ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

WOLFHARD HANSEN

Abbildungen harmonischer Raüme mit Anwendung auf die Laplace und Wärmeleitungsgleichung

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 203-216
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_203_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 203-216

ABBILDUNGEN HARMONISCHER RÄUME MIT ANWENDUNG AUF DIE LAPLACE UND WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

par Wolfhard HANSEN

Einleitung.

Mit unterschiedlichen Zielen sind schon in verschiedenen Arbeiten (z.B. in [3], [5]) Abbildungen harmonischer Räume studiert worden. In dieser Arbeit werden Abbildungen eines harmonischen Raumes $\tilde{E}$ auf einen harmonischen Raum E mit solchen Eigenschaften betrachtet, dass einerseits Fegen in E vollständig zurückgeführt werden kann auf Fegen in $\tilde{E}$ und andererseits diese Eigenschaften für die Projektion der Wärmeleitungsgleichung auf die Laplace-Gleichung fast trivial erfüllt sind. Damit lässt sich insbesondere die Entscheidung über Dünnheit oder Polarität einer Menge A für die Laplace-Gleichung zurückführen auf Entscheidung über Dünnheit oder Polarität der Menge $A \times \mathbf{R}$ für die Wärmeleitungsgleichung.

Als Beispiel für den Nutzen einer solchen Möglichkeit mag folgendes dienen : In [4] ist für die Wärmeleitungsgleichung unter entscheidender Heranziehung von Absorptionsmengen bewiesen, dass eine in einem Punkt parabolisch zusammenziehbare Menge genau dann dünn in diesem Punkt ist, wenn ihr "unterhalb" dieses Punktes gelegener Teil polar ist. Da für eine zusammenziehbare Menge A die Menge $A \times \mathbf{R}$ parabolisch zusammenziehbar ist, erhält man daraus für die Laplace-Gleichung das in [4] mit ganz anderen Methoden bewiesene Resultat : Eine in einem Punkt zusammenziehbare Menge ist genau dann dünn in diesem Punkt, wenn sie polar ist.

1. Abbildungen harmonischer Räume.

Es seien $\tilde{E}$ und E streng harmonische Räume im Sinne von H. Bauer (s. [1]). Eine stetige Abbildung π von $\tilde{E}$ in E heisse harmonisch, wenn für jede offene Teilmenge $\mathcal{O}$ von E und jede in $\mathcal{O}$ harmonische Funktion h die Funktion $h \circ \pi$ in $\overset{-1}{\pi}(\mathcal{O})$ harmonisch ist (vgl. [3]). Entsprechend für Abbildungen T von $\tilde{E}$ in sich.

Im folgenden sei π eine offene harmonische Abbildung von $\tilde{E}$ auf E, so dass für alle kompakten Teilmengen K von E gilt

$$\inf_{\tilde{K}\ kp. \subset \tilde{E}} R_1^{\overset{-1}{\pi}(K) \cap \complement \tilde{K}} = 0 .$$

Weiter sei $\mathcal{T}$ eine Familie von harmonischen Abbildungen von $\tilde{E}$ in sich, die in folgender Weise mit π verbunden ist : Für alle $\tilde{x} \in \tilde{E}$ ist

$$\overset{-1}{\pi}(\pi(\tilde{x})) = \{T(\tilde{x}) : T \in \mathcal{T}\} .$$

Bemerkung. – Ein Beispiel für eine solche Situation gibt die Laplace-Gleichung (Raum E) und die Wärmeleitungsgleichung (Raum $\tilde{E}$ = E x **R**) mit der Projektion π von $\tilde{E}$ auf E und der Familie $\mathcal{T}$ der Zeittranslationen in $\tilde{E}$. Darauf werden wir im folgenden Paragraphen näher eingehen.

Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller harmonischen, $^*\mathcal{H}$ die Menge aller hyper- und $\mathcal{S}$ die Menge aller superharmonischen Funktionen auf E. Weiter sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Potentiale auf E und $\mathcal{P}_0$ die Menge aller stetigen reellen Potentiale auf E, die ausserhalb einer kompakten Menge harmonisch sind. Entsprechend für $\tilde{E}$.

Ist $\mathcal{F}$ eine Menge numerischer Funktionen auf E, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F} \circ \pi$ die Menge aller Funktionen $f \circ \pi$ mit $f \in \mathcal{F}$. Eine numerische Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{E}$ heisse $\mathcal{T}$-invariant, wenn $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ für alle $T \in \mathcal{T}$ ist. Ist $\tilde{\mathcal{F}}$ eine Menge numerischer Funktionen auf $\tilde{E}$, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}}$ die Menge aller $\mathcal{T}$-invarianten Funktionen aus $\tilde{\mathcal{F}}$.

SATZ 1.1. – *Es ist* $^*\mathcal{H} \circ \pi \subset {}^*\tilde{\mathcal{H}}$ *und* $^*\tilde{\mathcal{H}} \circ T \subset {}^*\tilde{\mathcal{H}}$ *für alle* $T \in \mathcal{T}$. *Insbesondere sind* π *und alle* $T \in \mathcal{T}$ *fein-stetig.*

Beweis. – Für den ersten Teil kann man den Beweis von Theorem

3.1 in [3] übernehmen. Der zweite Teil folgt dann daraus, dass die feine Topologie jeweils die gröbste ist, bezüglich derer alle positiven hyperharmonischen Funktionen stetig sind.

KOROLLAR 1.2. – *Für alle numerischen Funktionen* $f \geqslant 0$ *auf* E *gilt*

$$R_{f \circ \pi} \leqslant R_f \circ \pi \quad , \quad \hat{R}_{f \circ \pi} \leqslant \hat{R}_f \circ \pi \; .$$

Insbesondere ist für alle $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ *und Teilmengen* A *von* E

$$R_{u \circ \pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} \leqslant R_u^A \circ \pi \quad , \quad \hat{R}_{u \circ \pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} \leqslant \hat{R}_u^A \circ \pi \; .$$

Beweis. – Sei $f \geqslant 0$ eine numerische Funktion auf E. Ist $v \in {}^*\mathcal{H}^+$ mit $v \geqslant f$, so ist $v \circ \pi \in {}^*\widetilde{\mathcal{H}}^+$ nach Satz 1.1 und $v \circ \pi \geqslant f \circ \pi$. Daher ist

$$R_{f \circ \pi} \leqslant R_f \circ \pi$$

und nach [4], Lemma 3.5

$$\hat{R}_{f \circ \pi} \leqslant \widehat{R_f \circ \pi} = \hat{R}_f \circ \pi \; .$$

SATZ 1.3. – *Für alle lokal-beschränkten* $p \in \mathcal{P}$ *ist* $p \circ \pi \in \widetilde{\mathcal{P}}$ *und lokal-beschränkt.*

Beweis. – Sei $p \in \mathcal{P}$ lokal-beschränkt. Nach Satz 1.1 ist $p \circ \pi \in \widetilde{\mathcal{S}}^+$.

Sei nun $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$, $\varepsilon > 0$ und $x = \pi(\widetilde{x})$. Da p ein Potential ist, gibt es zunächst eine kompakte Teilmenge K von E mit

$$R_p^{\complement K}(x) < \varepsilon \; .$$

Nach Korollar 1.2 ist daher erst recht

$$R_{p \circ \pi}^{\complement \overset{-1}{\pi}(K)}(\widetilde{x}) < \varepsilon \; .$$

Da p lokal-beschränkt ist, gibt es ein $\alpha > 0$ mit $p \leqslant \alpha$ auf K. Dazu gibt es dann nach Voraussetzung über π eine kompakte Teilmenge $\widetilde{K}$ von $\widetilde{E}$ mit

$$R_1^{\overset{-1}{\pi}(K) \cap \complement \widetilde{K}}(\widetilde{x}) < \frac{\varepsilon}{\alpha} \, ,$$

also

$$R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(K)\cap C\tilde{K}}(\tilde{x}) \leqslant R_{a}^{\overset{-1}{\pi}(K)\cap C\tilde{K}}(\tilde{x}) < \varepsilon \ .$$

Damit folgt

$$R_{p\circ\pi}^{C\tilde{K}}(\tilde{x}) \leqslant R_{p\circ\pi}^{C\overset{-1}{\pi}(K)}(\tilde{x}) + R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(K)\cap C\tilde{K}}(\tilde{x}) < 2\varepsilon \ .$$

Also ist $p \circ \pi$ ein Potential.

Ist $\tilde{L}$ eine kompakte Teilmenge von $\tilde{E}$, so ist $L := \pi(\tilde{L})$ eine kompakte Teilmenge von E, also p beschränkt auf L und damit $p \circ \pi$ beschränkt auf $\overset{-1}{\pi}(L) \supset \tilde{L}$. Also ist $p \circ \pi$ auch lokal-beschränkt.

SATZ 1.4. – *Es ist* $\mathcal{H} \circ \pi = \tilde{\mathcal{H}}_{\mathfrak{T}}$, ${}^*\mathcal{H} \circ \pi = {}^*\tilde{\mathcal{H}}_{\mathfrak{T}}$ *und* $\mathcal{S} \circ \pi = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathfrak{T}}$.

Beweis. – Sei $u \in {}^*\mathcal{H}$. Dann ist $u \circ \pi \in {}^*\tilde{\mathcal{H}}$ nach Satz 1.1. Da $\mathfrak{T}$ mit π verbunden ist, ist $\pi \circ T = \pi$ für alle $T \in \mathfrak{T}$, also

$$(u \circ \pi) \circ T = u \circ \pi \ .$$

Sei nun umgekehrt $\tilde{u} \in {}^*\tilde{\mathcal{H}}_{\mathfrak{T}}$. Für alle $x \in E$ ist dann $\tilde{u}$ konstant auf $\overset{-1}{\pi}(x)$, es wird also durch

$$u(x) = \tilde{u}(\overset{-1}{\pi}(x)) \qquad (x \in E)$$

eine numerische Funktion u auf E definiert. Offenbar ist

$$u \circ \pi = \tilde{u} \ .$$

Zu zeigen ist $u \in {}^*\mathcal{H}$.

Da π offen und stetig ist, gilt nach [4], Lemma 3.5

$$\hat{u} \circ \pi = \widehat{u \circ \pi} = \hat{\tilde{u}} = \tilde{u} = u \circ \pi \ .$$

Wegen $\pi(\tilde{E}) = E$ folgt daraus $\hat{u} = u$. u ist also nach unten halbstetig.

Sei weiter U eine reguläre Teilmenge von E und f eine stetige reelle Funktion auf E mit $f \leqslant u$. Es sei h definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} \int f \, d\mu_x^U & , \ x \in U \ , \\ f(x) & , \ x \in CU \ . \end{cases}$$

Dann ist h eine stetige reelle Funktion, die in U harmonisch ist. Es ist

$$\tilde{v} := (u - h) \circ \pi = \tilde{u} - h \circ \pi \ .$$

$\tilde{v}$ ist daher eine nach unten halbstetige Funktion auf $\tilde{E}$. Da π harmonisch ist, ist $h \circ \pi$ harmonisch in $\overset{-1}{\pi}(U)$, also $\tilde{v}$ hyperharmonisch in $\overset{-1}{\pi}(U)$. In $\complement U$ ist $u - h = u - f \geqslant 0$, also $\tilde{v} \geqslant 0$ in $\complement\, \overset{-1}{\pi}(U)$. Schliesslich gibt es ein $p \in \mathcal{P}_0$ mit $(u - h) + p \geqslant 0$ in U, also $\tilde{v} + p \circ \pi \geqslant 0$ in $\overset{-1}{\pi}(U)$. Nach Satz 1.3 ist aber $p \circ \pi \in \mathcal{P}$. Aus dem Randminimumprinzip ([1], 2.4.3) folgt daher

$$\tilde{v} \geqslant 0 .$$

Wegen $\pi(\tilde{E}) = E$ bedeutet das

$$u - h \geqslant 0 .$$

Für alle $x \in U$ ist also $\int f \, d\mu_x^U \leqslant u(x)$. Daher ist $u \in {}^*\mathcal{H}$.

Damit ist ${}^*\mathcal{H} \circ \pi = {}^*\tilde{\mathcal{H}}_{\mathfrak{G}}$ bewiesen, also auch $\mathcal{H} \circ \pi = \tilde{\mathcal{H}}_{\mathfrak{G}}$. Da $\pi(\tilde{E}) = E$ und π offen und stetig ist, ist eine Teilmenge A von E genau dann dicht in E, wenn $\overset{-1}{\pi}(A)$ dicht in $\tilde{E}$ ist. Damit folgt dann auch $\mathcal{S} \circ \pi = \tilde{\mathcal{S}}_{\mathfrak{G}}$.

Lemma 1.5. — *Sei $\tilde{f}$ eine numerische Funktion auf $\tilde{E}$ mit $\tilde{f} \circ T \geqslant \tilde{f}$ für alle $T \in \mathfrak{G}$. Dann ist $\tilde{f}$ $\mathfrak{G}$-invariant.*

Beweis. — Sei $T \in \mathfrak{G}$, $\tilde{x} \in \tilde{E}$ und $\tilde{y} = T(\tilde{x})$. Dann ist

$$\pi(\tilde{y}) = \pi \circ T(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}) ,$$

es gibt also ein $S \in \mathfrak{G}$ mit $S(\tilde{y}) = \tilde{x}$. Wegen $\tilde{f} \circ S \geqslant \tilde{f}$ ist daher

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f} \circ S(\tilde{y}) \geqslant \tilde{f}(\tilde{y}) = \tilde{f} \circ T(\tilde{x}) .$$

Also ist auch $\tilde{f} \geqslant \tilde{f} \circ T$ und damit $\tilde{f}$ $\mathfrak{G}$-invariant.

Satz 1.6. — *Sei $s \in \mathcal{S}^+$ und h die grösste harmonische Minorante von s. Dann ist $h \circ \pi$ die grösste harmonische Minorante von $s \circ \pi$.*

Beweis. — Sei $\tilde{h}$ die grösste harmonische Minorante von $s \circ \pi$. Für alle $T \in \mathfrak{G}$ ist dann $\tilde{h} \circ T$ harmonisch und $\tilde{h} \circ T \leqslant s \circ \pi \circ T = s \circ \pi$, also $\tilde{h} \circ T \leqslant \tilde{h}$. Nach Lemma 1.5 (angewendet auf $-\tilde{h}$) ist daher $\tilde{h}$ $\mathfrak{G}$-invariant. Nach Satz 1.4 existiert daher ein $h_1 \in \mathcal{H}$ mit

$$\tilde{h} = h_1 \circ \pi .$$

Wegen $\widetilde{h} \leqslant s \circ \pi$ und $\pi(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$ ist $h_1 \leqslant s$, also $h_1 \leqslant h$. Andererseits ist $h \circ \pi$ eine harmonische Minorante von $s \circ \pi$, also $h \circ \pi \leqslant \widetilde{h}$ und damit auch $h \leqslant h_1$.

KOROLLAR 1.7. – *Es ist* $\mathfrak{P} \circ \pi = \widetilde{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{T}}$.

Beweis. – Nach Satz 1.4 ist $\mathfrak{S}^+ \circ \pi = \widetilde{\mathfrak{S}}^+_{\mathfrak{T}}$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 1.6.

SATZ 1.8. – *Für alle nach unten halbstetigen numerischen Funktionen* $f \geqslant 0$ *auf* E *gilt*

$$\mathrm{R}_{f \circ \pi} = \mathrm{R}_f \circ \pi .$$

Insbesondere ist für alle $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ *und offenen Teilmengen* $\mathcal{O}$ *von* E

$$\mathrm{R}_{u \circ \pi}^{\overset{-1}{\pi}(\mathcal{O})} = \mathrm{R}_u^{\mathcal{O}} \circ \pi .$$

Beweis. – Sei $f \geqslant 0$ eine nach unten halbstetige Funktion auf E. Nach Korollar 1.2 ist $\mathrm{R}_{f \circ \pi} \leqslant \mathrm{R}_f \circ \pi$. Jetzt ist aber sogar

$$\widetilde{\nu} := \mathrm{R}_{f \circ \pi} \in {}^*\widetilde{\mathcal{H}}^+ ,$$

da $f \circ \pi$ nach unten halbstetig ist. Für jedes $\mathrm{T} \in \mathfrak{T}$ ist $\widetilde{\nu} \circ \mathrm{T} \in {}^*\widetilde{\mathcal{H}}^+$ nach Satz 1.1 und $\widetilde{\nu} \circ \mathrm{T} \geqslant f \circ \pi \circ \mathrm{T} = f \circ \pi$, also $\widetilde{\nu} \circ \mathrm{T} \geqslant \widetilde{\nu}$. Nach Lemma 1.5 ist daher $\widetilde{\nu}$ $\mathfrak{T}$-invariant, es existiert also nach Satz 1.4 ein $\nu \in {}^*\mathcal{H}^+$ mit

$$\widetilde{\nu} = \nu \circ \pi .$$

Wegen $\widetilde{\nu} \geqslant f \circ \pi$ und $\pi(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$ ist $\nu \geqslant f$. Daher ist auch

$$\mathrm{R}_{f \circ \pi} = \widetilde{\nu} = \nu \circ \pi \geqslant \mathrm{R}_f \circ \pi .$$

Bemerkung. – Die Halbstetigkeit von f ist nur für $\mathrm{R}_{f \circ \pi} \in {}^*\widetilde{\mathcal{H}}^+$ verwendet. Daher genügt es, dass $f \circ \pi$ fein nach unten halbstetig ist bzw. $\mathcal{O}$ eine fein-offene Teilmenge von E.

LEMMA 1.9. – *Sei* $p \in \mathfrak{P}_0$ *und* K *eine kompakte Teilmenge von* E. *Dann ist*

$$\mathrm{R}_p^{\mathrm{K}} \circ \pi \leqslant \mathrm{R}_{p \circ \pi}^{\overset{-1}{\pi}(\mathrm{K})} .$$

Beweis. – Sei $\tilde{z} \in \tilde{E}$ und $\varepsilon > 0$. Da $p \circ \pi$ nach Satz 1.3 ein Potential auf $\tilde{E}$ ist, gibt es eine kompakte Teilmenge $\tilde{K}$ von $\tilde{E}$ mit

$$R_{p\circ\pi}^{\complement\tilde{K}}(\tilde{z}) < \varepsilon .$$

Da $p \circ \pi$ eine stetige reellwertige superharmonische Funktion ist, gibt es eine offene Teilmenge $\tilde{\mathcal{O}}$ von $\tilde{E}$ mit $\overset{-1}{\pi}(K) \subset \tilde{\mathcal{O}}$ und

$$R_{p\circ\pi}^{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{z}) \leqslant R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(K)}(\tilde{z}) + \varepsilon .$$

Sei $(\mathcal{O}_n)$ eine antitone Folge offener Teilmengen von E mit $\overline{\mathcal{O}}_{n+1} \subset \mathcal{O}_n$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = K$. Da $\tilde{K}\setminus\tilde{\mathcal{O}}$ eine kompakte Teilmenge von

$$\complement\overset{-1}{\pi}(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement\overset{-1}{\pi}(\overline{\mathcal{O}}_n)$$

ist, existiert ein $n \in \mathbf{N}$ mit $\tilde{K}\setminus\tilde{\mathcal{O}} \subset \complement\overset{-1}{\pi}(\overline{\mathcal{O}}_n)$. Es ist dann

$$\overset{-1}{\pi}(\mathcal{O}_n) \subset (\complement\tilde{K}) \cup \tilde{\mathcal{O}} ,$$

also nach Satz 1.8

$$\begin{aligned} R_p^K \circ \pi(\tilde{z}) &\leqslant R_p^{\mathcal{O}_n} \circ \pi(\tilde{z}) = R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(\mathcal{O}_n)}(\tilde{z}) \\ &\leqslant R_{p\circ\pi}^{\complement\tilde{K}}(\tilde{z}) + R_{p\circ\pi}^{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{z}) \\ &\leqslant R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(K)}(\tilde{z}) + 2\varepsilon . \end{aligned}$$

SATZ 1.10. – *Für alle Borelschen Teilmengen* B *von* E *und alle* $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ *gilt*

$$R_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} = R_u^B \circ \pi .$$

Beweis. – Sei $p \in \mathcal{P}_0$ und B eine Borelsche Teilmenge von E. Nach [1], 3.2.5, dem Choquetschen Satz über Kapazitäten und Lemma 1.9 ist

$$R_p^B \circ \pi = \sup_{K\ kp. \subset B} R_p^K \circ \pi \leqslant \sup_{K\ kp. \subset B} R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(K)} \leqslant R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} ,$$

also

$$R_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} = R_p^B \circ \pi$$

nach Korollar 1.2. Über aufsteigende Folgen in $\mathcal{P}_0$ folgt dann die Behauptung für alle $u \in {}^*\mathcal{H}^+$.

Es sei $\mathfrak{M}_0$ die Menge aller positiven Radonschen Masse auf E, für die alle $p \in \mathcal{P}_0$ integrierbar sind. Entsprechend sei $\widetilde{\mathfrak{M}}_0$ definiert.

LEMMA 1.11. – *Zu jeder Teilmenge* A *von* E *existiert eine* G_δ-*Menge* B *von* E *mit* $A \subset B$, $\mu^B = \mu^A$ *für alle* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ *und* $\nu^{\overset{-1}{\pi}(B)} = \nu^{\overset{-1}{\pi}(A)}$ *für alle* $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$.

Beweis. – Nach [2], Lemma 1.2 existiert eine G_δ-Menge B_1 in E mit $A \subset B_1$ und $\mu^{B_1} = \mu^A$ für alle $\mu \in \mathfrak{M}_0$ und eine G_δ-Menge $\widetilde{B}$ in $\widetilde{E}$ mit $\overset{-1}{\pi}(A) \subset \widetilde{B}$ und $\nu^{\widetilde{B}} = \nu^{\overset{-1}{\pi}(A)}$ für alle $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$. Es seien $\widetilde{\mathfrak{G}}_n$ offene Teilmengen von $\widetilde{E}$ mit

$$\widetilde{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathfrak{G}}_n .$$

Es sei

$$B_2 := \complement\, \pi(\complement\, \widetilde{B}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \complement\, \pi(\complement\, \widetilde{\mathfrak{G}}_n) .$$

Dann ist $\overset{-1}{\pi}(B_2) \subset \widetilde{B}$ und $A \subset B_2$ wegen $\overset{-1}{\pi}(A) \subset \widetilde{B}$.

Für alle $n \in N$ ist $\complement\, \widetilde{\mathfrak{G}}_n$ eine K_σ-Menge, also auch $\pi(\complement\, \widetilde{\mathfrak{G}}_n)$, da π stetig ist. Daher ist B_2 eine G_δ-Menge in E. Setzen wir

$$B = B_1 \cap B_2 ,$$

so ist B eine G_δ-Menge in E mit $A \subset B$. Wegen $A \subset B \subset B_1$ ist für alle $\mu \in \mathfrak{M}_0$

$$\mu^B = \mu^A .$$

Wegen $\overset{-1}{\pi}(A) \subset \overset{-1}{\pi}(B) \subset \widetilde{B}$ ist für alle $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$

$$\nu^{\overset{-1}{\pi}(B)} = \nu^{\overset{-1}{\pi}(A)} .$$

SATZ 1.12. – *Sei* A *eine beliebige Teilmenge von* E. *Dann gilt für alle* $u \in {}^*\mathcal{H}^+$

$$\hat{R}_{u \circ \pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} = \hat{R}_u^A \circ \pi .$$

Für alle $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$ *mit* $\pi(\nu) \in \mathfrak{M}_0$ *ist*

$$\pi(\nu^{\overset{-1}{\pi}(A)}) = (\pi(\nu))^A .$$

Beweis. – Sei $u \in {}^*\mathcal{H}^+$. Nach Lemma 1.11 gibt es eine G_δ-Menge B in E mit

$$\hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} = \hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} \quad \text{und} \quad \hat{R}_u^B = \hat{R}_u^A .$$

Nach Satz 1.10 ist $R_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} = R_u^B \circ \pi$, also

$$\hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(B)} = \widehat{R_u^B \circ \pi} = \hat{R}_u^B \circ \pi ,$$

da π stetig und offen ist. Daher ist auch $\hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} = \hat{R}_u^A \circ \pi$.

Sei nun $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$ mit $\pi(\nu) \in \mathfrak{M}_0$. Dann ist für alle $p \in \mathcal{P}$

$$\int \hat{R}_p^A \, d(\pi(\nu)) = \int \hat{R}_p^A \circ \pi \, d\nu$$

$$= \int \hat{R}_{p\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)} \, d\nu = \int p \circ \pi \, d(\nu^{\overset{-1}{\pi}(A)})$$

$$= \int p \, d(\pi(\nu^{\overset{-1}{\pi}(A)})) .$$

Also ist

$$(\pi(\nu))^A = \pi(\nu^{\overset{-1}{\pi}(A)}) .$$

KOROLLAR 1.13. – *Eine Teilmenge* P *von* E *ist genau dann polar, wenn* $\overset{-1}{\pi}(P)$ *polar ist.*

Beweis. – Sei $P \subset E$ und $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ streng positiv. Wegen

$$\hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(P)} = \hat{R}_u^P \circ \pi \quad \text{und} \quad \pi(\widetilde{E}) = E \quad \text{ist} \quad \hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(P)} = 0$$

genau dann, wenn $\hat{R}_u^P = 0$ ist. Also ist $\overset{-1}{\pi}(P)$ genau dann polar, wenn P polar ist.

KOROLLAR 1.14. – *Sei* A *eine Teilmenge von* E *und* $z \in E$. *Ist* A *dünn in* z, *so ist* $\overset{-1}{\pi}(A)$ *dünn in jedem Punkt aus* $\overset{-1}{\pi}(z)$. *Ist* $z \notin A$ *oder* $\{z\}$ *total-dünn und umgekehrt* $\overset{-1}{\pi}(A)$ *dünn in einem Punkt aus* $\overset{-1}{\pi}(z)$, *so ist* A *dünn in* z.

Beweis. – Ist A dünn in z, so gibt es ein $u \in {}^*\mathcal{H}^+$ mit $\hat{R}_u^A(z) < u(z)$. Für jedes $\tilde{z} \in \overset{-1}{\pi}(z)$ ist dann nach Satz 1.12

$$\hat{R}_{u\circ\pi}^{\overset{-1}{\pi}(A)}(\tilde{z}) = \hat{R}_u^A(z) < u(z) = u \circ \pi(\tilde{z}) \ ,$$

also $\overset{-1}{\pi}(A)$ dünn in $\tilde{z}$.

Sei nun umgekehrt $\overset{-1}{\pi}(A)$ dünn in einem Punkt $\tilde{z} \in \overset{-1}{\pi}(z)$ und zunächst $z \notin A$. Dann ist $\overset{-1}{\pi}(z) \cap \overset{-1}{\pi}(A) = \emptyset$ und es gibt ein $\tilde{u} \in {}^*\tilde{\mathcal{H}}^+$ mit

$$R_{\tilde{u}}^{\overset{-1}{\pi}(A)}(\tilde{z}) < \tilde{u}(\tilde{z}) \ .$$

Es gibt also ein $\tilde{v} \in {}^*\tilde{\mathcal{H}}^+$ mit $\tilde{v} \geqslant \tilde{u}$ auf $\overset{-1}{\pi}(A)$ und $\tilde{v}(\tilde{z}) < \tilde{u}(\tilde{z})$. Sei $\tilde{x} \in \overset{-1}{\pi}(z)$. Dann gibt es ein $T \in \mathcal{C}$ mit $T(\tilde{x}) = \tilde{z}$. Nach Satz 1.1 sind $\tilde{v} \circ T$, $\tilde{u} \circ T \in {}^*\tilde{\mathcal{H}}^+$. Es ist $\tilde{v} \circ T \geqslant \tilde{u} \circ T$ auf

$$\overset{-1}{T}(\overset{-1}{\pi}(A)) = (\pi \circ T)^{-1}(A) = \overset{-1}{\pi}(A)$$

und $\tilde{v} \circ T(\tilde{x}) = \tilde{v}(\tilde{z}) < \tilde{u}(\tilde{z}) = \tilde{u} \circ T(\tilde{x})$. Daher ist $\overset{-1}{\pi}(A)$ dünn in $\tilde{x}$.

$\overset{-1}{\pi}(z)$ ist daher disjunkt zum feinen Abschluss von $\overset{-1}{\pi}(A)$, also $\varepsilon_{\tilde{z}}^{\overset{-1}{\pi}(A)}(\overset{-1}{\pi}(z)) = 0$. Nach Satz 1.12 ist daher wegen $\pi(\varepsilon_{\tilde{z}}) = \varepsilon_z$

$$\varepsilon_z^A(\{z\}) = \pi(\varepsilon_{\tilde{z}}^{\overset{-1}{\pi}(A)})(\{z\}) = \varepsilon_{\tilde{z}}^{\overset{-1}{\pi}(A)}(\overset{-1}{\pi}(z)) = 0 \ .$$

Also ist $\varepsilon_z^A \neq \varepsilon_z$, d.h. A dünn in z.

Ist $\{z\}$ total dünn und $\overset{-1}{\pi}(A)$ dünn in einem Punkt aus $\overset{-1}{\pi}(z)$, so ist aufgrund der eben angestellten Betrachtungen $A \setminus \{z\}$ dünn in z und damit auch $A = (A \setminus \{z\}) \cup \{z\}$.

KOROLLAR 1.15. — *π ist fein-offen. Die feine Topologie von* E *ist die von der feinen Topologie von* $\tilde{E}$ *vermöge π induzierte Topologie.*

Beweis. — Sei $\tilde{G}$ eine fein-offene Teilmenge von $\tilde{E}$, $G = \pi(\tilde{G})$ und $x \in G$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \in \tilde{G}$ mit $\pi(\tilde{x}) = x$. Es ist $\complement \tilde{G}$ dünn in $\tilde{x}$, also erst recht $\overset{-1}{\pi}(\complement G)$. Nach Korollar 1.14 ist daher $\complement G$ dünn in x. Also ist G fein-offen.

2. Anwendung auf die Laplace- und Wärmeleitungsgleichung.

Es sei $m \in \mathbf{N}$ und E eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^m$, relativkompakt, falls $m \leqslant 2$. $\mathcal{H}$ sei das Garbendatum der Lösungen der Laplace-Gleichung in E und $\widetilde{\mathcal{H}}$ das Garbendatum der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in $\widetilde{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \times \mathbf{R}$. Dann sind $(\mathrm{E}, \mathcal{H})$ und $(\widetilde{\mathrm{E}}, \widetilde{\mathcal{H}})$ streng harmonische Räume (vgl. [1]).

Es sei π die Projektion von $\widetilde{\mathrm{E}}$ auf E und $\mathcal{C}$ die Familie aller durch $\mathrm{T}_t(x, s) = (x, s + t)$ mit $t \in \mathbf{R}$ definierten Translationen in $\widetilde{\mathrm{E}}$. Dann sind alle im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen trivial erfüllt bis auf die zusätzliche Eigenschaft von π, die durch die beiden folgenden Lemmata bewiesen wird.

LEMMA 2.1. – *Sei $m \geqslant 2$. Dann ist für jede offene relativkompakte Teilmenge $\mathcal{O}$ von* E

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{R}_1^{\mathcal{O} \times \complement[-n, +n]} = 0 .$$

Beweis. – Da die Gefegte der Funktion 1 auf $\mathcal{O} \times \complement[-n, n]$ bei Vergrösserung des Grundraumes $\widetilde{\mathrm{E}}$ und der Menge $\mathcal{O}$ nicht kleiner wird, dürfen wir für diesen Beweis annehmen, dass $\mathrm{E} = \mathbf{R}^m$ für $m \geqslant 3$, E eine offene Kreisscheibe für $m = 2$ und $\mathcal{O}$ eine offene Kugel in E ist.

Es sei nun $x \in \mathrm{E}$, $t \in \mathbf{R}$, $\widetilde{x} = (x, t)$ und für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{I}_n = t + [-n^2, +n^2] \quad , \quad \mathcal{O}_n = x + \frac{1}{n}(\mathcal{O} - x)$$

und Q_n definiert durch

$$\mathrm{Q}_n(\widetilde{z}) = \widetilde{x} + \mathrm{P}_{\frac{1}{n}}(\widetilde{z} - \widetilde{x}) \qquad (\widetilde{z} \in \widetilde{\mathrm{E}}) .$$

Dabei sei P_α wie in [4] definiert durch $\mathrm{P}_\alpha(y, s) = (\alpha y, \alpha^2 s)$. Für alle $n \in \mathbf{N}$ ist dann Q_n eine Abbildung von $\widetilde{\mathrm{E}}$ in sich mit $\mathrm{Q}_n(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ und

$$\mathrm{Q}_n(\mathcal{O} \times \complement \mathrm{I}_n) = \mathcal{O}_n \times \complement \mathrm{I}_1 .$$

Nach [4], Satz 3.4 ist daher für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{R}_1^{\mathcal{O} \times \complement \mathrm{I}_n}(\widetilde{x}) \leqslant \mathrm{R}_1^{\mathcal{O}_n \times \complement \mathrm{I}_1}(\widetilde{x}) .$$

Setzen wir $\widetilde{\mathfrak{O}} = \mathrm{E} \times \mathring{\mathrm{I}}_1$, so ist $\mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n \times \mathrm{CI}_1}$ harmonisch in $\widetilde{\mathfrak{O}}$.

Nach Korollar 1.2 (bei dessen Beweis die zusätzliche Eigenschaft von π noch nicht verwendet wurde) ist aber für alle n

$$\mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n \times \mathrm{CI}_1} \leqslant \mathrm{R}_1^{\overset{-1}{\pi}(\mathfrak{o}_n)} \leqslant \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n} \circ \pi ,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n \times \mathrm{CI}_1} \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n} \circ \pi = \mathrm{R}_1^{\{x\}} \circ \pi .$$

Da $\{x\}$ polar und die linke Seite als harmonische Funktion stetig in $\widetilde{\mathfrak{O}}$ ist, folgt in $\widetilde{\mathfrak{O}}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n \times \mathrm{CI}_1} \leqslant \hat{\mathrm{R}}_1^{\{x\}} \circ \pi = 0 .$$

Insbesondere ist also

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o} \times \mathrm{C}[-n,n]}(\widetilde{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o} \times \mathrm{CI}_n}(\widetilde{x}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathfrak{o}_n \times \mathrm{CI}_1}(\widetilde{x}) = 0 .$$

LEMMA 2.2. — *Sei $m = 1$. Dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathrm{E} \times \mathrm{C}[-n,+n]} = 0 .$$

Beweis. — Sei $x \in \mathrm{E}$, $t \in \mathbf{R}$ und $\widetilde{x} = (x, t)$. Wie beim Beweis von Lemma 2.1 dürfen wir E vergrössern, können also annehmen, dass $\mathrm{E} =]x - a, x + a[$ mit $a > 0$ ist. Da $\{(y, s) : y \in \mathrm{E}, s \leqslant t\}$ eine Absorptionsmenge ist, ist für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{R}_1^{\mathrm{E} \times \mathrm{C}]t-n^2, t+n^2[}(\widetilde{x}) = \mathrm{R}_1^{\mathrm{E} \times]-\infty, t-n^2]}(\widetilde{x})$$

und das ist nach [4], Korollar 1.5

$$= \mathrm{R}_1^{\mathrm{E} \times \{t-n^2\}}(\widetilde{x}) .$$

Definieren wir Q_n wie im Beweis von Lemma 2.1, so ist

$$\mathrm{Q}_n(\mathrm{E} \times \{t - n^2\}) =]x - \frac{a}{n}, x + \frac{a}{n}[\times \{t - 1\} ,$$

also nach [4], Satz 3.4

$$\mathrm{R}_1^{\mathrm{E} \times \{t-n^2\}}(\widetilde{x}) \leqslant \mathrm{R}_1^{]x - \frac{a}{n}, x + \frac{a}{n}[\times \{t-1\}}(\widetilde{x}) .$$

Da $(x, t-1)$ polar ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung $\widetilde{\mathrm{U}}$ von $(x, t-1)$ mit $\mathrm{R}_1^{\widetilde{\mathrm{U}}}(\widetilde{x}) < \varepsilon$. Für alle hinreichend grossen n ist daher $\mathrm{R}_1^{]x-\frac{a}{n}, x+\frac{a}{n}[\times\{t-1\}}(\widetilde{x})$ beliebig klein. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathrm{E}\times \complement[-n,+n]}(\widetilde{x}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_1^{\mathrm{E}\times \complement]t-n^2, t+n^2[}(\widetilde{x}) = 0 \ .$$

Damit gelten also alle Sätze des vorigen Paragraphen. Insbesondere erhalten wir :

Satz 2.3. — *Es ist* $\mathfrak{H} \circ \pi = \widetilde{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{C}}$, $^*\mathfrak{H} \circ \pi = {}^*\widetilde{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{S} \circ \pi = \widetilde{\mathfrak{S}}_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{P} \circ \pi = \widetilde{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{C}}$.

Satz 2.4. — *Für alle Teilmengen* A *von* E, $u \in {}^*\mathfrak{H}^+$ *und* $\nu \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0$ *mit* $\pi(\nu) \in \mathfrak{M}_0$ *ist*

$$\hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{A}\times\mathrm{R}}_{u\circ\pi} = \hat{\mathrm{R}}^{\mathrm{A}}_{u} \circ \pi \quad , \quad \pi(\nu^{\mathrm{A}\times\mathrm{R}}) = (\pi(\nu))^{\mathrm{A}} \ .$$

Korollar 2.5. — *Eine Teilmenge* P *von* E *ist genau dann polar, wenn* P × **R** *in* $\widetilde{\mathrm{E}}$ *polar ist.*

Korollar 2.6. — *Sei* A *eine Teilmenge von* E, $x \in \mathrm{E}$ *und* $t \in \mathbf{R}$. *Dann ist* A *genau dann dünn in* x, *wenn* A × **R** *dünn ist in* (x, t).

Korollar 2.7. — π *ist fein-offen und fein-stetig. Die feine Topologie von* E *ist die von der feinen Topologie von* $\widetilde{\mathrm{E}}$ *vermöge* π *induzierte Topologie.*

Bemerkungen.

1) Es ergibt sich damit der schon in der Einleitung an einem Beispiel erläuterte Zusammenhang zwischen Dünnheitskriterien für die Wärmeleitungsgleichung und Dünnheitskriterien für die Laplace-Gleichung. Die Sätze des Paragraphen 6 in [4] erweisen sich damit als Folgerungen der Sätze des Paragraphen 4.

2) Ebenso kann man natürlich aus der Laplace-Gleichung Koordinaten herausprojizieren. An die Stelle der parabolischen Zusammenziehungen bei den Beweisen von Lemma 2.1 und 2.2 treten dann die gewöhnlichen Zusammenziehungen.

LITERATUR

[1] H. BAUER, Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics 22, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1966.

[2] C. CONSTANTINESCU, Some properties of the balayage of measures on a harmonic space, *Ann. Inst. Fourier* 17/1 (1967), 273-293.

[3] C. CONSTANTINESCU and A. CORNEA, Compactifications of harmonic spaces, *Nagoya Math. J.* 25 (1965), 1-57.

[4] W. HANSEN, Fegen und Dünnheit mit Anwendungen auf die Laplace- und Wärmeleitungsgleichung, *Ann. Inst. Fourier* 21/2 (1971), 79-121.

[5] D. SIBONY, Allure à la frontière minimale d'une classe de transformations, Théorème de Doob généralisé. *Ann. Inst. Fourier* 18/2 (1969), 91-120.

Manuscrit reçu le 16 septembre 1970

Wolfhard HANSEN
Mathematisches Institut
der Universität
Erlangen, Bismarckstrasse
Westdeutschland