l'espace $\delta((\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k)$, qui est à priori dans $\overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}$, est en fait dans $\overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}$.

Proposition 6. – *Pour que* P *soit intégrable à l'ordre* $k+1$, *il faut et il suffit que la torsion* $\mathcal{Q} \,|\, \mathcal{J}^1\mathrm{P}$ *de* $(\mathcal{J}^1\mathrm{P}, \mathrm{H}_\mathrm{P}^{k+1})$ *dans* $\mathcal{J}_\mathrm{P}^1 \mathrm{H}^k$ *prenne ses valeurs dans* $\delta((\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k)$, *ou que* $\mathrm{S} = 0$.

Il suffit en effet d'appliquer les propositions 3 et 4 à la situation précédente.

Proposition 7. – *Supposons toujours* $\mathrm{P} \subset \mathrm{J}^1\mathrm{P}'$ si $k \geqslant 2$, *ou* $k = 1$. *Le tenseur de structure* S *prend alors ses valeurs dans le sous-espace* $\mathrm{H}^{2,k-1}(\mathfrak{g})$ de $\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$.

Soit, en effet $\theta_k : \mathrm{T}(\mathrm{H}^k(\mathrm{V})) \to \overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \mathrm{M}_i$ la forme fondamentale d'espace de repères sur $\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$ (où l'on a posé $\mathrm{M}_i = \mathrm{S}_i(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^n$ si $i \geqslant 1$, et $\mathrm{M}_0 = \mathbf{R}^n$) (cf. [2] ou [3]). Pour tout élément $z \in (\mathrm{H}^k(\mathrm{V}))_x$ et $\mathrm{H} \in (\mathcal{J}^1\mathrm{H}^k(\mathrm{V}))_z$, notons $\hat{\mathcal{Q}}(\mathrm{H}) : \overset{2}{\Lambda}\,\mathbf{R}^n \to \overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \mathrm{M}_i$ l'application $d\theta \circ \Lambda(\Pi_\mathrm{H}^{-1} \circ p(z))$ (où $\Pi_\mathrm{H} : \mathrm{H} \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}_x(\mathrm{V})$ désigne la restriction à

$$\mathrm{H} \subset \mathrm{T}_z(\mathrm{H}^k(\mathrm{V}))$$

de la projection $\mathrm{T}_z(\mathrm{H}^k(\mathrm{V})) \to \mathrm{T}_x(\mathrm{V})$, et où $p(z) : \mathbf{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathrm{T}_x(\mathrm{V})$ désigne la projection de z sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{V})$).

LEMME 1.

$\hat{\omega}(\mathrm{H})$ prend ses valeurs dans M_{k-1} ; et, si $\mathrm{H} \in \mathcal{J}^1\mathrm{P}$,

$\hat{\omega}(\mathrm{H})$ prend ses valeurs dans $\mathcal{G}_{k-1}$.

Notons en effet $\Pi_{k+1}^k : \mathrm{H}^{k+1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{H}^k(\mathrm{V})$ et

$$\hat{\Pi}_k^{k-1} : \overset{k}{\underset{i=0}{\oplus}} \mathrm{M}_i \to \overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \mathrm{M}_i$$

les projections canoniques.

On a alors la formule suivante (cf. [3]) :

$$\hat{\Pi}_k^{(k-1)} \cdot d\theta_{k+1} = + [\theta_{k+1}, \theta_{k+1}] .$$

D'autre part, $(\Pi_{k+1}^k)^{-1}\, \theta_k = \hat{\Pi}_k^{k-1} \cdot \theta_{k+1}$, de sorte que

$$(\Pi_{k+1}^k)^{-1}\, d\theta_k = + [\theta_{k+1}, \theta_{k+1}] .$$

Enfin, $(\mathcal{J}^1\mathrm{H}^k(\mathrm{V}))_z$ coïncide avec l'ensemble des sous-espaces horizontaux H de $\mathrm{T}_z(\mathrm{H}^k(\mathrm{V}))$ tels que $\theta\,|_{\mathrm{H}}$ prenne ses valeurs dans M_0 (c'est cet espace qui est considéré dans [2]). Ainsi, si X_k est un vecteur appartenant à un tel espace H, tout relèvement X_{k+1} de X_k dans $\mathrm{H}^{k+1}(\mathrm{V})$ vérifie : $\theta_{k+1}(\mathrm{X}_{k+1}) \in \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{M}_k$. Si Y_k est un autre vecteur de H, on en déduit que

$$d\theta_k(\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k) = + \\ + [\theta_{k+1}(\mathrm{X}_{k+1}), \theta_{k+1}(\mathrm{Y}_{k+1})] \in [\mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{M}_k, \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{M}_k] \subset \mathrm{M}_{k-1} .$$

Comme, par ailleurs, la restriction de θ_k à P prend ses valeurs dans $\overset{k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \mathcal{G}_i$ (où $\mathcal{G}_0 = \mathbf{R}^n$), on en déduit le lemme 1.

LEMME 2. – *La fonction* $\hat{\omega} : \mathcal{J}^1\mathrm{H}^k(\mathrm{V}) \to \overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}_{k-1}$ *coïncide avec la torsion de* $\mathrm{H}^{k+1}(\mathrm{V})$ *dans* $\mathcal{J}^1\mathrm{H}^k(\mathrm{V})$.

D'après le lemme 1 du § 3, il suffit de vérifier que

i) $\hat{\omega}(\mathrm{H} \cdot \alpha) = - \delta\alpha + \hat{\omega}(\mathrm{H})\ \forall\, \mathrm{H} \in \mathcal{J}^1\mathrm{H}^k(\mathrm{V}),\ \forall\, \alpha \in (\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathrm{M}_k$

ii) $\hat{\omega}(\mathrm{H}) = 0\ \ \forall\, \mathrm{H} \in \mathrm{H}^{k+1}(\mathrm{V})$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs de $\mathbf{R}^n$. Posons :

$$\mathrm{X}_k = (\Pi_{\mathrm{H}}^{-1} \circ p(z))(\vec{u}) , \quad \mathrm{X}'_k = (\Pi_{\mathrm{H}.\alpha}^{-1} \circ p(z))(\vec{u}) ,$$

$$Y_k = (\Pi_H^{-1} \circ p(z))(\vec{v}) \quad \text{et} \quad Y'_k = (\Pi_{H.\alpha}^{-1} \circ p(z))(\vec{v}) \ .$$

Désignons par X_{k+1}, X'_{k+1}, Y_{k+1}, Y'_{k+1} des relèvements de ces vecteurs en des vecteurs tangents à $H^{k+1}(V)$ en un même point : il existe alors A_k et $B_k \in \mathfrak{g}_k$ tels que

$$\theta_{k+1}(X_{k+1}) = \vec{u} + A_k \ , \ \theta_{k+1}(Y_{k+1}) = \vec{v} + B_k \ ,$$

$$\theta_{k+1}(X'_{k+1}) = \vec{u} + A_k + \alpha(\vec{u}) \ , \ \theta_{k+1}(Y'_{k+1}) = \vec{v} + B_k + \alpha(\vec{v}) \ .$$

On en déduit :

$$(\hat{\mathfrak{O}}(H \cdot \alpha) - \hat{\mathfrak{O}}(H))(\vec{u} \wedge \vec{v}) =$$

$$\begin{aligned} &= [\vec{u} + A_k + \alpha(\vec{u}) \, , v + B_k + \alpha(\vec{v})] - [\vec{u} + A_k \, , \vec{v} + B_k] \\ &= [\alpha(\vec{u}) \, , \vec{v}] - [\alpha(\vec{v}) \, , \vec{u}] \\ &= -\delta\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad , \ \text{d'où i)} \ . \end{aligned}$$

D'autre part, si $H \in (H^{k+1}(V))_z$, il existe une carte locale $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \xrightarrow{\cong} (V, x)$ telle que $z = j_0^k \varphi$, $H = j_0^{k+1} \varphi$. Le relèvement canonique $\widetilde{\varphi}^k : H^k(\mathbf{R}^n) \to H^k(V)$ a une application linéaire tangente en $j_0^k(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$ qui ne dépend que de H : si $\sigma_0 : a \to j_0^k \tau_a$ désigne la section canonique de $H^k(\mathbf{R}^n)$, H est l'image, par cette application linéaire tangente, de l'espace tangent H_0 à l'image de σ_0 en $\sigma_0(0)$. Comme, d'autre part, si θ_k^0 désigne la forme fondamentale de $H^k(\mathbf{R}^n)$, $(\widetilde{\varphi}^k)^{-1}(\theta_k) = \theta_k^0$, l'identité $\hat{\mathfrak{O}}(H) = 0$ résulte de ce que $d\theta_k^0 |_{\overset{2}{\Lambda} H_0} = 0$, d'où ii).

Il résulte des lemmes 1 et 2 que la torsion de $(\mathcal{J}^1 P, H_P^{k+1})$ dans $\mathcal{J}_P^1 H^k$ prend ses valeurs dans $\overset{2}{\Lambda}(R^n)^* \otimes \mathfrak{g}_{k-1}$, d'où la proposition 7.

Remarques.

1) Un élément $H \in J^1 P$ est un "élément de connexion sur P". Si $H \in \mathcal{J}^1 P$, le cocycle $\mathfrak{O}(H) \in \overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes M$ sera appelé torsion de cet élément de connexion.

2) "Le principe de la démonstration de la proposition 7 consiste à démontrer que notre définition du tenseur de structure est équivalente à celle de Guillemin [2]".

3) G opère sur

$$\Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma'' = \frac{\delta\text{-cocycles dans } \overset{2}{\Lambda}(\mathbf{R}^n)^* \otimes S_{k-1}(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^n}{\delta(\mathbf{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}_k)}$$

et laisse le sous-espace $H^{2,k-1}(\mathfrak{g})$ invariant. La fonction

$$S : P \to \Gamma'\backslash\Gamma/\Gamma''$$

est un "tenseur" au sens suivant :

$$S(z \cdot g) = g^{-1} \cdot S(z) \quad \forall z \in P \ \forall g \in G .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BERNARD, Sur la Géométrie différentielle des G-structures, *Annales de l'institut Fourier* (1960).

[2] V. GUILLEMIN, The integrability problem for G-structures, *Trans. Americ. Math. Soc.* (1965) p. 544.

[3] GUILLEMIN-STERNBERG, Deformation theory of pseudo-group structures. Memoir n° 64 of Amer. Math. Soc., (1966).

[4] P. LIBERMANN, Connexions d'ordre supérieur et tenseurs de structure, Atti del Convegno Intern. Geom. Diff. Bologne (1967).

[5] NGO VAN QUE, Thèse (Paris – 1966) *Annales de l'institut Fourier* (1967).

[6] SINGER-STERNBERG, The infinite groups of Lie and Cartan, *Journ. d'Anal. Mathém.* de Jérusalem (1965) t. XV p. 1.

[7] P. VER EECKE, Sur les tenseurs de structure d'ordre supérieur d'une G-structure. *Comptes Rendu. Acad. Sc. Paris.* t. 266 874, (1968).

Manuscrit reçu le 10 décembre 1970

Daniel LEHMANN
Département de Mathématiques Pures
B.P. 36
59 – Lille