ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NICOLAS TH. VAROPOULOS

Un problème d'extension linéaire dans les algèbres uniformes

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 263-269

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_263_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 263-270

UN PROBLÈME D'EXTENSION LINÉAIRE DANS LES ALGÈBRES UNIFORMES

par Nicolas Th. VAROPOULOS

Soit X un espace compact et soit $A \subset C(X)$ une algèbre uniforme sur X. On dira que $E \subset X$, un sous-ensemble compact, est un ensemble de type I(1) (cf. [1]) si pour tout $f \in C(E)$ il existe une $\tilde{f} \in A$ telle que $\tilde{f}|_E = f$ et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. On dira que E est un ensemble d'interpolation isométrique si pour tout $f \in C(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}|_E = f$ et $\|\tilde{f}\| \leqslant \|f\| + \varepsilon$.

On notera aussi par A(E) l'algèbre $A(E) = A/I(E) \subsetneq C(E)$; $I(E) = \{f \in A \; ; \; f^{-1}(0) \supset E\}$ munie de sa norme quotient.

Dans cette note on va partiellement généraliser les résultats de A. Pelczynski et Michael (cf. [2], [3]) et on va démontrer les deux théorèmes suivants.

THEOREME 1. – *Soient* X *un espace compact,* A *une algèbre uniforme sur* X *et* E *un ensemble métrisable de type* I(1), *alors il existe une application linéaire*

$$T : C(E) \to A \quad ; \quad \|T\| \leqslant 1$$

telle que $Tf|_E = f, \ \forall f \in C(E)$.

THEOREME 2. – *Soient* X *un espace compact,* A *une algèbre uniforme sur* X *et* $E \subset X$ *un sous-ensemble compact métrisable qui est d'interpolation isométrique. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une application linéaire*

$$T = T_\varepsilon : C(E) \to A \quad ; \quad \|T\| \leqslant 1 + \varepsilon$$

telle que $Tf|_E = f, \ \forall f \in C(E)$.

Démonstration du théorème 1.

Soit $D_j = \{z \in \mathbf{C} \,;\, |z| \leqslant 1\}$, $j = 1, 2, \ldots$, une suite de disques complexes ; en utilisant alors les hypothèses, on peut trouver une suite de fonctions $\{f_j \in A \,;\, \|f_j\| \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots\}$ telle que l'application

$$F : \mathrm{Sp}A \to \mathbf{D} = \prod_{j=1}^{\infty} D_j \quad ; \quad F(x) = \{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \quad x \in \mathrm{Sp}A$$

est biunivoque sur E et envoie E dans un ensemble F(E) qui est pic interpolation pour l'algèbre $A(\mathbf{D})$ (des fonctions "analytiques" sur $\mathbf{D}$). En utilisant alors le théorème de [3] on obtient une application linéaire isométrique $S : C(F(E)) \to A(\mathbf{D})$ telle que composée avec $\check{F} : A(\mathbf{D}) \to A$ (le calcul symbolique induit par F) donne l'application cherchée $T = \check{F} \circ S \circ I_F$ où $I_F : C(E) \to C(F(E))$ est l'identification de C(E) et de C(F(E)) induite par F.

Avant d'aborder la preuve du théorème 2 on va démontrer la proposition suivante

PROPOSITION 1. – *Soit* X *un espace compact et soit* $E \subset X$ *un sous-ensemble fermé de* X *et* $A \subset C(X)$ *une algèbre uniforme sur* X, *soit aussi* $f \in A(E)$ *une fonction à valeurs* ± 1 ($f(e) = \pm 1\ \forall e \in E$) *telle que* $\|f\|_{A(E)} = 1$ *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\tilde{f} \in A$ *telle que*

$$\|\tilde{f}\| \leqslant 1 \quad ; \quad \sup_{x \in X} |\mathrm{Im}\, \tilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon ; \sup_{e \in E} |\tilde{f}(e) - f(e)| \leqslant \varepsilon \ .$$

La proposition 1 est une conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach et du lemme suivant (pour le passage du lemme 1 à la proposition 1 cf. [4], § 6).

LEMME 1. – *Soient* X, E, A, f *comme dans la proposition* 1 *et* $\mu \in M^+(X)$ *une mesure de Radon positive sur* X, *il existe alors un filtre de fonctions* $\{\tilde{f}_\gamma \in A_1$ (= *la boule unité de* A)$\}_{\gamma \in \Gamma}$ *tel que*

$$\mathrm{Im}\, \tilde{f}_\gamma \xrightarrow[\gamma \in \Gamma]{} 0 \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty(X\,;\mu)\ ;\ L^1(X\,;\mu))$$

$$\tilde{f}_\gamma|_E \xrightarrow[\gamma \in \Gamma]{} f \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty(E\,;\mu|_E)\,;\,L^1(E\,;\mu|_E)) \ .$$

Preuve du lemme 1. – Notons par Θ l'adhérence pour la topologie faible $\sigma = \sigma(L^\infty\,;L^1)$ de A_1 dans $L^\infty(X\,;\mu)$; $\Theta \subset L^\infty(X\,;\mu)$ est alors convexe, compact pour la topologie σ, il est contenu dans U, la boule unité de $L^\infty(X\,;\mu)$ et il est fermé par multiplication ponctuelle i.e. Θ est un demi-groupe multiplicatif. (Pour vérifier ce dernier point, observons dans un premier temps que $A_1 \,.\, \Theta \subset \Theta$ et que ceci entraîne que $\Theta \,.\, \Theta \subset \Theta$).

Notons alors que

$$\Theta_1 = \{ f \in \Theta \ ;\ f(e) = 1 \quad (p\,.\,p\,.\,\mu)\ e \in E \}$$

est un sous-demi-groupe fermé de Θ.

En utilisant alors un théorème de [4] (dans [4] § 4 le théorème est donné seulement pour un Θ autoadjoint, mais il est valable dans le cas général cf. [5], Ch. IX § 3.3) on obtient une décomposition de X en deux sous-ensembles boréliens disjoints X_1 , $X_2 \subset X$

$$(X_1 \cap X_2 = \emptyset,\ X_1 \cup X_2 = X)$$

tels que

$$\forall\, \varphi \in \Theta_1 \quad \varphi(x_1) = 1 \quad (p\,.\,p\,.\,\mu)\ x_1 \in X_1 \tag{1}$$

$$\exists\, \varphi_0 \in \Theta_1 \quad \varphi_0(x_2) = 0 \quad (p\,.\,p\,.\,\mu)\ x_2 \in X_2\,. \tag{2}$$

Soit alors $\psi_0 \in \Theta$ une fonction telle que $\psi_0(e) = f(e)$ $(p.p.\mu)$ $e \in E$. (Une telle fonction existe toujours à cause de notre hypothèse $\|f\|_{A(E)} = 1$), on a alors $\psi_0^2 \in \Theta_1$ et par conséquent (1) et (2) entraînent que, si on pose $\theta = \psi_0\varphi_0 \in \Theta_1$, on a $Im\,\theta(x) = 0$ $(p\,.\,p\,.\,\mu\ x \in X)$. Pour satisfaire toutes les conditions du lemme, il suffit donc de prendre pour notre filtre $\{\widetilde{f}_\gamma \in A_1\}_{\gamma\in\Gamma}$ un filtre qui converge pour la topologie $\sigma(L^\infty\,;\,L^1)$ vers θ $(\widetilde{f}_\gamma \xrightarrow[\gamma\in\Gamma]{} \theta)$.

COROLLAIRE 1. – *Soient* X *un espace compact,* $A \subset C(X)$ *une algèbre uniforme sur* X *et* $E \subset X$ *un sous-ensemble métrisable d'interpolation isométrique de* A. *Alors pour tout* $u \in C_{\mathbf{R}}(E)$ *fonction continue réelle sur* E *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $f \in A$ *telle que :*

$$\|f\| \leqslant \|u\| + \varepsilon \quad ; \quad \sup_{x\in X} |Im\, f(x)| \leqslant \varepsilon \quad ; \quad f|_E = u\,.$$

On déduit facilement le corollaire 1 à partir de la proposition 1 en utilisant Hahn-Banach et le fait que toute mesure sur un espace compact métrisable s'approche en norme par des mesures de support totalement disconnecté.

Remarque. – La proposition 1 aussi bien que son corollaire est valable dans le cadre plus général d'une algèbre de Banach $A \underset{\rightarrow}{\subsetneq} C(X)$ (munie d'une norme plus fine que $\| \ \|_\infty$).

Démonstration du théorème 2. – Soit X, E, A comme dans le théorème 2. On va supposer pour la démonstration que $Sp\,A = X$ et on va fixer une fois pour toutes G un groupe abélien compact métrisable et $\varphi : E \to G$ une application telle que pour tout caractère de G, $\chi \in G$ il existe une fonction $u = u_\chi \in C_{\mathbf{R}}(E)$ telle que

$$\exp[i\, u(e)] = \chi(\varphi(e)) \quad e \in E\,. \tag{3}$$

(Ceci est toujours possible : il suffit par exemple de prendre $G = \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$ et d'identifier E à un compact de

$$I^{\mathbf{N}} = [0,1] \times [0,1] \times \cdots \subset \mathbf{T} \times \mathbf{T} \times \cdots = \mathbf{T}^{\mathbf{N}})\,.$$

On va démontrer alors le lemme suivant :

LEMME 2. – *Soient* X, E, A, G *et* φ *comme ci-dessus alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe :*

$$\{\alpha_{\chi,j} \in A \ ;\ \chi \in \hat{G}\ ,\ j = 1, 2, \ldots\}\,,$$

$$\{\mu_{x,j} \in M(G) \ ;\ x \in X\ ,\ j = 1, 2, \ldots\}$$

tels que

i) $\mathrm{Card}\{\chi \in \hat{G}\ ;\ \alpha_{\chi,j} \neq 0 \in A\} < +\infty\ ;\ \forall j = 1, 2, \ldots$

ii) $\|\mu_{x,j}\| \leqslant 1 + \varepsilon\ ;\ x \in X\ ,\ j = 1, 2, \ldots$

iii) $\alpha_{\chi,j}(x) = \int_G \chi(g)\, d\mu_{x,j}(g)\ ;\ x \in X,\ j = 1, 2, \ldots, \chi \in \hat{G}$

iv) $\alpha_{\chi,j}(e) \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi(\varphi(e))$ *uniformément pour* $e \in E\ ;\ \forall \chi \in \hat{G}$

v) $\sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha_{\chi,j+1} - \alpha_{\chi,j}\| < +\infty\ ;\ \forall \chi \in \hat{G}\,.$

Démonstration du lemme 2. – Pour alléger les notations, on va donner ici la preuve dans le cas $G \cong \mathbf{T} = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$, ce cas est parfaitement typique, le cas général (e.g. $G \cong \mathbf{T}^{\mathbf{N}}$) se traite d'une manière tout à fait analogue ; on a alors $\hat{G} \cong \mathbf{Z}$ en posant

$$\chi_m(t) = e^{imt} \quad ; \quad \chi_m \in \hat{G} \quad m \in \mathbf{Z} \, .$$

En utilisant (3) et le corollaire 1 on peut choisir alors une suite $\{\beta_j \in A\}_{j=1}^{\infty}$ telle que

$$\beta_j(e) = \chi_{2^j}(\varphi(e)) (= \exp(i 2^j \varphi(e))) \; ; \; \| \, |\beta_j(x)| - 1 \, | \leqslant \frac{\delta}{2^j} \; ; \; e \in E \, , x \in X \, ,$$

$$j = 1 , 2 , \ldots \quad (4)$$

où $\delta > 0$ est à choisir plus tard.

On va construire alors, à partir de $\{\beta_j\}$, une suite double $\{\gamma_m^{(j)} \in A \; ; \; m \in \mathbf{Z}, \; j = 1 , 2 , \ldots\}$ de la manière suivante : pour tout $j \geqslant 1$ on peut développer tout $0 \leqslant m \leqslant 2^{j+1} - 1$ d'une manière unique

$$m = \sum_{k=0}^{j} \varepsilon_k(m) \, 2^k \quad \varepsilon_k(m) = 0 , 1 \quad (k = 0 , 1 , \ldots j) \, .$$

On posera alors :

$$\gamma_m^{(j)} = \prod_{k=0}^{j} \beta_k^{\varepsilon_k(m)} \quad , \; j = 1 , 2 , \ldots \; ; \; 0 < m \leqslant 2^{j+1} - 1 \, .$$

On posera aussi (en utilisant (4) et l'hypothèse que $SpA = X$) :

$$\gamma_m^{(j)} = (\gamma_m^{(j)})^{-1} \quad j = 1 , 2 , \ldots \; ; \; 1 - 2^{j+1} \leqslant m < 0$$

$$\gamma_m^{(j)} = 0 \quad j = 1 , 2 , \ldots \; ; \; |m| \geqslant 2^{j+1} \, .$$

$$\gamma_0^{(j)} = 1 \quad j = 1 , 2 , \ldots$$

(4) entraîne alors que :

$$\| \gamma_m^{(j)} \| \leqslant e^{\delta} \; ; \; \gamma_m^{(j)}(e) = \chi_m(\varphi(e)) \; ; \; j = 1 , 2 , \ldots ,$$

$$|m| \leqslant 2^{j+1} - 1 \, . \quad (5)$$

Posons finalement :

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{1}{2^{j+2} - 1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m-p}^{(j)} \, \gamma_p^{(j)} \quad ; \quad m \in \mathbf{Z} \; , \; j = 1 , 2 , \ldots \quad (6)$$

En notant alors

$$\gamma^{(j)}(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^{j+2} - 1}} \, \gamma_m^{(j)}(x) \right\}_{m=-\infty}^{+\infty} \quad (x \in X \; , \; j = 1 , 2 , \ldots) \; ,$$

on obtient tout de suite, à partir de (5) et (6) que :

$$\gamma^{(j)}(x) \in L^2(\mathbf{Z}) \; ; \; \| \gamma^{(j)}(x) \|_{L^2} \leqslant e^{\delta} \; ; \; \alpha^{j}(x) = \{\alpha_m^{(j)}(x)\}_{m=-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \gamma^{(j)}(x) * \gamma^{(j)}(x) \; ; \; x \in X \, , \; j = 1 \, , 2 \, , \ldots$$

(la convolution $*$ ayant lieu sur le groupe $\hat{G} = \mathbf{Z}$) ; et ceci entraîne que, pour tout $x \in X$ et tout $j = 1, 2, \ldots$, il existe une mesure $\mu_{x,j} \in M(T)$ telle que

$$\| \mu_{x,j} \| \leqslant e^{2\delta} \; ; \; \alpha_m^{(j)}(x) = \int_T e^{imt} \, d\mu_{x,j}(t) \; , \; m \in \mathbf{Z} \, . \tag{7}$$

(Cette idée de convolution pour obtenir une fonction de la classe $A(\mathbf{Z})$ a paru pour la première fois dans les travaux de Drury, cf. [6], cf. aussi [4] addentum, [7]).

D'autre part, en utilisant la définition de $\gamma_m^{(j)}$ et (5) et en faisant un calcul facile on voit que, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ fixé, on a :

$$\| \alpha_m^{(j+1)} - \alpha_m^{(j)} \| = 0(2^{-j}) \; ; \tag{8}$$

$\alpha_m^{(j)} \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi_m(\varphi(e))$ uniformément $e \in E$ et que $\alpha_m^{(j)} = 0$ dès que

$$|m| \geqslant 2^{j+10} \, .$$

En combinant alors (7) et (8), on voit qu'il suffit de poser $\alpha_{\chi_m, j} = \alpha_m^{(j)}$ et de définir $\mu_{x,j}$ comme dans (7) ($m \in \mathbf{Z}$, $x \in X$, $j = 1, 2, \ldots$) pour satisfaire toutes les conditions du lemme (quitte à bien choisir δ).

Conclusion de la démonstration du théorème 2.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et choisissons

$$\{\alpha_{\chi,j} \in A \, , \; \mu_{x,j} \in M(G) \; ; \; x \in X \, , \; \chi \in \hat{G} \, , \; j = 1 \, , 2 \, , \ldots\}$$

qui satisfont les conditions i) – v) avec cet ε ; en utilisant alors i), ii) et iii) on voit qu'on peut définir une suite d'applications linéaires :

$$L_j : C(G) \to A \; ; \; \| L_j \| \leqslant 1 + \varepsilon \quad (j = 1 \, , 2 \, , \ldots)$$

par les conditions :

$$L_j(\chi) = \alpha_{\chi,j} \in A \; ; \; \chi \in \hat{G} \; , \; j = 1 \, , 2 \, , \ldots$$

En utilisant iv) et v) on voit alors que les L_j convergent vers une application linéaire $L = L_\varepsilon : C(G) \to A$ de norme inférieure ou égale à $1 + \varepsilon$ telle que l'élément $F_\chi = L(\chi) \in A$ satisfait :

$$F_\chi(e) = \chi(\varphi(e)) \quad ; \quad \forall\, e \in E \quad , \quad \forall\, \chi \in \hat{G}$$

ceci entraîne que l'élément $F_f = L(f) \in A$ satisfait :

$$F_f(e) = f(\varphi(e)) \quad ; \quad \forall\, e \in E \quad , \quad \forall\, f \in C(G)\ .$$

Considérons alors

$$Q : C(E) \to C(G) \quad ; \quad Q : f \to Q_f \in C(G) \quad , \quad f \in C(E)$$

une application linéaire telle que

$$\| Q \| \leqslant 1 \quad ; \quad Q_f(\varphi(e)) = f(e) \quad \forall\, f \in C(E)$$

(cf. [8]) et posons $T = T_\varepsilon = L_\varepsilon \circ Q$. On voit alors que T satisfait toutes les conditions de notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Th. VAROPOULOS, *C.R.A.S.* t. 272 (1971), 950-952 (A).

[2] A. PELCZYNSKI, *Studia Math.*, vol. 4 (1966), 285-304.

[3] E. MICHAEL et A. PELCZYNSKI, *Ill. J. Math.* 11 (1967), 563-579.

[4] N. Th. VAROPOULOS, *Acta Math.*, vol. 125 (1970), 109-154.

[5] Institut Mittag-Leffler 1969-70 : Seminars on Thin sets in Harmonic Analysis.

[6] S. DRURY, *C.R.A.S.* t. 271 (1970), 162-163.

[7] N. Th. VAROPOULOS, *C.R.A.S.* t. 272 (1971), 866-867 (A).

[8] K. BORSUK, *Bull. Inst. Acad. Polon. Sci.* 1933, 1-10.

Manuscrit reçu le 30 avril 1971

Nicolas Th. VAROPOULOS
Service de Mathématiques
Université de Paris XI
91 – Orsay